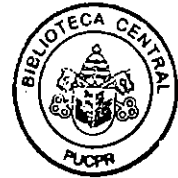


RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

3ª Edição



Ferdinand P. Beer
Lehigh University

E. Russell Johnston, Jr.
University of Connecticut

Com a colaboração de
John T. DeWolf
University of Connecticut

Tradução e Revisão Técnica
Celso Pinto Morais Pereira
Professor de Engenharia Mecânica da UNESP
Universidade Paulista "Júlio Mesquita Filho"
Campus de Guaratinguetá

620.112
B7152
1975
E.A.3



São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

Do original: *Mechanics of Materials*
© 1992, 1981 by McGraw-Hill, Inc.
© 1996, Pearson Education do Brasil
© 1989, 1982 Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Produtora Editorial: Mônica Franco Jacintho
Produtor Gráfico: José Rodrigues
Capa: layout: Douglas Lucas
Edição e fotolitos em alta resolução: JAG

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Beer, Ferdinand Pierre, 1915-
Resistência dos materiais / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston,
Jr. ; tradução e revisão técnica Celso Pinto Moraes Pereira. - 3ª ed. -
São Paulo : Pearson Makron Books, 1995.

1. Resistência dos materiais I. Johnston, Elwood Russell, 1925-II. Título.

95-2801

CDD-620.112

Índices para catálogo sistemático:

1. Materiais : Resistência : Engenharia 620.112
2. Resistência dos materiais : Engenharia 620.112

Biblioteca Central

Resistência dos materiais.
Ac. 248361 - R. 785751 Ex. 3
Compra - C.A.T.M.
Nf.: 34919 R\$ 91,90 - 23/01/2009

Engenharia Mecatrônica (Controle e

Junho 2008

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
Cep: 05038-001 Lapa - São Paulo - SP
Tel: (11) 2178-8686 Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

SUMÁRIO

Prefácio	XVII
Capítulo 1 Introdução - Conceito de Tensão	1
1.1 Introdução	1
1.2 Forças e Tensões	2
1.3 Forças Axiais; Tensões Normais	6
1.4 Tensões de Cisalhamento	10
1.5 Tensões de Esmagamento	13
1.6 Aplicações na Análise de Estruturas Simples	14
Problema Resolvido 1.1	18
Problemas	20
1.7 Tensões em um Plano Oblíquo ao Eixo	28
1.8 Tensões Para um Caso de Carregamento Qualquer; Componente de Tensões	31
1.9 Tensões Admissíveis e Tensões Últimas; Coeficiente de Segurança	37
Problema Resolvido 1.2	41
Problema Resolvido 1.3	44
Problemas	46
Revisão e Sumário	52
Problemas de Revisão	57
Capítulo 2 Tensão e Deformação - Carregamento Axial	64
2.1 Introdução	64
2.2 Deformação Específica Normal Sob Carregamento Axial	65

2.3	Diagrama Tensão-deformação	68
2.4	Tensões e Deformações Específicas Verdadeiras	75
2.5	Lei de Hooke; Módulo de Elasticidade	76
2.6	Comportamento Elástico e Comportamento Plástico dos Materiais	77
2.7	Cargas Repetidas; Fadiga	80
2.8	Deformações de Barras Sujeitas a Cargas Axiais	81
	Problema Resolvido 2.1	85
	Problema Resolvido 2.2	87
	Problemas	89
2.9	Problemas Estaticamente Indeterminados	97
2.10	Problemas Envolvendo Variação de Temperatura	105
	Problema Resolvido 2.3	110
	Problema Resolvido 2.4	112
	Problemas	115
2.11	Coefficiente de Poisson	124
2.12	Estados Múltiplos de Carregamento; Generalização da Lei de Hooke	127
*2.13	Dilatação Volumétrica; Módulo de Elasticidade de Volume ...	131
2.14	Deformação de Cisalhamento	133
2.15	Aspectos Complementares na Deformação Sob Carga Axial; Relações entre E , ν e G	139
	Problema Resolvido 2.5	142
	Problemas	144
2.16	Distribuição Das Tensões e Deformações Específicas Causadas Por Carregamento Axial; Princípio de Saint-Venant	152
2.17	Concentração de Tensões	156
2.18	Deformações Plásticas	159
*2.19	Tensões Residuais	165
	Problema Resolvido 2.6	169
	Problemas	171
	Revisão e Sumário	179
	Problemas de Revisão	189

Capítulo 3	Torção	195
3.1	Introdução	195
3.2	Análise Preliminar das Tensões em um Eixo	197
3.3	Deformações nos Eixos Circulares	199
3.4	Tensões no Regime Elástico	204
	Problema Resolvido 3.1	210
	Problema Resolvido 3.2	212
	Problemas	214
3.5	Ângulo de Torção no Regime Elástico	221
3.6	Eixos Estaticamente Indeterminados	227
	Problema Resolvido 3.3	229
	Problema Resolvido 3.4	232
	Problema Resolvido 3.5	234
	Problemas	236
3.7	Projeto de Eixos de Transmissão	247
3.8	Concentração de Tensões em Eixos Circulares	251
	Problema Resolvido 3.6	252
	Problemas	255
*3.9	Deformações Plásticas em Eixos de Seção Circular	258
*3.10	Eixos de Seção Circular Feitos de Material Elastoplástico ...	261
*3.11	Tensões Residuais em Eixos de Seção Circular	266
	Problema Resolvido 3.7	269
	Problema Resolvido 3.8	272
	Problemas	273
*3.12	Torção em Barras de Seção Não-circular	279
*3.13	Eixos Vazados de Paredes Finas	284
	Problema Resolvido 3.9	290
	Problemas	292
	Revisão e Sumário	301
	Problemas de Revisão	309
Capítulo 4	Flexão Pura	317
4.1	Introdução	317
4.2	Barras Prismáticas em Flexão Pura	318
4.3	Análise Preliminar das Tensões na Flexão Pura	320

4.4	Deformações em uma Barra Simétrica na Flexão Pura	321
4.5	Tensões e Deformações no Regime Elástico	326
4.6	Deformações em uma Seção Transversal	332
	Problema Resolvido 4.1	334
	Problema Resolvido 4.2	337
	Problemas	339
4.7	Flexão de Barras Constituídas por Vários Materiais	348
4.8	Concentração de Tensões	354
	Problema Resolvido 4.3	358
	Problema Resolvido 4.4	360
	Problemas	362
*4.9	Deformações Plásticas	370
*4.10	Barras Constituídas de Material Elastoplástico	373
*4.11	Deformações Plásticas em Barras com um Plano de Simetria	380
*4.12	Tensões Residuais	382
	Problema Resolvido 4.5	384
	Problema Resolvido 4.6	387
	Problema Resolvido 4.7	389
	Problemas	390
4.13	Carregamento Axial Excêntrico em um Plano de Simetria	398
	Problema Resolvido 4.8	403
	Problemas	406
4.14	Flexão Fora do Plano de Simetria	415
4.15	Caso Geral de Carga Excêntrica	425
	Problema Resolvido 4.9	430
	*Problema Resolvido 4.10	432
	Problemas	435
*4.16	Flexão de Barras Curvas	445
	Problema Resolvido 4.11	455
	Problemas	457
	Revisão e Sumário	464
	Problemas de Revisão	471

Capítulo 5	Carregamento Transversal	478
5.1	Introdução	478
5.2	Carregamento Transversal em Barras Prismáticas	479
5.3	Hipóteses Básicas para a Distribuição de Tensões Normais ..	482
5.4	Determinação da Tensão de Cisalhamento em um Plano Horizontal	484
5.5	Determinação da Tensão de Cisalhamento τ_{xy} em uma Viga	490
5.6	Tensões de Cisalhamento τ_{xy} em Vigas de Seções Transversais Usuais	493
*5.7	Análise Mais Detalhada da Distribuição de Tensões em uma Viga de Seção Retangular Estreita	495
	Problema Resolvido 5.1	498
	Problema Resolvido 5.2	500
	Problemas	503
5.8	Cisalhamento em uma Seção Longitudinal Arbitrária	509
5.9	Tensões de Cisalhamento em Barras de Paredes Finas	512
*5.10	Deformações Plásticas	515
	Problema Resolvido 5.3	518
	Problema Resolvido 5.4	519
	Problema Resolvido 5.5	521
	Problemas	524
5.11	Tensões Devidas a Combinações de Carregamento	532
	Problema Resolvido 5.6	538
	Problema Resolvido 5.7	540
	Problemas	543
*5.12	Carregamento Assimétrico em Barras de Paredes Finas; Centro de Cisalhamento	557
	Problema Resolvido 5.8	569
	Problemas	573
	Revisão e Sumário	582
	Problemas de Revisão	586
Capítulo 6	Análise das Tensões e Deformações	593
6.1	Introdução	593
6.2	Estado Plano de Tensões	596
6.3	Tensões Principais; Tensão de Cisalhamento Máxima	598

	Problema Resolvido 6.1	605
	Problemas	607
6.4	Círculo de Mohr para o Estado Plano de Tensões	614
	Problema Resolvido 6.2	621
	Problema Resolvido 6.3	623
	Problemas	625
6.5	Estado Mais Geral de Tensões	628
6.6	Aplicação do Círculo de Mohr à Análise Tridimensional de Tensões	630
*6.7	Critérios de Ruptura para Materiais Dúteis em Estado Plano de Tensões	635
*6.8	Critérios de Ruptura para Materiais Frágeis em Estado Plano de Tensões	639
	Problema Resolvido 6.4	643
	Problemas	646
6.9	Tensões em Vasos de Pressão de Paredes Finas	651
	Problema Resolvido 6.5	656
	Problemas	659
*6.10	Transformações no Estado Plano de Deformações Específicas	663
*6.11	Círculo de Mohr para Estado Plano de Deformações	668
*6.12	Análise Tridimensional das Deformações Específicas	674
*6.13	Medidas das Deformações Específicas; Rosetas de Deformação	679
	Problema Resolvido 6.6	681
	Problema Resolvido 6.7	683
	Problemas	686
	Revisão e Sumário	692
	Problemas de Revisão	701
Capítulo 7	Projeto de Vigas e Eixos de Transmissão	707
7.1	Introdução	707
7.2	Considerações Básicas para o Projeto de Vigas Prismáticas ..	708
7.3	Diagramas de Momento Fletor e Força Cortante	712
	Problema Resolvido 7.1	716
	Problema Resolvido 7.2	719
	Problemas	721

7.4	Relações entre Carregamento, Força Cortante e Momento Fletor	727
	Problema Resolvido 7.3	731
	Problema Resolvido 7.4	733
	Problema Resolvido 7.5	735
	Problema Resolvido 7.6	737
	Problemas	738
*7.5	Utilização das Funções Singulares para Determinar a Força Cortante e o Momento Fletor em uma Viga	742
	Problema Resolvido 7.7	751
	Problema Resolvido 7.8	753
	Problemas	755
7.6	Tensões Principais em uma Viga	758
7.7	Projeto de Vigas Prismáticas	762
	Problema Resolvido 7.9	767
	Problema Resolvido 7.10	770
	Problema Resolvido 7.11	772
	Problemas	774
*7.8	Vigas de Igual Resistência	782
*7.9	Dimensionamento de Eixos de Transmissão	786
*7.10	Tensões sob Pontos de Aplicação de Carregamento	788
	Problema Resolvido 7.12	793
	Problemas	795
	Revisão e Sumário	804
	Problemas de Revisão	810
Capítulo 8	Deflexão das Vigas por Integração	815
8.1	Introdução	815
8.2	Deformação de uma Viga Sujeita a Carregamento Transversal	818
8.3	Equação da Linha Elástica	820
*8.4	Determinação da Linha Elástica Diretamente a Partir do Carregamento Distribuído	829
8.5	Vigas Estaticamente Indeterminadas	833
	Problema Resolvido 8.1	836
	Problema Resolvido 8.2	839

	Problema Resolvido 8.3	841
	Problemas	844
*8.6	Utilização das Funções Singulares	852
	Problema Resolvido 8.4	857
	Problema Resolvido 8.5	859
	Problema Resolvido 8.6	862
	Problemas	864
8.7	Método de Superposição	871
8.8	Aplicação da Superposição às Vigas Estaticamente Indeterminadas	874
	Problema Resolvido 8.7	877
	Problema Resolvido 8.8	879
	Problema Resolvido 8.9	882
	Problemas	884
	Revisão e Sumário	890
	Problemas de Revisão	896
Capítulo 9	Deflexão das Vigas pelo Método dos Momentos de Área	900
*9.1	Introdução	900
*9.2	Teoremas Relativos às Áreas do Diagrama de Momentos	901
*9.3	Aplicação a Vigas em Balanço e a Vigas com Carregamento Simétrico	905
*9.4	Superposição dos Diagramas de Momentos Fletores	909
	Problema Resolvido 9.1	915
	Problema Resolvido 9.2	917
	Problemas	919
*9.5	Vigas com Carregamento Assimétrico	928
*9.6	Deformação Máxima	932
	Problema Resolvido 9.3	935
	Problema Resolvido 9.4	938
	Problemas	940
*9.7	Vigas Estaticamente Indeterminadas	945
	Problema Resolvido 9.5	950
	Problema Resolvido 9.6	953
	Problema Resolvido 9.7	955
	Problemas	958

	Revisão e Sumário	964
	Problemas de Revisão	969
Capítulo 10	Métodos de Energia	974
10.1	Introdução	974
10.2	Trabalho de Deformação	975
10.3	Trabalho de Deformação Específico	978
10.4	Trabalho de Deformação Elástica para Tensões Normais	981
10.5	Trabalho de Deformação Elástica para Tensões de Cisalhamento	986
*10.6	Trabalho de Deformação para o Caso Geral de Tensões	990
	Problema Resolvido 10.1	994
	Problema Resolvido 10.2	996
	Problemas	998
10.7	Carregamento Produzido por Impacto	1011
10.8	Dimensionamento para Carregamento Provocado por Impacto	1015
10.9	Trabalho de Deformação Produzido por uma Única Força Aplicada	1017
10.10	Determinação da Deformação Devida a uma Única Carga Aplicada Usando Trabalho de Deformação	1021
	Problema Resolvido 10.3	1025
	Problema Resolvido 10.4	1027
	Problemas	1028
*10.11	Trabalho de Deformação para o Caso de Grande Número de Cargas Aplicadas	1037
*10.12	Teorema de Castigliano	1041
*10.13	Determinação de Deflexões pelo Teorema de Castigliano	1042
*10.14	Estruturas Estaticamente Indeterminadas	1049
	Problema Resolvido 10.5	1052
	Problema Resolvido 10.6	1055
	Problema Resolvido 10.7	1057
	Problemas	1060
	Revisão e Sumário	1067
	Problemas de Revisão	1073

Capítulo 11	Flambagem de Colunas	1078
11.1	Introdução	1078
11.2	Estabilidade das Estruturas	1079
11.3	Fórmula de Euler para Colunas com Extremidades Articuladas	1083
11.4	Fórmula de Euler Para Colunas com Outras Condições de Extremidade	1088
	Problema Resolvido 11.1	1094
	Problemas	1096
*11.5	Carga Excêntrica: a Fórmula da Secante	1108
	Problema Resolvido 11.2	1114
	Problemas	1116
11.6	Projeto de Colunas Submetidas a Carregamento Centrado ...	1120
	Problema Resolvido 11.3	1130
	Problema Resolvido 11.4	1133
	Problemas	1135
11.7	Projeto de Colunas Submetidas a Carregamento Excêntrico	1144
	Problema Resolvido 11.5	1148
	Problema Resolvido 11.6	1149
	Problema Resolvido 11.7	1150
	Problemas	1153
	Revisão e Sumário	1161
	Problemas de Revisão	1165
Apêndice A	Centróides e Momentos de Inércia	1170
A.1	Momento Estático de uma Área; Centróide de uma Área	1170
A.2	Determinação do Momento Estático e do Centróide de uma Área Composta	1175
A.3	Momento de Inércia de uma Área; Raio de Giração	1180
A.4	Teorema dos Eixos Paralelos	1185
A.5	Determinação do Momento de Inércia de uma Área Composta	1186
Apêndice B	Propriedades dos Materiais mais Usados em Engenharia	1189
Apêndice C	Propriedades dos Perfis de Aço Laminado	1191

Apêndice D	Deformação das Vigas	1198
Apêndice E	Principais Unidades SI Usadas na Mecânica	1200
Apêndice F	Centróides de Figuras Planas e Linhas	1201
Apêndice G	Momentos de Inércia de Figuras Planas	1203
Apêndice H	Unidades Usuais Inglesas e Equivalentes no Sistema Internacional (SI)	1204
	Respostas aos Principais Problemas	1206
	Índice Analítico	1245

PREFÁCIO

O principal objetivo de um curso básico de mecânica deveria ser o de desenvolver no estudante de Engenharia a habilidade de analisar um dado problema, de maneira simples e lógica, e aplicar na sua solução alguns princípios básicos e fundamentais, que tenham sido bem entendidos. Este livro é indicado para o curso inicial de Mecânica dos Materiais, ou Resistência dos Materiais, ministrado aos estudantes do segundo ou terceiro anos das escolas de engenharia. Os autores esperam que possam, do mesmo modo que em seus trabalhos anteriores, no estudo da Estática e da Dinâmica, auxiliar o professor a atingir os objetivos desejados em seu curso.

Neste livro, o estudo da Mecânica dos Materiais está baseado no entendimento de alguns conceitos básicos e no uso de modelos simplificados. Este procedimento torna possível o desenvolvimento de todas as fórmulas necessárias, de uma maneira lógica e racional, e mostra claramente as condições em que podem ser aplicadas, com segurança, na análise e no projeto de estruturas reais de engenharia e em componentes mecânicos.

Os diagramas de corpo livre são freqüentemente usados ao longo de todo o texto, para determinar forças externas e internas. O uso de figuras que mostram claramente as grandezas que aparecem nas equações e suas relações também ajudam os estudantes a entender a superposição de carregamentos e as resultantes tensões e deformações.

É necessário aos estudantes que irão utilizar este livro ter feito anteriormente um curso de Estática. Entretanto, o Capítulo 1 dá a oportunidade a uma revisão dos conceitos necessários, enquanto os diagramas de esforço cortante e momento fletor são detalhados nas Secs. 7.3 e 7.4. As propriedades de momentos e centróides de áreas são apresentados no Apêndice A; este assunto deve ser usado para reforçar a discussão sobre tensões normais e de cisalhamento nas vigas (Capítulos 4 e 5).

Os cinco primeiros capítulos do texto são destinados à análise de tensões e às deformações correspondentes, em vários membros estruturais, considerando sucessivamente carregamento axial, torção, flexão pura e carregamento transversal. Cada

análise é baseada em alguns conceitos básicos, ou seja, em condições de equilíbrio de forças exercidas sobre membros, em relações existentes entre tensões e deformações do material, e em condições impostas pelos apoios e carregamentos em cada membro.

O estudo de cada tipo de carregamento é complementado por um grande número de exemplos, problemas resolvidos passo a passo, e muitos problemas propostos, tudo isto destinado ao pleno entendimento por parte dos estudantes.

O conceito de tensão em um ponto é introduzido no Capítulo 1 onde é mostrado que uma carga axial pode produzir tensões de cisalhamento, bem como tensões normais, dependendo da seção considerada. O fato de que tensões dependem da orientação da seção em que são calculadas é novamente enfatizado nos Capítulos 3, 4 e 5, para o caso de torção, flexão pura e carregamento transversal. Entretanto, a discussão de técnicas computacionais tal como o círculo de Mohr, usado para a transformação de tensões em um ponto, é protelada até o Capítulo 6, depois de os estudantes terem resolvido problemas envolvendo uma combinação de carregamentos básicos e descoberto, por si próprios, a necessidade dessas técnicas.

Por uma razão similar, os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores são introduzidos somente no Capítulo 7, onde podem ser aplicados imediatamente no projeto de vigas e eixos. Este procedimento tem a vantagem adicional de manter a unidade da apresentação de análise de tensões¹.

Problemas estaticamente indeterminados são inicialmente discutidos no Capítulo 2 e apresentados ao longo do texto sob diferentes condições de carregamento. Portanto, os estudantes ficam expostos a um método de solução que combina a análise convencional de forças, usada na Estática, com a análise de deformações. Deste modo, eles ficarão familiarizados com este método fundamental, durante todo o curso, o que os ajudará a entender por que as tensões são estaticamente indeterminadas, e que somente podem ser calculadas considerando-se a correspondente distribuição de deformações.

O conceito de deformação plástica é apresentado no Capítulo 2, onde é aplicado na análise de peças sob a ação de carregamento axial. São também considerados problemas que envolvem deformação plástica em eixos circulares e vigas prismáticas nas seções opcionais dos Capítulos 3 e 4, respectivamente. Entretanto, ainda que parte deste assunto possa ser omitida pelo professor, sua inclusão no texto ajudará os estudantes a compreender as limitações na consideração de uma relação linear entre tensões e deformações e servirá também para alertá-los para o uso nem sempre apropriado das fórmulas de torção e flexão, deduzidas a partir de considerações de elasticidade do material.

O projeto de uma dada estrutura requer mais do que a determinação das tensões normais e de cisalhamento, em um dado elemento dessa estrutura. O projetista de uma viga, por exemplo, deve estar certo de que as tensões admissíveis não serão excedidas em nenhum ponto da viga e também de que a máxima deflexão não excederá a um certo valor preestabelecido.

¹ Entretanto, o professor que for discutir os diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores num estágio inicial pode cobrir ambas as Secs. 7.3 e 7.4, junto com o Capítulo 1; ou imediatamente antes do Capítulo 4 e resolver os Problemas 7.1 até 7.22 e 7.37 até 7.54.

No Capítulo 6, os estudantes aprenderão a determinar valores máximos de tensão normal e de cisalhamento, em um dado ponto da estrutura sujeita a qualquer combinação de carregamento considerado nos capítulos anteriores. Na primeira parte do Capítulo 7, eles determinarão os valores máximos da força cortante e do momento fletor numa viga e os correspondentes valores das tensões normais e de cisalhamento. Isto os deixará aptos para o projeto e análise de resistência de vigas e eixos, que é discutido num tópico ao final do Capítulo 7.

A determinação da deflexão em vigas é tratada nos Capítulos 8 e 9, sendo que o Capítulo 8 é voltado para o método da integração e o Capítulo 9, para o método do momento de área. A apresentação desses dois métodos em capítulos separados permite ao professor o uso de um deles, ou tratá-los em seqüência. O Capítulo 10 discute métodos de energia e o Capítulo 11, a análise e projeto de colunas.

Na primeira edição deste livro, funções de singularidades foram introduzidas numa seção opcional do Capítulo 8 e usadas como um método alternativo para a determinação de declividades e deflexões em vigas. Devido ao crescente desenvolvimento de computadores e ao fato de essas funções de singularidades serem facilmente programáveis, essas funções foram também introduzidas na Sec. 7.5 como um modo alternativo para o cálculo computacional de força cortante e de momento fletor em vigas. Essa alteração tem vantagem adicional, por permitir aos estudantes uma familiarização antecipada com funções de singularidades, e assim prepará-los para usá-las na Sec. 8.6, na determinação de declividades e deflexões. Ainda que as Secs. 7.5 e 8.6 sejam opcionais, a Sec. 8.6 só deve ser incluída se a Sec. 7.5 já tiver sido coberta.

Tópicos adicionais, tais como tensões residuais, torção em barras não-circulares e de paredes finas, flexão de vigas curvas, tensões de cisalhamento em peças assimétricas, ou com carregamento assimétrico e critérios de ruptura, foram incluídos em seções opcionais para uso em cursos que enfoquem esses pontos. Para manter a integridade dos assuntos, esses tópicos são apresentados numa seqüência própria, nos capítulos a que logicamente pertencem. Portanto, mesmo que não sejam estudados durante o curso, podem ser facilmente consultados pelos estudantes se houver necessidade, em cursos mais avançados ou na prática da engenharia. Por conveniência, todas as seções opcionais foram indicadas com asteriscos.

Cada capítulo começa com uma seção introdutória falando sobre o seu propósito e objetivo, e descrevendo com termos simples o assunto a ser discutido e sua aplicação na solução dos problemas práticos. Todo o texto foi dividido em capítulos, cada um consistindo de uma ou várias seções teóricas, seguidos por problemas resolvidos e um grande número de problemas propostos. Cada capítulo corresponde a um tópico bem definido e, em seu final, apresenta uma revisão e sumário do que nele foi tratado. Notas nos rodapés de algumas páginas foram introduzidas para ajudar os estudantes em seus trabalhos de revisão ou pesquisa, e as referências cruzadas são fornecidas para ajudá-los a encontrar partes do assunto tratado que requeiram uma atenção especial.

As seções teóricas incluem muitos exemplos destinados a ilustrar o assunto que está sendo abordado e facilitar seu entendimento. Os problemas resolvidos têm a

intenção de mostrar algumas aplicações da teoria, na solução dos problemas de engenharia, e estes foram colocados da mesma forma como os alunos devem sistematizar a solução dos problemas propostos. A maioria dos problemas são de natureza prática e devem motivar os estudantes. Eles são formulados, principalmente, para ilustrar os assuntos apresentados no texto e auxiliar os estudantes a um melhor entendimento dos princípios usados na Mecânica dos Materiais. Os problemas foram agrupados de acordo com o assunto que ilustram e colocados numa ordem crescente de dificuldade. Os problemas que requerem especial atenção estão assinalados com um asterisco.

A introdução, no currículo de engenharia, do conhecimento sobre programação computacional e a crescente disponibilidade de computadores pessoais ou terminais de rede na maioria dos campus fazem com que seja possível atualmente os estudantes de engenharia resolverem um grande número de desafiadores problemas. Nesta nova edição de *Resistência dos Materiais*, um grupo de quatro ou mais problemas foram projetados para serem resolvidos com o auxílio de um computador e foram adicionados aos problemas de revisão propostos no final de cada capítulo. O desenvolvimento de um programa necessário para resolver um dado problema levará os estudantes a dois diferentes propósitos: (1) ajudará a terem um melhor entendimento dos princípios mecânicos envolvidos; (2) fornecerá a eles uma oportunidade em aplicar, com habilidade, o seu curso de programação computacional na solução de problemas reais de engenharia.

Finalmente, os autores desejam externar sua gratidão pelos comentários e sugestões oferecidos pelos usuários da primeira edição deste livro. Especiais agradecimentos são dados ao Professor Leon Y. Baar, da Drexel University e ao Professor Paul C. Paris, da Washington University.

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston Jr.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO – CONCEITO DE TENSÃO

1.1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo do estudo da mecânica dos materiais é proporcionar ao Engenheiro os meios que o habilitem para a análise e projeto de várias estruturas de máquinas, sujeitas a diferentes carregamentos.

A análise e o projeto de uma dada estrutura implica a determinação das *tensões* e *deformações*. Neste primeiro capítulo será desenvolvido o conceito de *tensão*.

Após uma pequena introdução (Sec. 1.2), enfatizando a diferença entre *forças* e *tensões*, iremos considerar sucessivamente as *tensões normais* em membros sujeitos a carregamento axial (Sec. 1.3), as *tensões de cisalhamento* causadas pela aplicação de forças iguais e opostas (Sec. 1.4), e as *tensões de esmagamento* provocadas pelos parafusos, pinos e rebites, sobre as barras por estes conectadas (Sec. 1.5). Estes vários conceitos são aplicados na Sec. 1.6, na análise de uma estrutura simples, consistindo em barras sujeitas a cargas axiais e ligadas por pinos.

Na Sec. 1.7, onde uma barra está submetida a uma carga axial, iremos encontrar *tensão normal* e *tensão de cisalhamento*, ambas atuando sobre um *plano oblíquo*, enquanto que, na Sec. 1.8, veremos que *seis componentes de tensão* são necessárias para descrever o estado de tensão em um ponto em um corpo, sujeito a condição mais geral de carregamento.

Finalmente, nós iremos discutir na Sec. 1.9 os procedimentos de testes para a determinação da *tensão última* para um dado material e o uso do *fator de segurança* no cálculo da *carga admissível*, para um componente estrutural feito deste material.

1.2 FORÇAS E TENSÕES

Considerando a estrutura da Fig. 1.1, que consiste em barras AB e BC , nos propomos a verificar se essa estrutura pode suportar com segurança a carga de 30 kN, aplicada no ponto B .

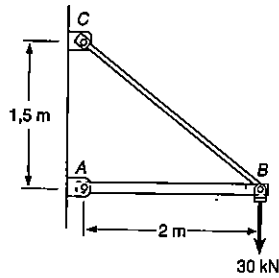


Fig. 1.1

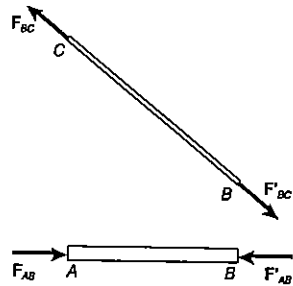


Fig. 1.2

Do nosso conhecimento de estática, deduzimos que as barras AB e BC estão sob a ação de duas forças iguais e de sentido contrário, atuando na direção do eixo da barra, aplicadas em cada uma de suas extremidades: F_{AB} e F'_{AB} de módulo F_{AB} , e F_{BC} e F'_{BC} de módulo F_{BC} (Fig. 1.2). Desenhando o diagrama de corpo livre do pino B , e compondo as forças atuantes no polígono de forças da Fig. 1.3, podemos escrever, da semelhança de triângulos:

$$\frac{F_{AB}}{4 \text{ m}} = \frac{F_{BC}}{5 \text{ m}} = \frac{30 \text{ kN}}{3 \text{ m}}$$

Obtém-se então

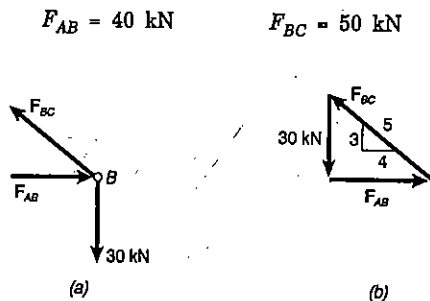


Fig. 1.3

Cortando a barra BC , por uma seção transversal, em um ponto arbitrário D , obtemos duas partes BC e CD (Fig. 1.4). Para que estas duas partes permaneçam em equilíbrio, é necessário aplicar a cada uma delas uma força de 50 kN no ponto D . Concluímos também que BC está sob efeito de tração. Da mesma maneira, podemos ver que a força na barra AB é de 40 kN, e que essa barra está sob efeito de compressão.

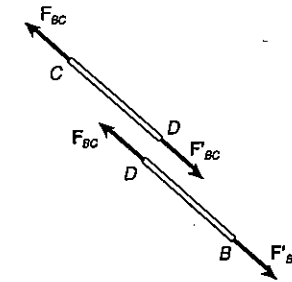


Fig. 1.4

Os resultados obtidos representam o primeiro passo na análise da estrutura, mas não nos levam à conclusão de que a carga pode ser suportada com segurança. O fato de a barra BC , por exemplo, suportar a força interna que lhe é aplicada, ou se quebrar sob a ação dessa força, não depende só do valor encontrado para o esforço interno, mas também da área da seção transversal da barra e do material com que ela foi construída. Na verdade a força interna F_{BC} realmente representa a resultante de forças elementares que se encontram distribuídas em toda a área da seção transversal da barra BC (Fig. 1.5).

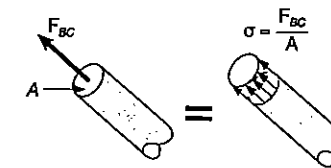


Fig. 1.5

A intensidade dessas forças distribuídas é igual à força por unidade de área F_{BC}/A , na seção transversal. O fato de a barra BC se quebrar ou não sob a ação da força F_{BC} depende, então, da capacidade do material resistir à intensidade das forças distribuídas. Em suma, a ruptura da barra depende da força F_{BC} , da área da seção transversal e das características do material que a constitui.

A força por unidade de área ou a intensidade das forças distribuídas numa certa seção transversal é chamada tensão atuante, nessa seção, e é indicada pela letra grega σ (sigma). A tensão em uma barra de seção transversal A , sujeita a uma força axial P (Fig. 1.6), é então obtida dividindo-se o módulo P da força pela área A :

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

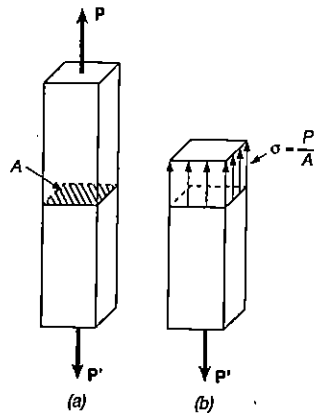


Fig. 1.6

Para indicar a tensão de tração (barras tracionadas) será usado o sinal positivo. O sinal negativo indicará tensão de compressão (barras comprimidas).

No Sistema Internacional, P é expressa em newtons (N), A em metros quadrados (m^2). A tensão σ será expressa em N/m^2 , unidade que é denominada *pascal* (Pa). Para uso prático, no entanto, o pascal se revela uma medida muito pequena (as grandezas expressas em pascal tornam-se números muito grandes). Usam-se, então, múltiplos dessa unidade, que são o quilopascal (kPa), o megapascal (MPa) e o gigapascal (GPa).

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

Quando se usam unidades inglesas, P é expressa em libras (lb) ou quilolibras (kip), e a área da seção transversal se expressa em polegadas quadradas (in^2). A tensão σ será expressa em libras por polegada quadrada (psi) ou quilolibras por polegada quadrada (ksi)¹.

Voltando ao estudo da barra BC , vamos imaginar que é constituída de aço e possui um diâmetro de 20 mm. Temos então:

$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{20 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

O valor de σ , obtido acima, deve ser comparado com o máximo valor de tensão que pode ser aplicado com segurança ao aço. Dessa comparação se deduzirá se a barra BC pode ser usada para suportar a carga de 30 kN. Através de tabelas de propriedades de materiais, descobrimos que a tensão máxima admissível para o aço utilizado é $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$. Como o valor da tensão calculado é menor que σ_{adm} , concluímos que a barra BC pode suportar com segurança a carga aplicada. Para completar a análise da estrutura, devem ser estudadas ainda a tensão de compressão na barra AB e as tensões provocadas nos pinos e nos suportes da estrutura, o que será feito mais adiante neste capítulo. Finalmente, devemos verificar se as deformações que ocorrem nas barras, pela ação do carregamento, são aceitáveis. O estudo das deformações provocadas por forças axiais é assunto do Capítulo 2.

As funções do engenheiro não se limitam à análise de estruturas ou máquinas já existentes, que devem suportar determinados carregamentos; de maior importância é o projeto de novas máquinas e estruturas, quer dizer, a escolha dos componentes estruturais adequados para as solicitações que se prevêem. Vamos, por exemplo, imaginar que na estrutura da Fig. 1.1, a barra BC deve ser de alumínio. Qual deve ser o diâmetro da barra, para suportar com segurança a carga aplicada?

Primeiramente, voltando à tabela de propriedades dos materiais, encontramos, para o alumínio a ser usado, o valor da tensão admissível igual a $\sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}$. Sabemos que a força na barra é $P = F_{BC} = +50 \text{ kN}$, pois não houve mudança de carregamento.

¹ As principais unidades do Sistema Internacional e do Sistema Inglês encontram-se no Apêndice H.

Da Equação 1.1,

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

e, como $A = \pi r^2$,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12,62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12,62 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25,2 \text{ mm}$$

Concluimos então que uma barra de alumínio de 26 mm de diâmetro será adequada para a peça BC.

1.3 FORÇAS AXIAIS; TENSÕES NORMAIS

Como já foi dito anteriormente, as forças F_{BC} e F'_{BC} , que atuam na barra BC do exemplo considerado, têm a direção do eixo da barra. Dizemos então que a barra está sob a ação de *forças axiais*. A seção transversal que passamos pelo ponto D, para a determinação das forças internas e das tensões, era perpendicular ao eixo da barra; as forças internas ficaram assim perpendiculares (normais) ao plano da seção transversal (Fig. 1.5) e as correspondentes tensões são chamadas *tensões normais*. Assim, a Fórmula 1.1 fornece a *tensão normal em uma barra sob a ação de força axial*.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

Devemos notar também que na Fórmula 1.1, σ é obtida dividindo-se a intensidade P da resultante das forças internas que atuam na seção transversal pela área A dessa seção; essa relação, no entanto representa o *valor médio* das tensões na seção transversal, e não o valor específico da tensão em um determinado ponto da seção transversal.

Para definir a tensão em um dado ponto Q da seção transversal, devemos considerar uma pequena área ΔA (Fig. 1.7).

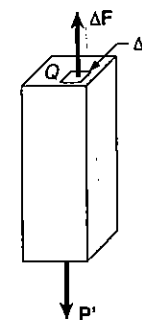


Fig. 1.7

Dividindo-se a intensidade de ΔF por ΔA , obtém-se o valor médio da tensão em ΔA . Fazendo então ΔA tender a zero, obtém-se a tensão no ponto Q :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.2)$$

De modo geral, o valor obtido para a tensão no ponto Q é diferente do valor da tensão média dado pela Fórmula 1.1, e notamos que σ varia ao longo da seção transversal. Em uma barra delgada, sujeita a forças concentradas iguais e de sentidos opostos, P e P' (Fig. 1.8a), esta variação é pequena nas seções distantes do ponto de aplicação das forças (Fig. 1.8c); porém, ela é apreciável nas imediações deste ponto (Figs. 1.8b e d).

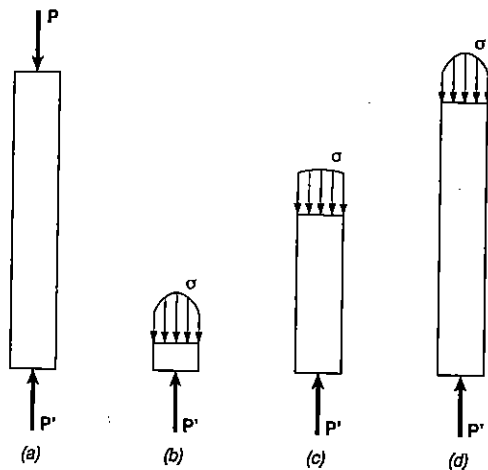


Fig. 1.8

Deduzimos da Equação 1.2 que a intensidade da resultante das forças internas distribuídas é

$$\int dF = \int_A \sigma dA$$

As condições de equilíbrio de cada uma das partes da barra, mostradas na Fig. 1.8, exigem que a intensidade da resultante se iguale ao valor P das cargas aplicadas. Assim, temos:

$$P = \int dF = \int_A \sigma dA \quad (1.3)$$

Essa expressão mostra que o volume limitado pelas superfícies que se formam em cada distribuição de tensões da Fig. 1.8 deve ser igual à intensidade P das forças aplicadas. Essa é, então, a única informação acerca da distribuição de tensões nas várias seções da barra, que a estática pode nos oferecer.

A distribuição real de tensões em uma certa seção transversal é *estaticamente indeterminada*.

Para conhecermos qualquer dado a mais sobre essa distribuição, precisamos lançar mão da consideração das deformações que resultam das diferentes maneiras de se aplicar a carga nos extremos da barra. Esse assunto será discutido no Capítulo 2.

Na prática, vamos assumir que a distribuição das tensões é uniforme em uma barra carregada axialmente, com exceção das seções nas vizinhanças do ponto de aplicação da carga. O valor σ da tensão é adotado igual ao valor da tensão média $\sigma_{méd}$ e pode ser calculado pela Fórmula 1.1.

Devemos compreender, no entanto, que quando assumimos uma distribuição uniforme de tensões, isto é, quando adotamos que as forças internas estão uniformemente distribuídas ao longo da seção, segue-se da estática elementar² que a resultante P das forças internas está aplicada no centróide da seção transversal (Fig. 1.9).

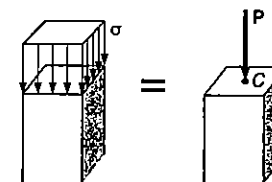


Fig. 1.9

Então, uma *distribuição uniforme de tensões só é possível se a linha de ação das forças aplicadas P e P' passar pelo centróide da seção considerada* (Fig. 1.10).



Fig. 1.10

² Ver Ferdinand P. Beer e E. Russel Johnston Jr., *Mecânica para Engenheiros*, 3ª ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 1976, ou *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, 3ª ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 1977, Secs. 5.1 e 5.2.

Este tipo de carregamento é chamado de *carga centrada* e será adotado como carregamento atuante em todas as barras de eixo reto das treliças e estruturas reticuladas (estruturas cujas barras são conectadas por pinos), como aquela da Fig. 1.1. No entanto, se uma barra é carregada axialmente, mas *excentricamente*, como mostra a Fig. 1.11a, as condições de equilíbrio de uma parte da barra (Fig. 1.11b) nos levam a concluir que as forças internas em uma certa seção transversal devem ser equivalentes à força P aplicada no centróide dessa seção, e um conjugado M , de intensidade dada pelo momento $M = P.d$. A distribuição de tensões, então, *não pode ser uniforme*, ou simétrica, como na Fig. 1.8. O Capítulo 4 discute esse caso com detalhes.

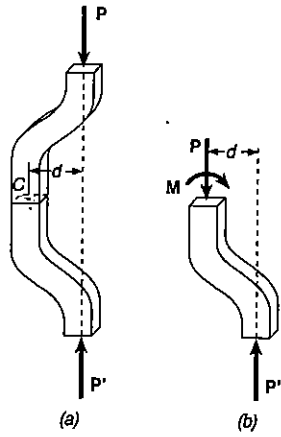


Fig. 1.11

1.4 TENSÕES DE CISALHAMENTO

As forças internas e correspondentes tensões, que foram discutidas nas seções 1.1 e 1.2, eram normais à seção transversal. Quando duas forças P e P' são aplicadas a uma barra AB , na direção transversal à barra, ocorre um tipo de tensão muito diferente (Fig. 1.12).

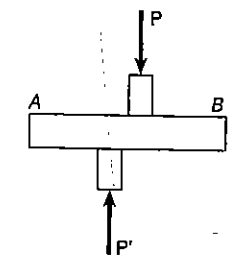


Fig. 1.12

Se passarmos uma seção transversal pelo ponto C , entre os pontos de aplicação das forças (Fig. 1.13a), podemos desenhar o diagrama da parte AC (Fig. 1.13b), e concluirmos que devem existir forças internas na seção transversal, e que sua resultante deve igualar a P . Essa resultante, de intensidade P , é chamada *força cortante* na seção. Ao dividirmos a força constante P pela área da seção transversal A , obtemos a *tensão média de cisalhamento* na seção. A tensão de cisalhamento é indicada com a letra grega τ (tau). Podemos escrever então:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} \tag{1.4}$$

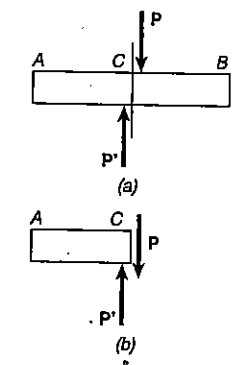


Fig. 1.13

Devemos frisar bem que o valor obtido na Fórmula 1.4 é um valor médio das tensões de cisalhamento. E, contrariamente ao que dissemos para as tensões normais, a distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal *não pode ser assumida*

como uniforme. Como se verá no Capítulo 5, o valor real da tensão de cisalhamento varia da superfície para o interior da peça, onde pode atingir valores bem superiores a $\tau_{méd}$.

A tensão de cisalhamento ocorre comumente em parafusos, rebites e pinos que ligam as diversas partes das máquinas e estruturas. Consideremos (Fig. 1.14) as duas chapas A e B, ligadas pelo rebite CD. Ao aplicarmos às chapas as forças de tração de intensidade F, aparecerão tensões na seção do rebite que corresponde ao plano EE'. Desenhando os diagramas do rebite e da parte deste que fica acima do plano EE' (Figs. 1.15a e b) concluímos que a força cortante P na seção é igual a F. A tensão de cisalhamento média na seção é obtida dividindo-se $P = F$ pela área da seção transversal A, de acordo com a Fórmula 1.4:

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (1.5)$$

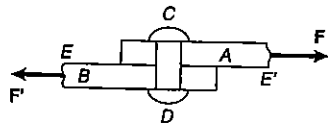


Fig. 1.14

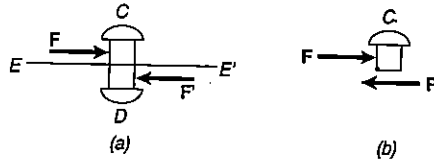


Fig. 1.15

Nas condições descritas, dizemos que o rebite está sujeito a *cisalhamento simples*. Podem surgir outras situações de carregamento. Por exemplo, se as chapas de ligação C e D são usadas para conectar as chapas A e B (Fig. 1.16), o rebite HJ poderá ser cortado nos planos KK' e LL' (do mesmo modo essa situação ocorre para o rebite EG). Nesse caso, os rebites se dizem sujeitos a *cisalhamento duplo*.

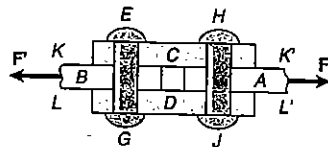


Fig. 1.16

Para determinarmos a tensão média de cisalhamento em cada plano, desenhemos os diagramas do rebite HJ e da porção entre os planos HJ e LL' (Fig. 1.17). A força cortante P em cada uma das seções é $P = F/2$, e a tensão média de cisalhamento vale:

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A} = \frac{F}{2A} \quad (1.6)$$

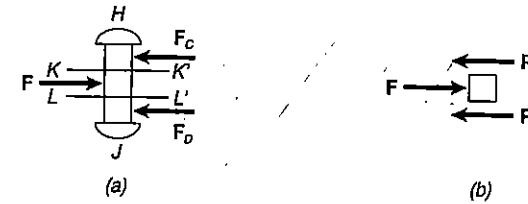


Fig. 1.17

1.5 TENSÕES DE ESMAGAMENTO

Os parafusos, pinos e rebites provocam tensões de esmagamento nas barras que estão ligando, ao longo da *superfície de contato*. Tomemos como exemplo, novamente, as chapas A e B ligadas pelo rebite CD discutidas na seção anterior (Fig. 1.14). O rebite exerce na placa A uma força P igual e de sentido contrário à força F, aplicada sobre o rebite pela placa B (Fig. 1.18). A força P representa a resultante das forças elementares que se distribuem ao longo da superfície interna do semicilindro de diâmetro d e comprimento t, igual à espessura da chapa. A distribuição das tensões ao longo dessa superfície cilíndrica é de difícil obtenção e, na prática, se utiliza um valor nominal médio para a tensão. A esse valor nominal dá-se o nome de *tensão de esmagamento* σ_E . Obtém-se σ_E dividindo-se a força P pela área do retângulo que representa a projeção do rebite sobre a seção da chapa (Fig. 1.19). Essa área é igual a $t \cdot d$, onde t é a espessura da chapa, e d é o diâmetro do rebite.

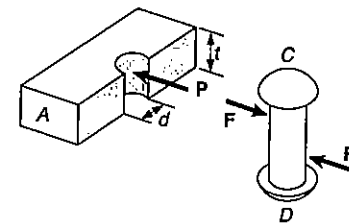


Fig. 1.18

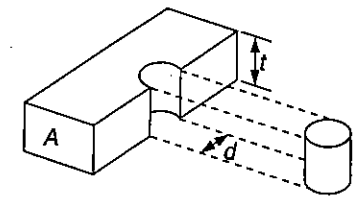


Fig. 1.19

Temos:

$$\sigma_E = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (1.7)$$

1.6 APLICAÇÕES NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SIMPLES

Estamos agora em condições de determinar as tensões nos membros e ligações de algumas estruturas simples bidimensionais.

a) **Determinação das tensões normais nas barras com força axial:** O primeiro passo consiste na determinação da força em cada uma das barras. No caso da estrutura estudada na Sec. 1.1, isto pode ser feito pelas considerações de equilíbrio de apenas um ponto, ou nó. Em problemas mais complexos, é necessário considerar, inicialmente, o diagrama de corpo livre da estrutura toda, determinando as reações nos apoios através das três equações de equilíbrio para um corpo rígido,

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (1.8)$$

onde A é um ponto qualquer do plano que contém a estrutura. As forças atuantes nas barras podem então ser determinadas, analisando-se as condições de equilíbrio de cada nó³. Em alguns casos, pode ser vantajoso desenhar o diagrama de corpo livre de uma parte da estrutura, estudando as equações de equilíbrio (1.8) para essa parte⁴. Se as barras da estrutura estiverem sob ação de várias forças, as equações (1.8) podem ser desenvolvidas para cada barra⁵.

Como vimos na Sec. 1.1, para uma barra sujeita à ação de uma força centrada, a tensão normal σ pode ser obtida do quociente entre a força P e a área da seção transversal da barra. Quando a seção transversal é variável ao longo da barra, a maior tensão ocorre na seção transversal de menor área.

Tomando como exemplo a estrutura da Fig. 1.1, vamos especificar que a barra circular BC , de 20 mm de diâmetro, tem extremidades achatadas com seção transversal retangular de 20 por 40 mm (Fig. 1.20). Especifiquemos, também para a barra AB , uma seção transversal retangular, constante ao longo da barra, de 30 mm por

3 Ver Beer e Johnston, *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, cit., Secs. 4.1 a 4.4 e 6.4, ou *Mecânica para Engenheiros*, cit., Secs. 3.12 a 3.14 e 6.4.

4 V. ainda, Beer e Johnston, *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, cit., Sec. 6.7, ou *Mecânica para Engenheiros*, cit., Sec. 6.8.

5 V. Beer e Johnston, *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, cit., Secs. 6.9, a 6.11 ou *Mecânica para Engenheiros*, cit., Secs. 6.10 a 6.12.

50 mm. Na extremidade B , a barra AB divide-se em duas partes, permitindo o encaixe da barra BC . As duas barras se ligam em B , por intermédio de um pino, de onde fica suspensa a carga de 30 kN. No ponto A , um pino liga a barra AB ao apoio, que consiste em um encaixe entre duas chapas. No ponto C , um pino liga a barra BC ao apoio, que consiste em uma placa única. Os pinos têm 25 mm de diâmetro (Fig. 1.20).

Como calculamos na Sec. 1.1, a força atuante na barra BC é $F_{BC} = 50$ kN, e a área de sua seção transversal é $A = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$; a tensão normal média correspondente é $\sigma_{BC} = +159$ MPa.

No entanto, as extremidades achatadas da barra também estão sob tensão. Se tomarmos a menor seção transversal, no ponto onde a barra é furada para a passagem do pino, temos:

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

O valor médio da tensão nesse ponto é:

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 167 \text{ MPa}$$

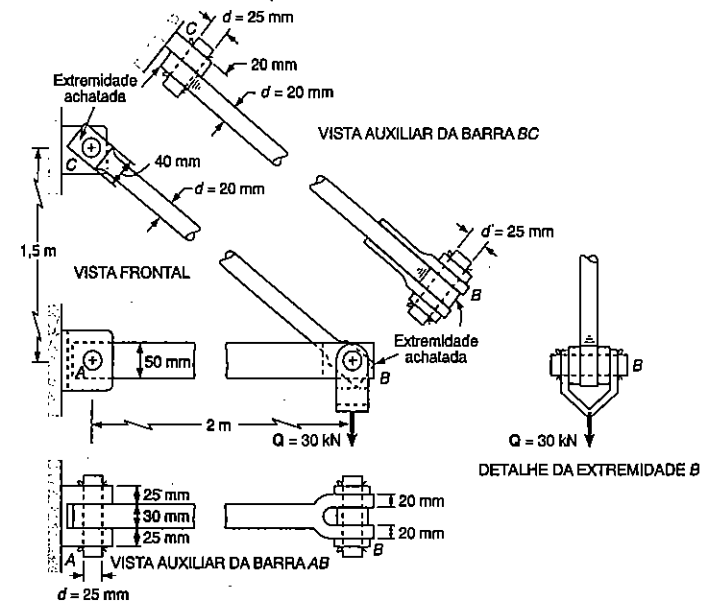


Fig. 1.20

Este é um valor médio; como veremos adiante, na Sec. 2.17, próximo ao furo o valor da tensão é bem maior. Fica claro que, sob a ação de uma carga crescente, a barra vai se romper num ponto próximo a um dos furos, e não na parte cilíndrica. No seu projeto, então, deve-se providenciar uma majoração da altura ou da espessura da parte achatada.

Voltando nossa atenção, agora, para a barra AB, sabemos que ela está sendo comprimida pela ação da força $F_{AB} = 40 \text{ kN}$. Como a área da seção transversal da barra é $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, o valor da tensão média, na parte principal da barra, entre os pontos A e B é:

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26,7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26,7 \text{ MPa}$$

Devemos notar que as seções transversais de menor área, em A e B, não estão sujeitas a nenhuma tensão, uma vez que a barra está comprimida e, portanto, empurra os pinos (ao invés de puxar os pinos, como faz a barra BC).

b) Determinação das tensões de cisalhamento nas ligações: Para a determinação da tensão de cisalhamento em um conector, como parafuso, pino ou rebite, devemos especificar claramente as forças que são aplicadas pelas várias peças ligadas por ele. Assim, no caso do pino C de nosso exemplo (Fig. 1.21a), desenhamos o diagrama da Fig. 1.21b que mostra a força de 50 kN aplicada ao pino pela barra BC, e a força igual e oposta, aplicada pela chapa de ligação. Se desenharmos agora o diagrama da parte do pino abaixo do plano DD', vemos que a força cortante nesse plano é $P = 50 \text{ kN}$.

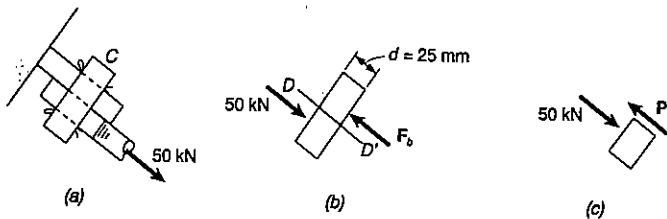


Fig. 1.21

A área da seção transversal é:

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (12,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

e calculamos a tensão média de cisalhamento nesta seção, que é:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102 \text{ MPa}$$

Vamos considerar agora que o pino A. A Fig. 1.22 mostra que ele se encontra sujeito a corte duplo. Desenhamos os diagramas do pino e da porção dele situada entre os planos DD' e EE', onde ocorre o corte. Nesse caso concluímos que $P = 20 \text{ kN}$, e:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40,7 \text{ MPa}$$

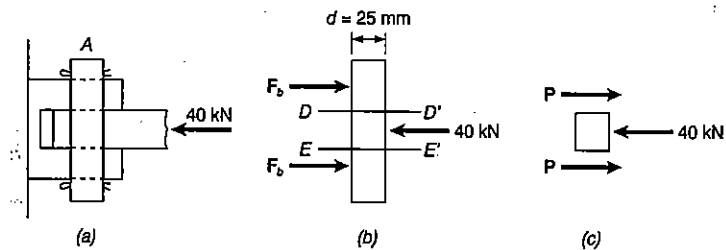


Fig. 1.22

Devemos ainda analisar o pino no ponto B. Na Fig. 1.23a, vemos que o pino pode ser dividido em cinco porções pelas forças exercidas pelas barras BC, AB (que se dividem em duas partes) e pela chapa dobrada que sustenta a carga aplicada. Considerando sucessivamente as partes DE e DG (Figs. 1.23b e c), concluímos que a força cortante em E é $P_E = 15 \text{ kN}$, e a força cortante em G é $P_G = 25 \text{ kN}$. O carregamento do pino é simétrico, donde afirmamos que a maior força cortante é $P_G = 25 \text{ kN}$. Com esse valor, calculamos a maior tensão de cisalhamento no pino, que é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50,9 \text{ MPa}$$

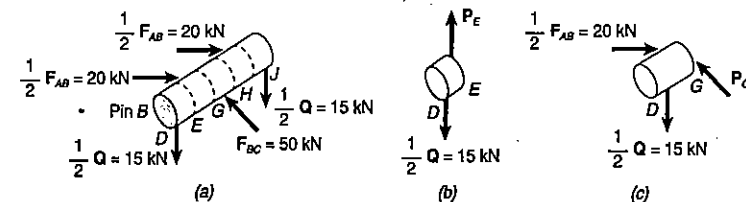


Fig. 1.23

c) **Determinação das tensões de esmagamento:** Para a determinação da tensão normal de esmagamento no ponto A da barra AB, utilizamos a Fórmula 1.7 da Sec. 1.4. A Fig. 1.20 fornece os valores $t = 30$ mm e $d = 25$ mm. Como $P = F_{AB} = 40$ kN, temos:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53,3 \text{ MPa}$$

Para calcularmos a tensão de esmagamento nas chapas de ligação, em A usamos $t = 2(25 \text{ mm}) = 50$ mm e $d = 25$ mm.

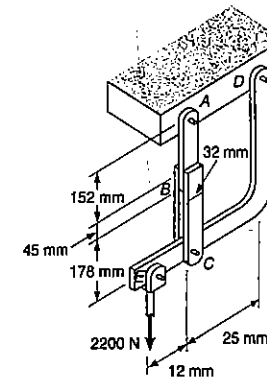
$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32,0 \text{ MPa}$$

As tensões de esmagamento nos pontos B e C, para as barras AB e BC, são calculadas de maneira idêntica.

PROBLEMA RESOLVIDO 1.1

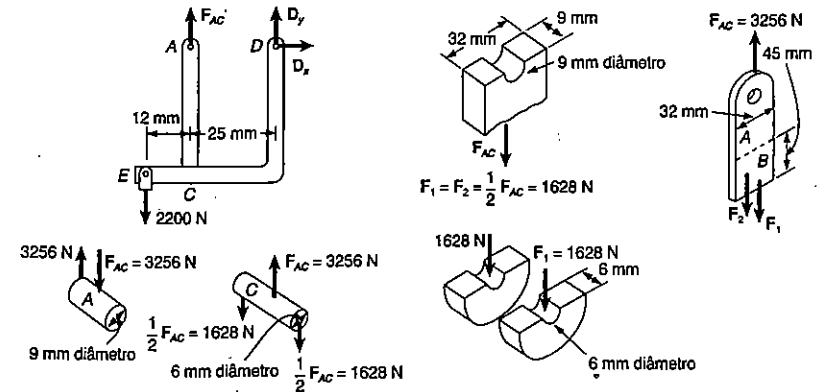
No suporte da Fig. 1.1, a haste ABC tem, na parte superior, 9 mm de espessura, e na parte inferior, 6 mm de espessura de cada lado. Uma resina a base de epoxy é usada para colar as partes superior e inferior da haste, no ponto B. Os pinos no ponto A e C têm 9 mm e 6 mm de diâmetro, respectivamente. Pede-se determinar:

- A tensão de cisalhamento no pino A.
- A tensão de cisalhamento no pino C.
- A maior tensão normal na haste ABC.
- A tensão média de cisalhamento nas superfícies coladas no ponto B.
- A tensão de esmagamento na haste em C.



Corpo livre: Todo o suporte. Desde que a barra ABC é um membro de duas forças, a reação em A é vertical. A reação em D é representada por suas componentes D_x e D_y . Podemos escrever:

$$\begin{aligned} +) \Sigma M_D = 0 & \quad (2.200 \text{ N})(37 \text{ mm}) - F_{AC}(25 \text{ mm}) = 0 \\ F_{AC} = 3256 \text{ N} & \quad F_{AC} = 3256 \text{ N tração} \end{aligned}$$



a) **Tensão de cisalhamento no pino A:** O pino está sujeito a cisalhamento simples, e podemos escrever:

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3256 \text{ N} \times 10^{-6}}{1/4 \pi (9 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 51,2 \text{ MPa}$$

b) **Tensão de cisalhamento no pino C:** O pino está sujeito a cisalhamento duplo. Podemos escrever:

$$\tau_C = \frac{1/2 F_{AC}}{A} = \frac{1628 \text{ N} \times 10^{-6}}{1/4 \pi (6 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 57,6 \text{ MPa}$$

c) **Tensão normal máxima na haste ABC:** No ponto A, a haste tem menor área de seção transversal, devido ao furo para passagem do pino de 9 mm. Nesse ponto temos a haste com altura de $(32 - 9) = 23 \text{ mm}$, e:

$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3256 \text{ N} \times 10^{-6}}{(9 \times 10^{-3} \text{ m})(23 \times 10^{-3} \text{ m})} = 15,7 \text{ MPa}$$

d) **Tensão de cisalhamento média no ponto B:** As duas faces da parte superior da haste estão coladas à parte inferior. Assim, a força de corte em cada face é $F_1 = 325 \text{ N}/2 = 1628 \text{ N}$. A tensão de cisalhamento médio em cada face é:

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{1628 \text{ N} \times 10^{-6}}{(32 \times 10^{-3} \text{ m})(45 \times 10^{-3} \text{ m})} = 1,13 \text{ MPa}$$

e) **Tensão de esmagamento da haste no ponto C:** Para cada parte da haste, $F_1 = 1628 \text{ N}$, e a área nominal para esmagamento é $(6 \text{ mm})(6 \text{ mm}) = 36 \text{ mm}^2$.

$$\tau_{EC} = \frac{F_1}{A} = \frac{1628 \text{ N} \times 10^{-6}}{36 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 45,22 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS

1.1 e 1.2 Duas barras cilíndricas maciças são soldadas no ponto B como indicado. Determine a tensão normal no ponto médio de cada barra.

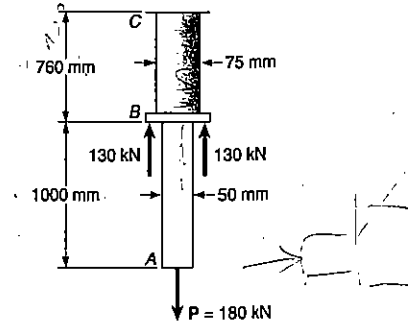


Fig. P1.1

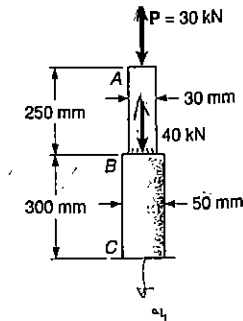


Fig. P1.2

1.3 No Prob. 1.2, determine a intensidade da força P para que a tensão normal seja a mesma em ambas as barras.

1.4 No Prob. 1.1, determine a intensidade da força P, para que a tensão de tração na barra AB tenha a mesma intensidade que a tensão de compressão na barra BC.

1.5 A carga axial na coluna, que sustenta a viga de madeira mostrada, é de 100 kN. Determine o comprimento l da placa de apoio para que a tensão de esmagamento média na madeira seja de 2,8 MPa.

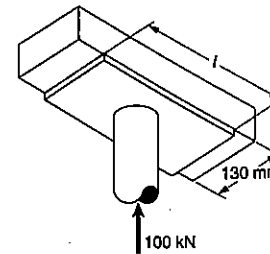


Fig. P1.5

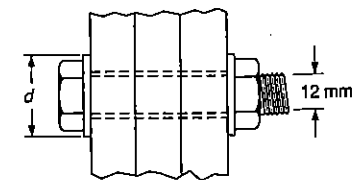


Fig. P1.6

1.6 Três pranchas de madeira são unidas por uma série de parafusos, formando uma coluna. O diâmetro de cada parafuso é de 12 mm, e o diâmetro interno de cada arruela é de 15 mm, que é ligeiramente maior que os furos das pranchas. Sabendo-se que o diâmetro externo de cada arruela é $d = 30 \text{ mm}$, e que a tensão de esmagamento média entre as arruelas e as pranchas não deve exceder a 5 MPa, determine a máxima tensão normal admissível em cada parafuso.

1.7 Para a estrutura do Prob. 1.6, determine o diâmetro externo d necessário para as arruelas, sabendo-se que a tensão normal axial em cada parafuso é de 20 MPa e que a tensão normal de esmagamento média entre as arruelas e as pranchas não deve exceder a 5 MPa.

1.8 Uma carga axial P é suportada por uma pequena coluna W250 x 80, de seção transversal igual a $A = 10.200 \text{ mm}^2$ e é transmitida a uma fundação de concreto por uma placa quadrada de 450 mm, como mostrado. Sabendo-se que a tensão normal média na coluna não poderá exceder 248 MPa, e que a tensão de esmagamento média sobre a fundação de concreto não poderá exceder 13,8 MPa, determine a máxima carga P admissível.

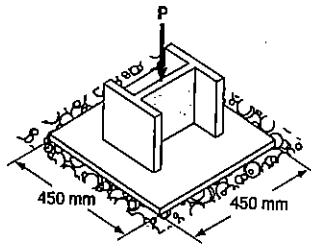


Fig. P1.8

1.9 e 1.10 Sabendo-se que a haste de ligação BD tem uma seção transversal uniforme, de área igual a 800 mm^2 , determine a intensidade da carga P para que a tensão normal na haste BD seja 50 MPa.

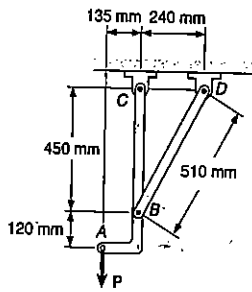


Fig. P1.9

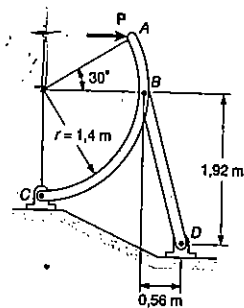


Fig. P1.10

1.11 A haste de ligação AC tem uma seção transversal retangular uniforme de 3,2 mm de espessura e 25,4 mm de largura. Determine a tensão normal na porção central da haste, quando $\alpha = 0^\circ$.

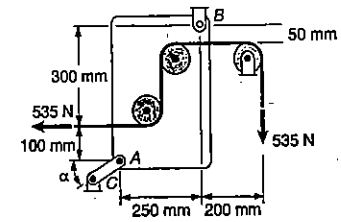


Fig. P1.11

1.12 Resolva o Prob. 1.11, assumindo que $\alpha = 90^\circ$.

1.13 Cada uma das quatro hastes verticais, ligadas às duas barras horizontais, tem uma seção transversal retangular uniforme de $10 \times 40 \text{ mm}$ e os pinos tem diâmetro de 14 mm. Determine o máximo valor da tensão normal média, causada pela carga de 24 kN, nas hastes conectadas pelos (a) pontos B e E ; (b) pontos C e F .

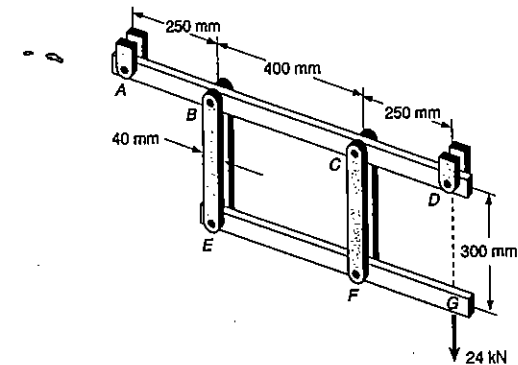


Fig. P1.13

1.14 Resolver o Prob. 1.13, assumindo que a carga de 24 kN é orientada para cima.

1.15 Cada uma das hastes de ligação AB e CD tem uma seção transversal retangular uniforme de $6,3 \times 25,4$ mm e está ligada à barra horizontal BCE por pinos de diâmetro igual a $25,4$ mm. Considerando que a tensão normal média de ambas as hastes não exceda a 170 MPa, determine a máxima carga que pode ser aplicada no ponto E , se esta carga é dirigida (a) verticalmente para baixo; (b) verticalmente para cima.

12,7 mm

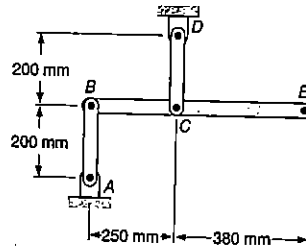


Fig. P1.15

1.16 Duas cargas verticais são aplicadas ao pino B da montagem indicada. Sabendo-se que o diâmetro do pino usado em cada ligação é de $15,2$ mm, determine o valor máximo da tensão normal média na (a) haste AB ; (b) haste BC .

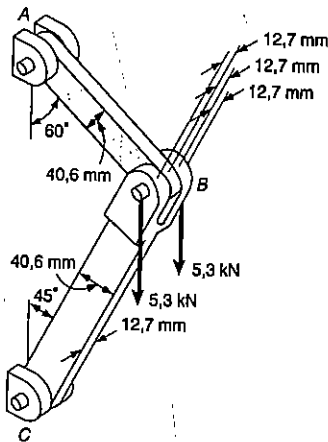


Fig. P1.16

1.17 Para a treliça e carregamento mostrado, determine a tensão normal na barra BD . Sabe-se que a área da seção transversal da barra é de 1.290 mm².

1.18 Determine a menor área admissível para a seção transversal da barra DE da treliça mostrada, se para o carregamento dado, a tensão normal nesta barra não deve ultrapassar 138 MPa.

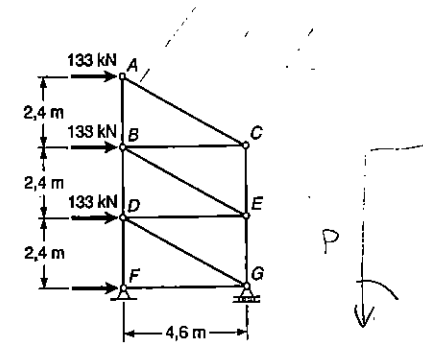


Fig. P1.17 e P1.18

1.19 Determine a menor área admissível para a seção transversal da barra DE da treliça mostrada se para o carregamento dado, a tensão normal nesta barra não deve ultrapassar 200 MPa.

1.20 Para a treliça e carregamento mostrado, determine a tensão normal na barra AD . Sabe-se que a área da seção transversal da barra é de 1.200 mm².

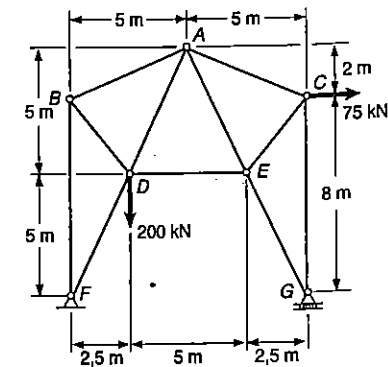


Fig. P1.19 e P1.20

1.21 Sabendo-se que a haste de ligação *DE* tem 25,4 mm de largura e 3,2 mm de espessura, determine a tensão normal na porção central desta haste quando $\theta = 0^\circ$.

1.22 Sabendo-se que a haste de ligação *DE* tem 25,4 mm de largura e 3,2 mm de espessura, determine a tensão normal na porção central desta haste, quando $\theta = 90^\circ$.

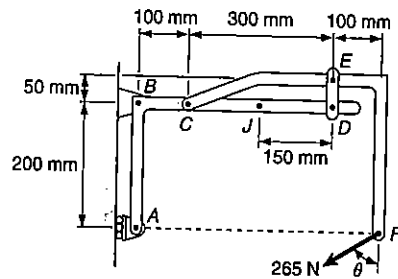


Fig. P1.21 e P.122

1.23 Uma barra-reboque para avião é posicionada por meio de um cilindro hidráulico, ligado a uma barra cilíndrica de aço com 25 mm de diâmetro, que aciona dois braços *DEF* idênticos, com rodas. O peso total da barra-reboque é de 2 kN, e seu centro de gravidade está localizado em *G*. Para a posição mostrada, determine a tensão normal nessa barra cilíndrica.

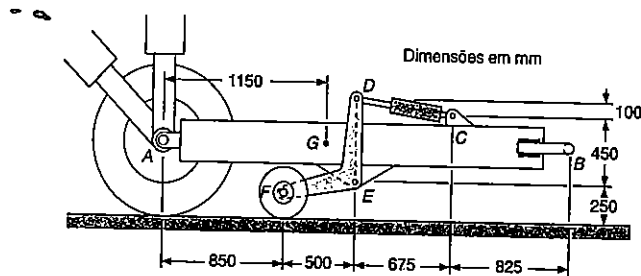


Fig. P1.23

1.24 No guindaste marítimo, a barra de ligação *CD* tem uma seção transversal uniforme de 50 x 150 mm. Para o carregamento mostrado, determine a tensão normal na parte central desta barra.

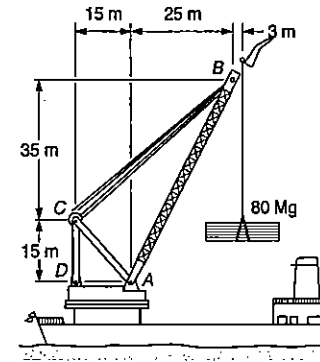


Fig. P1.24

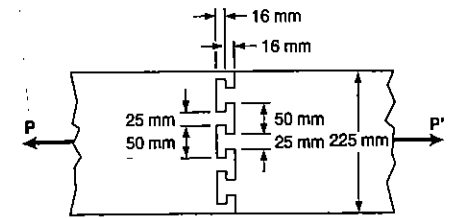


Fig. P1.25

1.25 Duas pranchas de madeira, cada uma com 12,7 mm de espessura e 230 mm de largura, são unidas por uma respiga de união seca, como indicado. Sabendo-se que a madeira utilizada impede o cisalhamento ao longo das fibras enquanto a tensão de cisalhamento média não atinge 8,3 MPa, determine a intensidade da carga axial *P*, que irá causar falha nesta junta.

1.26 Duas pranchas de madeira, cada uma com 15 mm de espessura e 200 mm de largura, são unidas por uma respiga de união colada, como indicado. Sabendo-se que esta junta irá falhar, quando a tensão de cisalhamento média na cola atingir 900 kPa, determine o comprimento necessário *d*, se a junta deve resistir a uma carga axial de intensidade $P = 4$ kN.

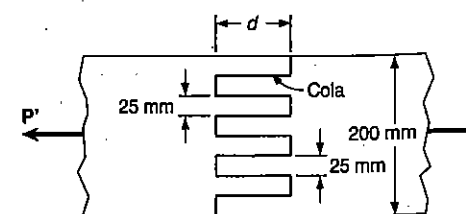


Fig. P1.26

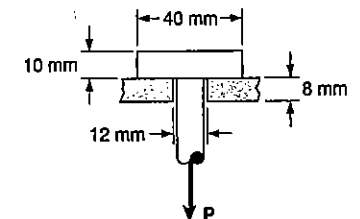


Fig. P1.27

1.27 A carga P está aplicada na barra cilíndrica de aço, como indicado, e apóia-se sobre uma placa de alumínio com furo de 12 mm de diâmetro, feito por uma broca. Sabendo-se que a máxima tensão de cisalhamento é de 180 MPa para o aço e 70 MPa para o alumínio, determine a maior carga que poderá ser aplicada à barra de aço.

1.28 Determine o maior diâmetro do furo que pode ser puncionado numa placa de poliestireno com 6,35 mm de espessura, sabendo-se que a força exercida pela punção é de 44,5 kN e que é necessária uma tensão de cisalhamento média de 55,2 MPa para causar falha do material.

1.29 Para a montagem e o carregamento do Prob. 1.13, determine: (a) a tensão de cisalhamento média no pino B; (b) a tensão de esmagamento em B, na barra de ligação BE; (c) a tensão de esmagamento em B, na barra ABCD, sendo que esta barra tem uma seção transversal retangular de 15 x 50 mm.

1.30 Para a montagem e o carregamento do Prob. 1.13, determine: (a) a tensão de cisalhamento média no pino C; (b) a tensão de esmagamento em C, na barra de ligação CF; (c) a tensão de esmagamento em C, na barra ABCD, sendo que esta barra tem uma seção transversal retangular de 15 x 50 mm.

1.31 Para a montagem e o carregamento do Prob. 1.16, determine: (a) a tensão de cisalhamento média no pino A; (b) a tensão de esmagamento em A, na barra AB.

1.32 Para a montagem e o carregamento do Prob. 1.16, determine: (a) a tensão de cisalhamento média no pino C; (b) a tensão de esmagamento em C, na barra AB; (c) a tensão de esmagamento em B, na barra.

1.7 TENSÕES EM UM PLANO OBLÍQUO AO EIXO

Nas seções anteriores, vimos que forças axiais aplicadas a uma barra causavam tensões normais, enquanto forças transversais aplicadas a rebites e pinos causavam tensões de cisalhamento (Figs. 1.24 e 1.25). Observamos essa dependência entre as tensões normais e forças axiais, tensões de cisalhamento e forças transversais, devido ao fato de termos analisado as tensões sempre em planos normais aos eixos das barras e pinos. Vamos verificar agora que forças axiais causam ao mesmo tempo tensões normais e de cisalhamento em planos que não são perpendiculares ao eixo da peça. Do mesmo modo, forças transversais aplicadas a um pino causam tensões normais e de cisalhamento nos planos oblíquos ao eixo do pino.

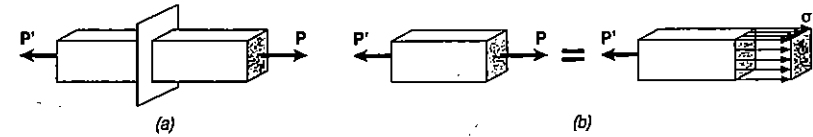


Fig. 1.24

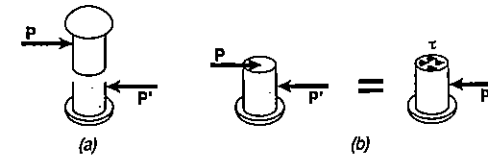


Fig. 1.25

Consideremos a barra da Fig. 1.24, sujeita à ação das forças axiais P e P' . Se cortarmos a barra por um plano que forma um ângulo θ com o plano normal, e desenharmos o diagrama de corpo livre da parte à esquerda da seção, veremos que as forças distribuídas, atuando na seção, devem ser equivalentes a P (Figs. 1.26a e 1.26b).

Decompondo P em suas componentes F e V , respectivamente normal e tangencial ao plano da seção, podemos escrever (Fig. 12.6c)

$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta \quad (1.9)$$

A força F representa a resultante de forças internas distribuídas normais à seção, e V é a força cortante, resultante das forças distribuídas tangenciais (Fig. 1.26d). Podemos agora calcular a tensão média normal e de cisalhamento considerando a área A_θ da seção:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta} \quad (1.10)$$

Chamando A_0 a área da seção normal ao eixo temos que $A_0 = A_\theta \cos \theta$, ou $A_\theta = A_0 / \cos \theta$ (Fig. 1.26c). Substituindo (1.9) em (1.10) para F e V . Obtemos:

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} \quad \tau = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} \quad (1.11)$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

Podemos observar, através da 1ª equação, que a máxima tensão normal σ ocorre para $\theta = 0$, ou seja, quando a seção transversal é perpendicular ao eixo, tendendo a zero quando θ se aproxima de 90° . Assim, para $\theta = 0$, achamos:

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad (1.12)$$

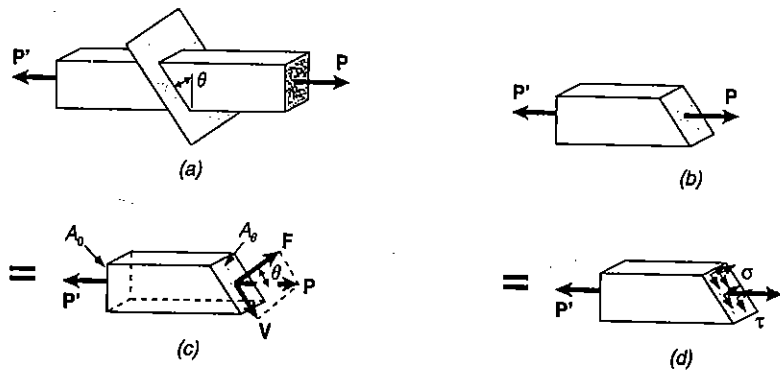


Fig. 1.26

como foi visto na Sec. 1.2. A segunda das Equações 1.11 mostra, também, que a tensão de cisalhamento σ é nula para $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$ e que para $\theta = 45^\circ$ ela atinge seu valor máximo

$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (1.13)$$

A primeira das Equações 1.11 mostra que para $\theta = 45^\circ$, a tensão normal σ' é também igual a $P/2A_0$:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0} \cos^2 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (1.14)$$

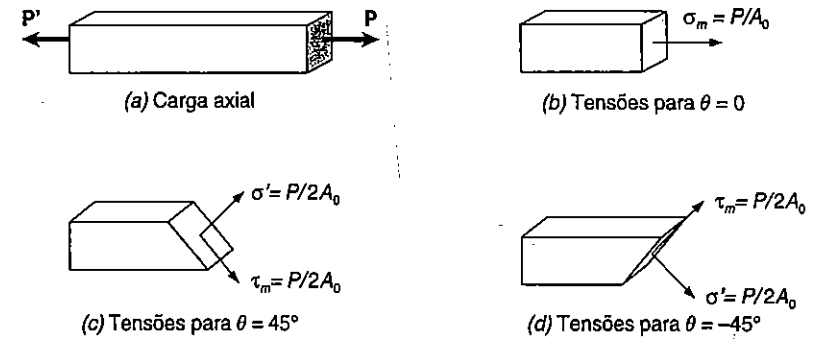


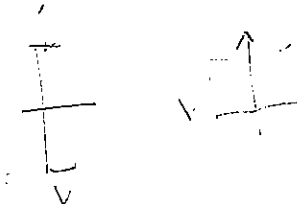
Fig. 1.27

Os resultados obtidos são evidenciados na Fig. 1.27. Vemos então que o mesmo carregamento pode produzir tensão normal $\sigma_m = P/A_0$ sem nenhuma tensão de cisalhamento, ou tensões normal e de cisalhamento de mesmo valor $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$, dependendo da orientação da seção estudada.

1.8 TENSÕES PARA UM CASO DE CARREGAMENTO QUALQUER; COMPONENTE DE TENSÕES

Os exemplos já vistos se limitaram a analisar barras sujeitas a carregamento axial e conectores sujeitos a cargas transversais. No entanto, a maior parte das peças de estruturas e componentes de máquinas se encontra sob a ação de carregamento mais complexa.

Consideremos um corpo onde estão aplicadas várias forças P_1, P_2 etc. (Fig. 1.8). Vamos estudar as condições de tensões em um certo ponto Q do interior do corpo, causadas pelo carregamento. Para isso, passamos uma seção pelo ponto Q , por intermédio de um plano paralelo ao plano yz . A porção do corpo que fica à esquerda da seção está sujeita à ação de algumas das forças aplicadas inicialmente e das forças normais e cortantes distribuídas na seção.



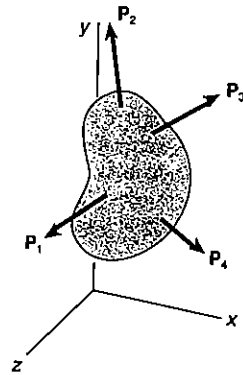


Fig. 1.28

Tomemos um elemento de área ΔA , que contém o ponto Q . Vamos designar por ΔF^x e ΔV^x , respectivamente, as forças normal e cortante que agem nas áreas ΔA (Fig. 1.29a). O índice superior x indica que as forças ΔF^x e ΔV^x agem em uma superfície perpendicular ao eixo x . A força normal ΔF^x tem sua direção bem definida, mas a força cortante ΔV^x pode ter qualquer direção no plano da seção. Vamos então decompor ΔV^x nas suas componentes ΔV_y^x e ΔV_z^x , nas direções paralelas aos eixos y e z , respectivamente, como mostra a Fig. 1.29b. Se dividirmos agora a intensidade de cada força pela área ΔA , fazendo ΔA tender a zero, definiremos as três componentes das tensões mostradas na Fig. 1.30:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \quad (1.15)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

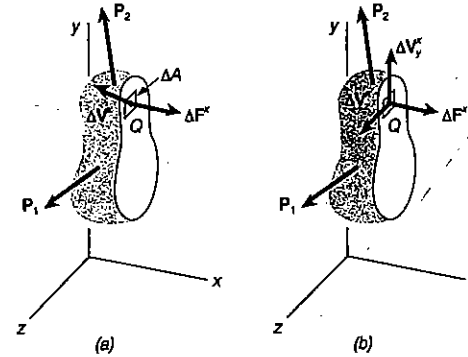


Fig. 1.29

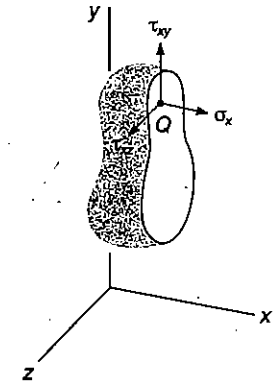


Fig. 1.30

Usamos o primeiro índice em σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} para indicar que as tensões consideradas agem em uma superfície perpendicular ao eixo x . O segundo índice serve para indicar a direção da componente. A tensão normal σ_x é positiva se o sentido do vetor que a representa coincide com o sentido do eixo x . Assim σ_x será positiva quando o corpo estiver sendo tracionado e negativa em caso contrário. Do mesmo modo, as componentes da tensão de cisalhamento, τ_{xy} e τ_{xz} , serão consideradas positivas quando seus correspondentes vetores tiverem sentido coincidente com o sentido positivo do eixo y ou z .

A mesma análise pode ser feita se tomarmos a porção direita do corpo dividido pelo plano vertical (Fig. 1.31). As tensões obtidas serão de mesma intensidade, mas de sentidos contrários, em relação ao caso estudado acima. A seção transversal está voltada para o lado negativo do eixo x , de modo que σ_x terá sinal positivo quando seu vetor tiver sentido contrário ao do eixo x . Do mesmo modo, τ_{xy} e τ_{xz} serão positivas quando seus correspondentes vetores tiverem sentido contrário ao sentido positivo do eixo y ou z (Fig. 1.31).

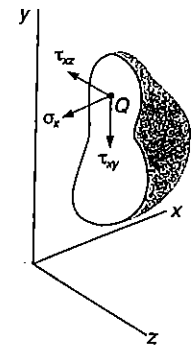


Fig. 1.31

Se passarmos pelo ponto Q uma seção paralela ao plano xz , definiremos as componentes σ_y , τ_{yz} e τ_{yx} . Ao passarmos pelo ponto Q uma seção paralela ao plano xy obteremos as componentes σ_z , τ_{zx} e τ_{zy} .

Para facilitar a visualização do estado de tensões no ponto Q , vamos considerar um pequeno cubo de lado a , com centro no ponto Q , juntamente com as tensões que atuam em cada uma das seis faces do cubo (Fig. 1.32). As componentes que aparecem na figura são as tensões normais σ_x , σ_y e σ_z , que atuam nas faces perpendiculares aos eixos x , y e z respectivamente, e as seis componentes das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} etc. Lembramos, da definição de componentes das tensões de cisalhamento, que τ_{xy} representa a componente y da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo x , do mesmo modo que τ_{yx} representa a componente x da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo y . Nas três faces do cubo que não são visíveis, ocorrem tensões iguais e de sentidos opostos. As tensões atuantes nas faces do cubo diferem pouco daquelas que agem no ponto Q , e o erro cometido é pequeno, desaparecendo quando o lado a do cubo tende a zero.

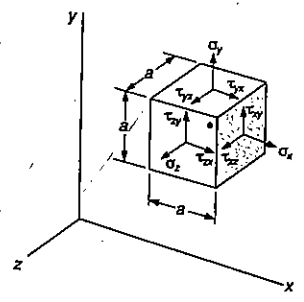


Fig. 1.32

Vamos agora deduzir algumas relações importantes entre as componentes das tensões de cisalhamento. Considerando o diagrama de corpo livre do cubo centrado em Q (Fig. 1.33), podemos obter as forças normais e cortantes nas várias faces, multiplicando as componentes das tensões pela área de cada face. Considerando um sistema de eixos coordenado com origem no ponto Q , podemos escrever as seis equações de equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (1.16)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (1.17)$$

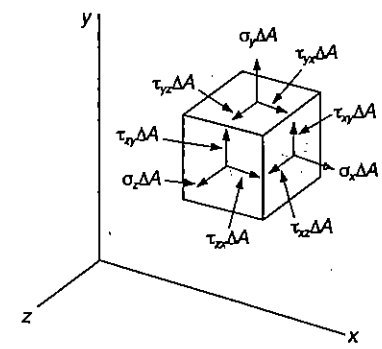


Fig. 1.33

Sabemos que nas faces não visíveis do cubo na Fig. 1.33 agem forças iguais e de sentido contrário às indicadas, o que satisfaz às Equações 1.16. Analisando as Eqs. 1.17, vamos considerar em primeiro lugar a terceira das equações, $\Sigma M_z = 0$. Usando uma projeção no plano xy (Fig. 1.34), podemos ver que somente as forças cortantes têm momento diferente de zero, em relação ao eixo z . Elas formam dois conjugados, um deles com momento positivo, contrário ao giro dos ponteiros de um relógio, de valor $(\tau_{xy} \Delta A)a$, e o outro negativo, no sentido dos ponteiros do relógio, de valor $-(\tau_{yx} \Delta A)a$. Escrevemos então:

$$+) \Sigma M_z = 0: \quad (\tau_{xy} \Delta A)a - (\tau_{yx} \Delta A)a = 0$$

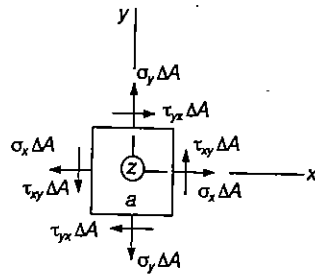


Fig. 1.34

de onde podemos concluir que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.18}$$

Essa relação mostra que a componente y da tensão de cisalhamento que atua em uma face perpendicular ao eixo x é igual à componente x da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo y . Das outras duas Equações 1.17, deduzimos, da mesma maneira, as seguintes relações:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.19}$$

As Equações 1.18 e 1.19 mostram que são necessárias apenas seis componentes para definir o estado de tensões em um certo ponto Q , e não nove componentes, como adotamos inicialmente. Essas seis componentes são $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. É fácil ver também que a tensão de cisalhamento não ocorre em apenas um plano, mas sempre haverá, em um plano perpendicular ao primeiro, a atuação de uma tensão de cisalhamento de igual valor.

Consideremos como exemplo o rebite da Fig. 1.25, analisando um pequeno cubo no centro Q do rebite (Fig. 1.35a). Vemos que tensões de cisalhamento de mesmo valor devem ocorrer nas duas faces horizontais e nas duas faces que são perpendiculares às forças P e P' (Fig. 1.35b).

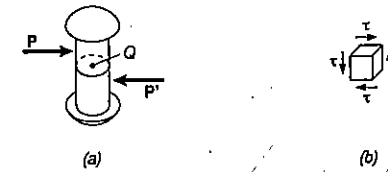


Fig. 1.35

Antes de finalizarmos nossa discussão sobre as componentes de tensões, vamos considerar mais uma vez o caso de uma peça submetida a carregamento axial. Se considerarmos o pequeno cubo com suas faces paralelas às faces da peça, e recordarmos os resultados da Sec. 1.6, veremos que o estado de tensões na peça é aquele mostrado na Fig. 1.36a; nas faces perpendiculares ao eixo da peça atua unicamente a tensão normal σ_x (o eixo da peça é o eixo x). Entretanto, se o cubo for girado em redor do eixo z , de um ângulo de 45° , até que a orientação de suas faces coincida com aquela das Figs. 1.27c e d, concluímos que atuam tensões normais e de cisalhamento de igual valor, nas quatro faces do cubo (Fig. 1.36b). Verificamos então que o mesmo carregamento leva a diferentes interpretações do estado de tensões em um ponto, dependendo da orientação do elemento considerado. O Capítulo 6 discutirá mais o assunto.

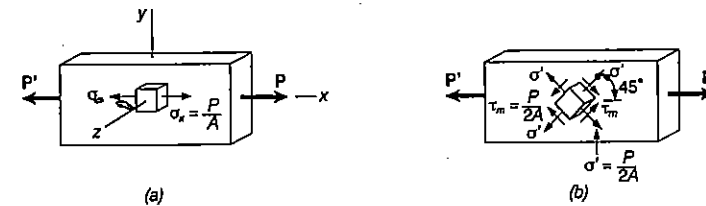


Fig. 1.36

1.9 TENSÕES ADMISSÍVEIS E TENSÕES ÚLTIMAS; COEFICIENTE DE SEGURANÇA

Nas seções anteriores aprendemos a calcular tensões em barras e pinos submetidos a condições simples de carregamento. Nos próximos capítulos, veremos a determinação de tensões em situações mais complexas. No entanto, dentro das aplicações da engenharia, a determinação de tensões não é o objetivo final, mas um passo necessário no desenvolvimento de dois dos mais importantes estudos:

1. A análise de estruturas e máquinas existentes, com o objetivo de prever seu comportamento sob condições de carga específicas.

2. O projeto de novas máquinas e estruturas, que deverão cumprir determinadas funções de maneira segura e econômica.

Para encaminhar qualquer dos dois estudos acima, precisamos saber como o material a ser usado vai atuar sob condições conhecidas de carregamentos. Para cada material, isso pode ser determinado realizando testes específicos em amostras preparadas do material. Por exemplo, podemos preparar um corpo de prova de aço e levá-lo a uma máquina de testes em laboratório, onde ele será submetido a uma carga axial de tração (V. Sec. 2.3). Enquanto fazemos a força aplicada aumentar progressivamente de intensidade, podemos medir várias modificações por que passa o corpo de prova, como, por exemplo, alterações no comprimento e no diâmetro.

Em certo instante, a máxima força que pode ser aplicada ao corpo de prova é atingida e a amostra se quebra, ou começa a perder resistência, suportando forças menores. Essa força máxima é chamada *carregamento último* dessa amostra, e é designada pelo símbolo P_U .

Como a força aplicada é centrada, podemos dividir a carga de ruptura pela área da seção transversal da barra, para obter a *tensão normal última* do material em estudo. Esta tensão, também conhecida como *tensão última à tração* do material, tem valor:

$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \quad (1.20)$$

Muitos procedimentos para testes são usados na determinação da *tensão de cisalhamento última* de um material. Um procedimento usual utiliza a torção de um tubo circular (Sec. 3.9). Um método mais direto, se bem que não tão preciso como o anterior, consiste em levar uma chapa a uma ferramenta de corte e aplicar um carregamento crescente, até que a carga última P_U para corte simples seja atingida (Fig. 1.37). Se a extremidade livre da chapa estiver apoiada sobre as duas bordas cortantes da ferramenta (Fig. 1.38), obtém-se a carga última para corte duplo. Nos dois casos, obtém-se a tensão última ao cisalhamento, dividindo-se a carga última pela área cortada. No caso de corte simples, essa área é igual à da seção transversal do corpo de prova, e no caso de corte duplo, vale o dobro da área da seção transversal.

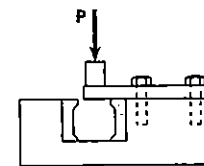


Fig. 1.37

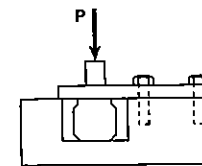


Fig. 1.38

Uma peça estrutural ou componente de máquina deve ser projetada de tal forma que a carga última seja consideravelmente maior que o carregamento que essa peça ou elemento irão suportar em condições normais de utilização. Esse carregamento menor é chamado *carregamento admissível* e, algumas vezes, *carga de utilização* ou *carga de projeto*. Então, quando se aplica a carga admissível, apenas uma parte da capacidade de resistência do material está sendo utilizada; outra parte é reservada para assegurar ao material condições de utilização segura. A relação entre o carregamento último e o carregamento admissível é chamada *coeficiente de segurança*⁶. Temos, então:

$$\text{Coeficiente de Segurança} = CS = \frac{\text{Carga última}}{\text{Carga admissível}} \quad (1.21)$$

Em muitas aplicações existe uma correspondência linear entre carga aplicada e tensão provocada pela carga. Nesse caso o coeficiente de segurança pode ser expresso por:

$$\text{Coeficiente de Segurança} = CS = \frac{\text{Tensão última}}{\text{Tensão admissível}} \quad (1.22)$$

A determinação do valor a ser adotado para o coeficiente de segurança, nas muitas aplicações possíveis, é um dos mais importantes problemas da engenharia. Por um lado, a escolha de um coeficiente de segurança baixo pode levar a uma possibilidade de ruptura da estrutura muito alta; por outro lado, um coeficiente de segurança muito alto leva a projetos antieconômicos ou pouco funcionais.

A escolha do coeficiente de segurança adequado para as diferentes aplicações práticas requer uma análise cuidadosa, que leve em consideração muitos fatores, como os que se seguem:

⁶ Em alguns campos da engenharia, principalmente na engenharia aeronáutica, usa-se a margem de segurança ao invés do coeficiente de segurança. A margem de segurança é definida como o coeficiente de segurança menos um, isto é
Margem de Segurança = CS - 1,0

1. Modificações que ocorrem nas propriedades do material. A composição, resistência e dimensões dos materiais estão sujeitas a pequenas variações durante a fabricação das peças. Além disso, as propriedades do material podem ficar alteradas, e podem ocorrer tensões residuais devido a deformações e variação de temperatura a que o material se sujeita no transporte, armazenamento ou na própria execução da estrutura.

2. O número de vezes em que a carga é aplicada durante a vida da estrutura ou máquina. Para a maior parte dos materiais a aplicação do carregamento, repetida muitas vezes, leva a um decréscimo no valor da tensão última. Este fenômeno é chamado fadiga do material e, se não for levado em conta, poderá ocorrer uma ruptura brusca (V. Sec. 2.7).

3. O tipo de carregamento para o qual se projeta, ou que poderá atuar futuramente. A maior parte dos carregamentos adotados em projeto são estimados, pois são poucas as vezes em que um carregamento pode ser previsto com precisão. Ocorre também a possibilidade de alterações futuras na finalidade da máquina ou estrutura que está sendo projetada, como modificações nos valores previstos por ocasião do projeto. Cargas dinâmicas, cíclicas e instantâneas (choque) exigem altos valores de coeficientes de segurança.

4. O modo de ruptura que pode ocorrer. Materiais frágeis apresentam ruptura repentina, sem nenhuma indicação de que o colapso é iminente. Já os materiais dúteis, como o aço estrutural, apresentam grande deformação, chamada *escoamento*, antes de atingir a ruptura, e esse comportamento do material fornece um aviso de que está ocorrendo carregamento excessivo. A ruptura ocasionada por perda de estabilidade da estrutura é geralmente repentina, seja o material frágil ou não. Quando existe a possibilidade de ruptura repentina, o valor a se adotar para o coeficiente de segurança deve ser maior do que no caso de ruptura com aviso.

5. Métodos aproximados e análise. Os métodos de cálculo e análise são baseados em certas simplificações que levam a diferenças entre as tensões calculadas e aquelas realmente atuantes na estrutura.

6. Deterioração que poderá ocorrer no futuro devido à falta de manutenção ou por causas naturais imprevisíveis. Em locais em que a composição do material ou a ferrugem são difíceis de controlar ou de prever, deve ser adotado um coeficiente de segurança de valor alto.

7. A importância de um certo membro para a integridade de toda a estrutura. Para as peças secundárias e contraventamentos da estrutura pode ser usado um coeficiente de segurança menor do que aquele das peças principais.

Completando os comentários acima, existe a consideração adicional relativa ao risco de vida e danos materiais que um colapso pode trazer. Nos casos em que o colapso não traz risco de vida, e a perda de valores materiais é mínima, pode ser considerado o uso de um coeficiente de segurança mais baixo.

Finalmente existe a consideração de ordem prática que às vezes exige um coeficiente de segurança relativamente baixo (com um projeto muito bem feito). Por exemplo, altos coeficientes de segurança podem trazer efeitos inaceitáveis no peso de um avião.

Na maioria das aplicações em estruturas e máquinas, os coeficientes de segurança são especificados por especificações de projeto e códigos de construção escritos por comitês de engenheiros experientes, trabalhando juntamente com sociedades profissionais, indústrias, agências federais, estaduais e municipais. Exemplos desses códigos de especificações e construção são⁷:

1. Aço - Instituto Americano de Construção Metálica, Especificações para o projeto e a execução de estruturas metálicas para edifícios.

2. Concreto - Instituto Americano do Concreto, Código de Edificações, requisitos para Concreto Armado.

3. Madeira - Associação Nacional de Produtos Florestais, Especificação Nacional para projeto em madeira estrutural e suas ligações.

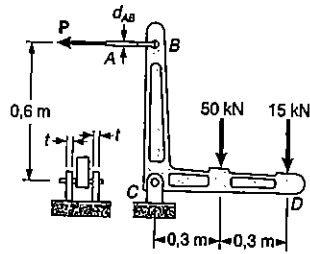
4. Pontes rodoviárias - Associação Americana dos funcionários de rodovias estaduais, Especificação-padrão para pontes rodoviárias.

PROBLEMA RESOLVIDO 1.2

Duas forças são aplicadas ao suporte da figura. a) Sabendo-se que a barra de controle AB é feita de aço com tensão última de 600 MPa, determinar o diâmetro da barra para que o coeficiente de segurança seja de 3,3; b) O pino no ponto C é feito de aço com tensão última a cisalhamento de 350 MPa. Determinar o diâmetro do pino C que leva a um coeficiente de segurança ao cisalhamento de valor 3,3; c) Determinar a espessura necessária das chapas de apoio em C, sabendo-se que a tensão admissível para esmagamento do aço utilizado é de 300 MPa.

⁷ N. T.: No Brasil, as especificações para coeficientes de segurança dos diversos materiais e para carregamentos em vários tipos de estruturas são dados pelas Normas Técnicas da Associação Brasileira de Normas Técnicas. Assim, para os materiais e estruturas especificados acima, temos:

1. Aço NB-14
2. Concreto NB-1
3. Madeira NB-11
4. Pontes rodoviárias NB-6



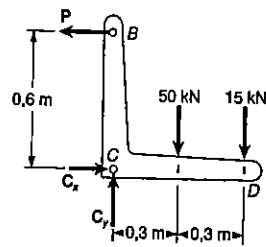
Corpo livre: Todo o suporte. A reação em C está representada por suas componentes C_x e C_y :

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0; P(0,6 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(0,3 \text{ m}) - (15 \text{ kN})(0,6 \text{ m}) = 0 \quad P = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad C_x = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad C_y = 65 \text{ kN}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76,3 \text{ kN}$$



a) Barra de controle AB. Como o coeficiente de segurança é 3,3 a tensão admissível é

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_U}{CS} = \frac{600 \text{ MPa}}{3,3} = 181,8 \text{ MPa}$$

Para $P = 40 \text{ kN}$ a área necessária da seção transversal é

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{40 \text{ kN}}{181,8 \text{ MPa}} = 220 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{nec} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 220 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad d_{AB} = 16,74 \text{ mm}$$

b) Cisalhamento no pino C. Para o coeficiente de segurança 3,3 temos

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_U}{CS} = \frac{350 \text{ MPa}}{3,3} = 106,1 \text{ MPa}$$

Como o pino está sujeito a corte duplo, temos

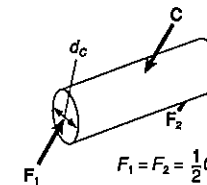
$$A_{nec} = \frac{C/2}{\tau_{adm}} = \frac{(76,3 \text{ kN})/2}{106,1 \text{ MPa}} = 360 \text{ mm}^2$$

$$A_{nec} = \frac{\pi}{4} d_c^2 = 360 \text{ mm}^2$$

$$d_c = 21,4 \text{ mm}$$

Adota-se $d_c = 22 \text{ mm}$

A bitola comercial mais próxima do valor encontrado é 22 mm.

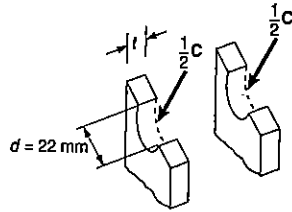


c) Esmagamento das chapas em C. Para $d = 22 \text{ mm}$, a área nominal de esmagamento de cada chapa é $22t$. A força distribuída em cada chapa é $C/2$. Com a tensão admissível de 300 MPa, escrevemos

$$A_{nec} = \frac{C/2}{\sigma_{adm}} = \frac{(76,3 \text{ kN})/2}{300 \text{ MPa}} = 127,2 \text{ mm}^2$$

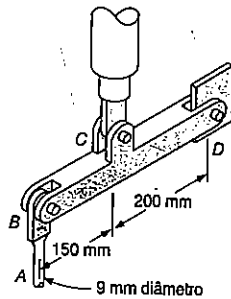
Como $22t = 127,2$, temos $t = 5,78 \text{ mm}$.

Adota-se $t = 6 \text{ mm}$



PROBLEMA RESOLVIDO 1.3

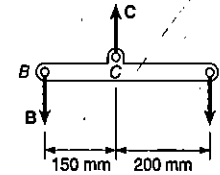
A viga rígida BCD está ligada por parafusos à barra de controle em B, ao cilindro hidráulico em C e ao suporte fixo em D. Os diâmetros dos parafusos usados são $d_B = d_D = 8\text{ mm}$, $d_C = 12\text{ mm}$. Cada parafuso está sujeito a corte duplo, e é constituído de aço com tensão de cisalhamento última $\tau_U = 300\text{ MPa}$. A barra de controle AB, com 9 mm de diâmetro, é feita de aço com tensão última de tração $\sigma_U = 450\text{ MPa}$. Determinar a maior força que o cilindro hidráulico pode aplicar, de baixo para cima, no ponto C adotando para toda a estrutura o coeficiente de segurança 3,0.



Solução: O coeficiente de segurança deve ser maior ou igual a 3,0 para cada um dos três parafusos, como também para a barra de controle. Vamos considerar separadamente cada um dos quatro casos.

$$+) \Sigma M_D = 0: \quad B(350\text{ mm}) - C(200\text{ mm}) = 0 \quad C = 1,750 B \quad (1)$$

$$+) \Sigma M_B = 0: \quad -D(350\text{ mm}) + C(150\text{ mm}) = 0 \quad C = 2,33 D \quad (2)$$



Barra de controle. Para o coeficiente de segurança 3,0 vamos ter

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_U}{CS} = \frac{450\text{ MPa}}{3,0} = 150\text{ MPa}$$

A força admissível na barra de controle é

$$B = \sigma_{adm}(A) = (150\text{ MPa}) 1/4\pi (9\text{ mm})^2 = 9,54\text{ kN}$$

Usando a Equação 1 encontramos o maior valor possível em C

$$C = 1,750 B = 1,750(9,54\text{ kN}) \quad C = 16,70\text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

Parafuso no ponto B.

$$\tau_{adm} = \tau_U/CS = (300\text{ MPa})/3 = 100\text{ MPa.}$$

Como o parafuso está sujeito a corte duplo, a força admissível em B é

$$B = \tau_{adm}(2A) = (100\text{ MPa}) \frac{2\pi}{4} (8\text{ mm})^2 \quad B = 10,05\text{ kN}$$

$$\text{Da Equação 1 } C = 1,750 B = 1,750(10,05\text{ kN}) \quad C = 17,59\text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

Parafuso no ponto D. Este parafuso é igual ao do ponto B e a força admissível é $D = B = 10,05\text{ kN}$. Usando a Equação 2:

$$C = 2,33 D = 2,33(10,05\text{ kN}) \quad C = 23,4\text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

Parafuso no ponto C. Novamente temos $\tau_{adm} = 100\text{ MPa}$ e escrevemos

$$C = \tau_{adm}(2A) = (100 \text{ MPa}) \frac{2\pi}{4} (12 \text{ mm})^2 \quad C = 22,6 \text{ kN}$$

Resumo: Obtivemos separadamente para cada caso quatro valores admissíveis para a força C . Devemos escolher o menor desses valores, de modo a satisfazer os quatro casos.

$$C = 16,70 \text{ kN}$$

PROBLEMAS

1.33 O cilindro hidráulico CF , que controla parcialmente a posição da barra cilíndrica DE , está completamente distendido na posição mostrada. A barra BD tem 15 mm de espessura e está ligada em C , por um parafuso de 9 mm de diâmetro. Sabendo-se que $P = 2 \text{ kN}$ e $\theta = 75^\circ$, determine: (a) a tensão de cisalhamento média no parafuso; (b) a tensão de esmagamento em C , na barra BD .

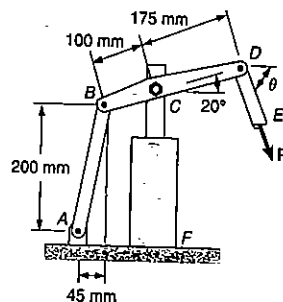


Fig. P1.33 e P1.34

1.34 O cilindro hidráulico CF , que controla parcialmente a posição da haste DE , está completamente distendido na posição mostrada. A barra de ligação AB tem uma seção transversal retangular uniforme de $12 \times 25 \text{ mm}$ e está ligada à barra BD pelo pino B de diâmetro 8 mm. Sabendo-se que a máxima tensão de cisalhamento admissível no pino é de 140 MPa , determine: (a) a maior força P que pode ser aplicada em E , quando $\theta = 60^\circ$; (b) a correspondente tensão de esmagamento em B , na barra de ligação AB ; (c) o correspondente valor da tensão normal máxima, na barra de ligação AB .

1.35 Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme de $80 \times 120 \text{ mm}$ são unidas, através de uma emenda chanfrada e simplesmente colada, como indicado. Sabendo-se que $P = 12 \text{ kN}$, determine as tensões normal e de cisalhamento na referida emenda.

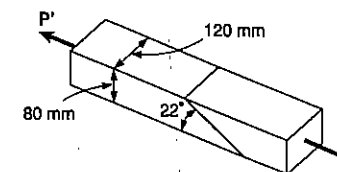


Fig. P1.35

1.36 Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme de $76 \times 127 \text{ mm}$ são unidas, através de uma emenda simplesmente colada, como indicado. Sabe-se que $P = 3560 \text{ kN}$, determine as tensões normal e de cisalhamento na referida emenda.

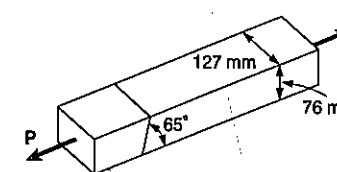


Fig. P1.36

1.37 Sendo a máxima tensão de tração admissível para a emenda colada do Prob. 1.36 igual a 415 kPa , determine: (a) a maior carga axial P que pode ser aplicada; (b) a correspondente tensão de cisalhamento nesta emenda.

1.38 Sendo a máxima tensão de tração admissível para a emenda colada do Prob. 1.35 igual a 600 kPa , determine: (a) a maior carga axial P que pode ser aplicada; (b) a correspondente tensão de cisalhamento nesta emenda.

1.39 Um tubo de aço de 300 mm de diâmetro externo é fabricado com chapa de $6,35 \text{ mm}$ de espessura, por meio de um cordão de solda ao longo de uma hélice que forma um ângulo de $22,5^\circ$ com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo-se que uma força axial P de 270 kN é aplicada ao tubo, determine as tensões, normal e de cisalhamento, que atuam respectivamente nas direções normal e tangencial, ao cordão de solda.

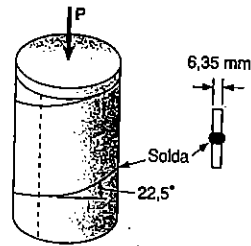


Fig. P1.39

1.40 Para o tubo do Prob. 1.39, sabendo-se que as máximas tensões nas direções, normal e tangencial, no cordão de solda são $\sigma = 165 \text{ MPa}$ e $\tau = 110 \text{ MPa}$, respectivamente, determine a intensidade da maior força axial P que pode ser aplicada ao tubo.

1.41 As barras AB e BE da treliça mostrada são da mesma liga metálica. Sabe-se que uma barra de 20 mm de diâmetro desta mesma liga foi testada até a falha e foi registrada uma carga máxima de 150 kN. Usando um coeficiente de segurança igual a 3,2, determine qual o diâmetro necessário para (a) a barra AB ; (b) a barra BE .

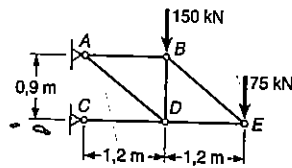


Fig. P1.41 e P1.42

1.42 As barras AB e BE da treliça mostrada, são da mesma liga metálica. Sendo que a barra AB tem um diâmetro de 28 mm e que a carga máxima para a barra é de 300 kN, determine: (a) o coeficiente de segurança para AB ; (b) o diâmetro necessário para BE , se ambas as barras tiverem o mesmo coeficiente de segurança.

1.43 A barra de ligação horizontal BC é de 6,35 mm de espessura, tem uma largura $w = 31,8 \text{ mm}$ e é feita de aço com tensão última de tração igual a 483 MPa. Qual deve ser o coeficiente de segurança a ser usado, se a estrutura mostrada for projetada para suportar uma carga $P = 44,5 \text{ kN}$?

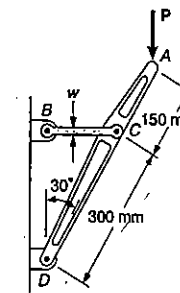


Fig. P1.43 e P1.44

1.44 A barra de ligação horizontal BC é de 6,35 mm de espessura e é feita de aço com tensão última de tração de 415 MPa. Qual deve ser a largura w dessa barra de ligação, se a estrutura for projetada para suportar uma carga $P = 36 \text{ kN}$, com um coeficiente de segurança igual a 3?

1.45 As peças principais de madeira mostradas são emendadas por meio de duas chapas de madeira compensada, que são inteiramente coladas em toda a extensão da superfície de contato. Sabendo-se que a folga entre as extremidades das peças é de 6 mm e que a tensão de cisalhamento última da cola é de 2,5 MPa, determine, para o carregamento indicado, o comprimento L para que o coeficiente de segurança seja 2,75.

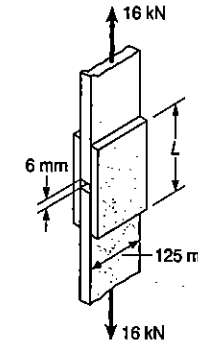


Fig. P1.45

1.46 Para a emenda e carregamento do Prob. 1.45, determine o coeficiente de segurança, quando $L = 180 \text{ mm}$.

1.47 Para a emenda e carregamento do Prob. 1.36, determine o coeficiente de segurança, sabendo-se que a resistência última da cola é de 1035 kPa na tração e 1475 kPa no cisalhamento.

1.48 Quatro parafusos de aço são usados para prender a placa mostrada à viga de madeira. Admitindo que a tensão de cisalhamento última para o aço utilizado é de 345 MPa, e desejando um coeficiente de segurança de 3,3, determine o menor diâmetro admissível para os parafusos a serem usados.

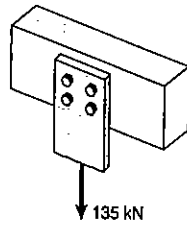


Fig. P1.48

1.49 A haste AC é feita de um aço com tensão normal última de 410 MPa e tem uma seção transversal retangular uniforme de 6 x 12 mm. Está ligada ao apoio A e ao membro BCD em C, por pinos de 9,5 mm de diâmetro; enquanto que a barra BCD está ligada ao apoio B, por pino de 8 mm de diâmetro. Todos os pinos são de aço com tensão de cisalhamento última igual a 170 MPa e estão sujeitos a cisalhamento simples. Desejando-se um coeficiente de segurança de 3,25, determine a maior carga P que pode ser aplicada em D. Notar que a haste AC não está reforçada em torno dos furos dos pinos.

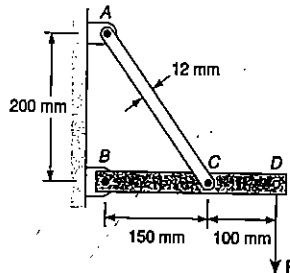


Fig. P1.49

1.50 Na estrutura de aço mostrada, um pino de 6 mm de diâmetro é usado em C, enquanto que em B e D usam-se pinos de 10 mm de diâmetro. A tensão de cisalhamento última para todas as ligações é de 150 MPa, e a tensão normal última é de 400 MPa na viga BD. Desejando-se um coeficiente de segurança igual a 3, determine a maior carga P que pode ser aplicada em A. Notar que a viga BD não é reforçada em torno dos furos dos pinos.

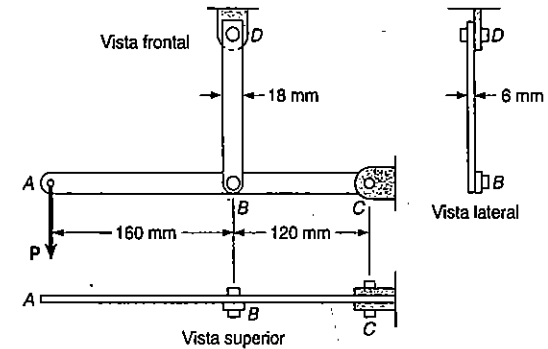


Fig. P1.50

1.51 Resolver o Prob. 1.50, assumindo que a estrutura deve ser reprojeta para utilizar pinos de 12 mm de diâmetro em B e D, e que nenhuma outra modificação deve ser feita.

1.52 Resolver o Prob. 1.49, assumindo que a estrutura deve ser reprojeta para utilizar pinos de 8 mm de diâmetro em A e C, assim como também em B, e que nenhuma outra modificação deve ser feita.

1.53 Resolver o Prob. 1.50, assumindo que a estrutura deve ser reprojeta para utilizar pinos de 11,5 mm de diâmetro em B e D, e que nenhuma outra modificação deve ser feita.

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo está voltado ao conceito de *tensão* e à introdução dos métodos usados para análise e projeto de máquinas e estruturas de sustentação.

Inicialmente nós consideramos uma barra reta submetida a duas *forças axiais* (Sec. 1.2). A *tensão normal* σ nessa barra foi obtida pela relação entre a intensidade da carga P e a área da seção transversal da barra (Fig. 1.6a). Nós escrevemos,

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

Carregamento axial Tensão normal

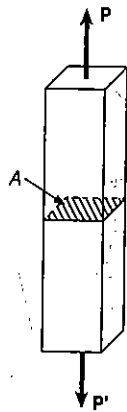


Fig. 1.6a

Como visto na Sec. 1.3, o valor de σ obtido desta forma representa a *tensão média* sobre a seção, ao contrário do que a tensão num ponto específico Q da seção. Considerando uma pequena área ΔA ao redor de Q e sendo ΔF , a intensidade da força sobre ΔA , nós definimos a tensão no ponto Q como,

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.2)$$

Em geral, o valor obtido da tensão σ no ponto Q , varia ao longo da seção e é diferente da tensão média dado pela fórmula (1.1). Entretanto, esta variação é pequena em qualquer seção afastada dos pontos de aplicação das cargas. Na prática,

no entanto, a distribuição de tensões normais numa barra com carregamento axial é assumida como sendo *uniforme*, exceto nas vizinhanças dos pontos de aplicação das cargas. Mesmo assim, para que a distribuição de tensões seja uniforme em uma dada seção, é necessário que a linha de ação das cargas P e P' passe pelo centróide C da seção. Tal carregamento é dito axial *centrado*. No caso de um carregamento axial *excêntrico* a distribuição de tensões *não* é uniforme. No Capítulo 4, serão discutidas as tensões em barras sujeitas a um carregamento axial excêntrico.

Quando as *forças transversais* P e P' , iguais e opostas, de intensidade P , são aplicadas em uma barra AB (Fig. 1.13a), *tensões de cisalhamento* τ surgem sobre a seção localizada entre os pontos de aplicação das duas forças (Sec. 1.4). Estas tensões variam bastante através da seção e a distribuição delas *não pode* ser assumida como uniforme. Portanto, a relação entre a intensidade P , que é a *força cortante* na seção, e a área da seção transversal A , nós definimos como *tensão de cisalhamento média* ao longo da seção, então:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{P}{A} \quad (1.4)$$

Forças transversais Tensão de cisalhamento

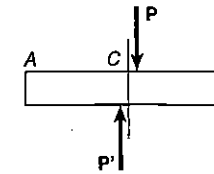


Fig. 1.13a

As tensões de cisalhamento são encontradas em parafusos, pinos e rebites, ligando dois membros estruturais ou componentes de máquinas. Por exemplo, no caso do rebite CD (Fig. 1.14), que está sujeita a *cisalhamento simples*, nós escrevemos,

$$\tau_{\text{med}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (1.5)$$

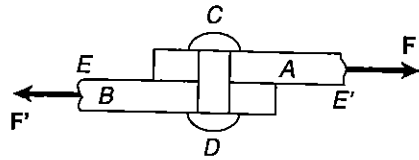


Fig. 1.14

enquanto que, no caso dos rebites *EG* e *HJ* (Fig. 1.16), em que ambos estão sujeitos a *cisalhamento duplo*, nós teremos,

$$\tau_{med} = \frac{P}{A} = \frac{F}{2A} \quad (1.6)$$

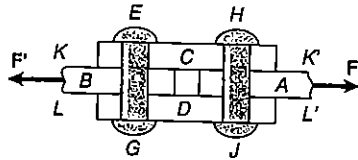


Fig. 1.16

Os parafusos, pinos e rebites também geram tensões nos membros em que estão conectados, ao longo da superfície de contato ou *superfície de esmagamento* (Sec. 1.5). O rebite *CD* da Fig. (1.14), por exemplo, gera tensões na superfície semicilíndrica da placa *A*, com a qual está em contato (Fig. 1.18). Como a distribuição destas tensões é bastante complicada, alguns usam na prática um valor de tensão nominal média, σ_E , chamada *tensão de esmagamento*, obtida pela divisão da carga *P*, pela área do retângulo representando a projeção do rebite sobre a seção da placa. Denotando por *t* a espessura da placa e por *d* o diâmetro do rebite, escrevemos:

$$\sigma_E = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (1.7)$$

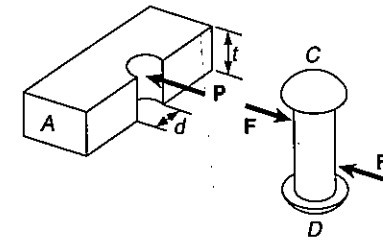


Fig. 1.18

Na Sec. 1.6, nós aplicamos os conceitos introduzidos nas seções iniciais para a análise de uma estrutura simples, consistindo de duas barras, conectadas por pinos e que suportam uma dada carga. Determinamos sucessivamente as tensões normais nos dois membros, dando especial atenção para suas reduzidas seções, assim como as tensões de cisalhamento nos vários pinos e a tensão de esmagamento em cada furo.

Na Sec. 1.7, nós consideramos as tensões que surgem sobre uma *seção oblíqua* de uma barra sujeita a um par de cargas axiais. Nós vemos que ambas as tensões *normal* e de *cisalhamento* ocorrem em tal situação. Denotando por θ o ângulo formado entre a seção com um plano normal (Fig. 1.26a) e por A_0 a área de uma seção perpendicular ao eixo da barra, nós desenvolvemos as seguintes expressões para a tensão normal σ e para a tensão de cisalhamento τ , sobre a seção oblíqua:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \quad (1.11)$$

Nós observamos destas fórmulas que a tensão normal e máxima é igual a $\sigma_m = P/A_0$ para $\theta = 0$, enquanto que a tensão de cisalhamento é máxima e igual a $\tau_m = P/2A_0$ para $\theta = 45^\circ$. Nós também notamos que $\tau = 0$ quando $\theta = 0$, enquanto $\sigma = P/2A_0$ quando $\theta = 45^\circ$.

Tensões sobre uma seção oblíqua

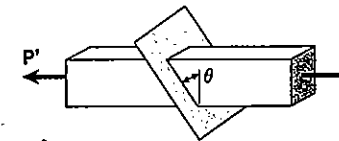


Fig. 1.26a

Em seguida, nós discutimos o estado de tensão em um ponto *Q* de um corpo, submetido à condição mais geral de carregamento (Sec. 1.8). Considerando um pe-

queno cubo centrado em Q (Fig. 1.32), nós denotamos por σ_x a tensão normal exercida sobre uma face do cubo perpendicular ao eixo x , e por τ_{xy} e τ_{xz} , respectivamente, as componentes y e z , da tensão de cisalhamento exercida sobre a mesma face do cubo. Repetindo este procedimento para as outras duas faces do cubo e observando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ e $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, nós concluímos que são necessários seis componentes de tensão para definir o estado de tensão em um dado ponto Q , ou seja, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} .

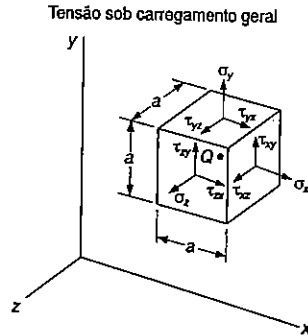


Fig. 1.32

Finalmente, nós discutimos vários conceitos usados na análise e projeto de estruturas de engenharia (Sec. 1.9). A carga ou carregamento último de um dado membro estrutural ou componente de máquina é a força a qual este membro ou componente está no limite de falhar. Ele é calculado da tensão última ou da resistência última do material, tal como determinado por um ensaio de laboratório em um corpo de prova desse material. O carregamento último deveria ser consideravelmente maior do que a carga admissível, isto é, a carga que o membro ou componente irá suportar em condições normais de utilização. A relação entre a carga última e a carga admissível é definida como coeficiente de segurança:

$$\text{Coeficiente de segurança} = CS = \frac{\text{carga última}}{\text{carga admissível}} \quad (1.21)$$

A determinação do coeficiente de segurança que deve ser usado no projeto de uma dada estrutura depende de um certo número de considerações, algumas das quais foram listadas na Sec. 1.9.

PROBLEMAS DE REVISÃO

1.54 Uma força de 45 kN está aplicada a um bloco de madeira que é suportado por uma base de concreto, e esta repousa sobre um solo considerado indeformável. Determine: (a) a máxima tensão de esmagamento sobre a base de concreto, (b) o tamanho da base de concreto para que a tensão de esmagamento média sobre o solo seja de 140 kPa.

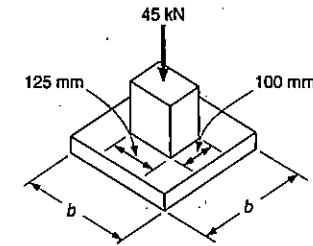


Fig. P1.54

1.55 Duas barras cilíndricas maciças AC e CD são soldadas juntas em C e estão sujeitas ao carregamento mostrado. Determine a tensão normal média em cada uma das porções AB, BC e CD.

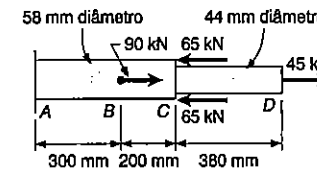


Fig. P1.55

1.56 Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme de lados $a = 100$ mm e $b = 60$ mm são simplesmente coladas uma à outra, como mostrado. Sabendo-se que as tensões últimas para a cola são $\sigma_U = 1,26$ MPa à tração e $\tau_U = 1,50$ MPa ao cisalhamento, e sendo $P = 6$ kN, determine o coeficiente de segurança para a junta, quando: (a) $\alpha = 20^\circ$; (b) $\alpha = 35^\circ$; (c) $\alpha = 45^\circ$. Para cada um destes valores de α , determine também se a junta irá falhar à tração ou ao cisalhamento, quando P cresce até que ocorra a ruptura.

1.57 Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme de lados a e b são coladas como indicado. Denominando por σ_U e τ_U , respectivamente, a tensão última à tração e ao cisalhamento da ligação e por P a intensidade da força axial aplicada em cada extremidade da peça, pede-se: (a) derivar as expressões para os coeficientes de segurança relativos à falha da junta à tração e ao cisalhamento, respectivamente; (b) mostrar que o coeficiente de segurança global para a junta colada é igual ao primeiro se $\tan \alpha < \sigma_U/\tau_U$, e igual ao segundo, para o caso contrário.

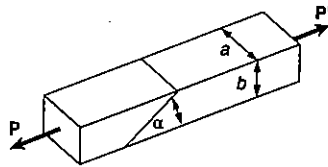


Fig. P1.56 e P.157

1.58 Sabendo-se que a carga de ruptura do cabo BD é de 90 kN, e o pino em A tem um diâmetro de 9,5 mm e é feito aço com tensão última de cisalhamento igual a 345 MPa, determine o coeficiente de segurança para o carregamento mostrado.

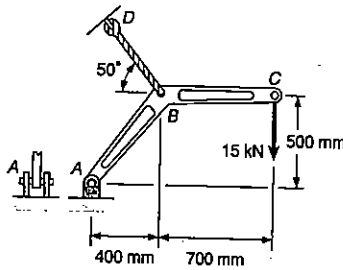


Fig. P1.58

1.59 Uma coluna de concreto de 3,6 m de altura, projetada para suportar seu próprio peso, consiste em dois elementos AB e BC , de 230 mm e 380 mm de diâmetro, respectivamente. (a) Determine o comprimento do elemento AB para que o valor da máxima tensão normal na coluna seja máximo; (b) expressar este valor em termos da máxima tensão σ_0 , numa coluna de 3,6 m do mesmo material, porém de seção transversal circular uniforme.

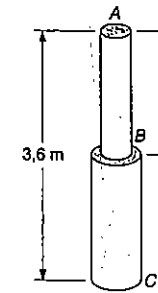


Fig. P1.59

1.60 A carga P é aplicada, como indicado, por um pino de aço que atravessa um bloco de madeira fixado num teto. A tensão última da madeira usada é de 60 MPa à tração e 7,5 MPa ao cisalhamento, enquanto que a tensão última ao cisalhamento para o aço é de 150 MPa. Sabendo-se que o diâmetro do pino é $d = 15$ mm e que a intensidade da carga $P = 16$ kN, determine: (a) o coeficiente de segurança para o pino; (b) a tensão de esmagamento média para a madeira; (c) os valores necessários de b e c , se o coeficiente de segurança for o mesmo que foi encontrado para o pino, no item (a).

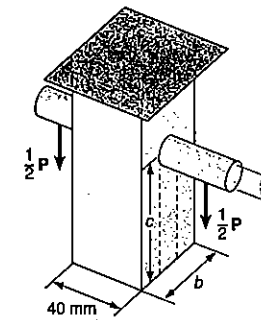


Fig. P1.60

1.61 Para o suporte do Prob. 1.60, sabendo-se que $b = 40$ mm, $c = 55$ mm e $d = 12$ mm, determine: (a) a maior carga admissível P se um coeficiente de segurança global igual a 3 é desejado; (b) a correspondente tensão de esmagamento média na madeira.

1.62 Um pino de diâmetro igual a 5 mm está sujeito a um cisalhamento duplo, na conexão C do pedal mostrado. Sabendo-se que $P = 600 \text{ N}$, determine: (a) a tensão de cisalhamento média no pino; (b) a tensão de esmagamento no pedal C; (c) a tensão de esmagamento em cada uma das chapas de apoio, em C.

1.63 Sabendo-se que uma força de 800 N está aplicada no pedal indicado, determine: (a) o diâmetro do pino em C, tal que a tensão de cisalhamento média no pino seja de 35 MPa; (b) a correspondente tensão de esmagamento em cada uma das chapas de apoio, em C.

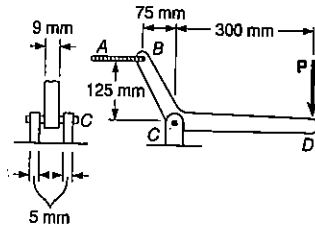


Fig. 1.62 e P1.63

1.64 Uma placa de aço de espessura 6,35 mm está engastada numa parede de concreto, ancorando um cabo de alta resistência, como indicado. O diâmetro do furo da placa é de 19 mm, a tensão última de tração para o aço é de 250 MPa, e a tensão última de aderência entre a placa e o concreto é de 2,07 MPa. Se um coeficiente de segurança de 3,6 é desejado, quando $P = 10 \text{ kN}$, determine: (a) a largura a necessária da placa; (b) o mínimo comprimento b que a placa poderia ser embutida na parede. (Desprezar as tensões normais entre o concreto e a extremidade da placa.)

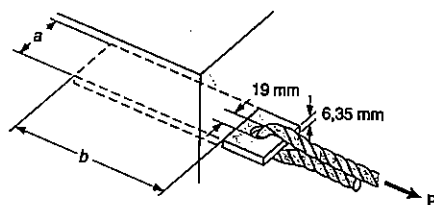


Fig. P1.64

1.65 Determine o coeficiente de segurança para o cabo ancorado do Prob. 1.64, quando $P = 13,5 \text{ kN}$, adotando-se para $a = 50 \text{ mm}$ e $b = 210 \text{ mm}$.

Os problemas que se seguem são para ser resolvidos com auxílio de um computador.

1.C1 Uma barra maciça consiste em n elementos cilíndricos, soldados entre si e submetidos ao carregamento indicado. O diâmetro do elemento i é denotado por d_i e a carga aplicada em sua extremidade direita por P_i . Estas cargas são assumidas positivas quando P_i é orientada como mostrado e negativa em caso contrário. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que possa ser usado, em qualquer sistema de unidades, para determinar a tensão normal média em cada elemento da barra; (b) Aplicar esse programa para resolver os Probs. 1.1, 1.2 e 1.55.

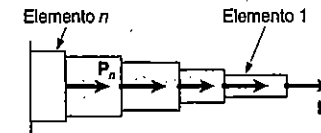


Fig. P1.C1

1.C2 Cada uma das quatro hastes de ligação verticais, conectadas às duas barras horizontais, tem uma seção transversal retangular-uniforme de $10 \times 40 \text{ mm}$ e são feitas de aço com uma tensão de tração última de 400 MPa, enquanto que cada um dos pinos C e F é feito de aço com uma tensão de cisalhamento última de 150 MPa. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador tal que, dados os valores de a , b e P , e os valores para os diâmetros d dos pinos, que variam de 4 mm até 36 mm, em intervalos de 2 mm, permita calcular: (1) o máximo valor da tensão normal média na haste CF, (2) a tensão de cisalhamento média dos pinos, em C e F, (3) o coeficiente de segurança para a haste CF, (4) o coeficiente de segurança dos pinos, em C e F, (5) o coeficiente de segurança global para as hastes e os pinos; (b) Aplicar esse programa para resolver os Probs. 1.13b e 1.30a; (c) Determinar para os valores de a , b e P , usados nesses dois problemas, qual diâmetro d do pino produzirá o maior coeficiente de segurança global, e o correspondente valor deste coeficiente.

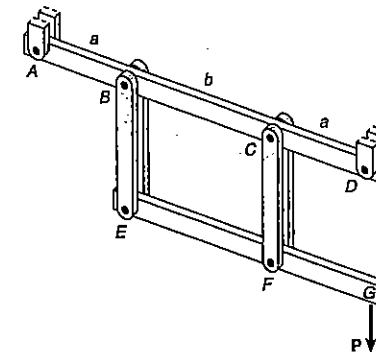


Fig. P1.C2

1.C3 Duas peças de madeira de seção transversal retangular uniforme, de lados a e b , são unidas por uma junta simplesmente colada, e sujeitas a uma carga axial de intensidade P , como indicado. Pede-se: (a) Denotando por σ_U e τ_U , respectivamente, as tensões últimas de tração e de cisalhamento, escrever um programa de computador que, dados os valores a , b , P , σ_U e τ_U , expressos em qualquer sistema coerente de unidades, e para valores de α variando de 5° até 85° , em intervalos de 5° , permita calcular: (1) a tensão normal na junta, (2) a tensão de cisalhamento na junta, (3) o coeficiente de segurança relativo a falha por tração, (4) o coeficiente de segurança relativo a falha por cisalhamento, (5) o coeficiente de segurança global para a junta soldada; (b) Aplicar esse programa, usando dimensões, carregamento e propriedades específicas do material, para a solução dos Probs. 1.36, 1.47 e 1.56; (c) Em cada um destes dois casos, verificar que a tensão de cisalhamento é máxima para $\alpha = 45^\circ$ e tem o valor definido pela Equação (1.13), também observar, em ambos os casos, as propriedades indicadas no item b do Prob. 1.57.

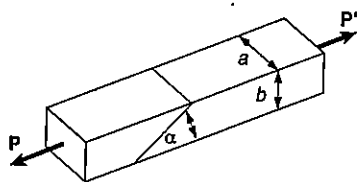


Fig. P1.C3

1.C4 A haste BD é feita de aço com uma tensão última a tração de 400 MPa , e os pinos B , C e D de um aço com uma tensão última de cisalhamento de 150 MPa . Note que os pinos B e D estão sujeitos a um cisalhamento simples, enquanto que o pino C , a um cisalhamento duplo. Também note que a haste BD não é reforçada em torno dos furos dos pinos. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que, uma vez dados os valores das dimensões a , b , w , t , do diâmetro d dos pinos B e D , e o diâmetro d_C do pino C , e para um dado coeficiente de segurança, permita calcular a máxima carga P admissível, assim como também indicar qual tensão, entre a tensão de tração na haste BD , a tensão de cisalhamento nos pinos B e D , e a tensão de cisalhamento no pino C é a mais crítica; (b) Usar esse programa para a solução dos Probs. 1.50, 1.51 e 1.53.

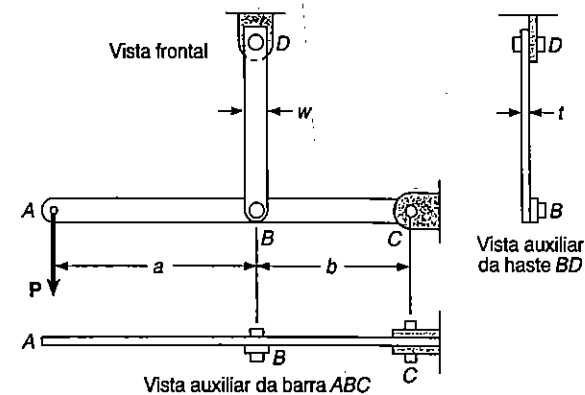


Fig. P1.C4

Capítulo 2

TENSÃO E DEFORMAÇÃO - CARREGAMENTO AXIAL

2.1 INTRODUÇÃO

No Capítulo I analisamos as tensões que surgem pela aplicação de carregamentos em vários membros e conexões, de uma máquina ou estrutura. Aprendemos a projetar membros e conexões de maneira para que eles não viessem a falhar sob especificadas condições de carregamento. Outro importante aspecto da análise e projeto de estruturas se relaciona com as *deformações* causadas pela aplicação das cargas a uma estrutura. É importante evitar que as deformações se tornem tão grandes a ponto de impedir que a estrutura venha a cumprir os fins aos quais estava destinada. Através da análise das deformações pode-se também determinar as tensões.

Na verdade, nem sempre é possível determinar as forças nas barras de uma estrutura pela simples aplicação dos princípios da Estática, isto porque ela se baseia na hipótese de sistemas rígidos e indeformáveis. Considerando, na prática, as estruturas como *deformáveis*, e analisando suas deformações, é possível calcular forças que são *estaticamente indeterminadas*, isto é, indeterminadas dentro dos recursos da análise da Estática. Também, como está indicado na Sec. 1.3, a distribuição de tensões em um dado membro é estaticamente indeterminada, mesmo quando a força que atua no membro é conhecida; neste caso, para determinar a distribuição real das tensões dentro de um membro, torna-se necessário analisar as deformações que nela ocorrem.

Neste capítulo, vamos discutir as deformações de um membro estrutural, seja ele uma barra, viga ou placa submetida a um *carregamento axial*.

Inicialmente, vamos definir *deformação específica normal* num membro, como a *deformação de um membro por unidade de comprimento*. Plotando a tensão versus a deformação específica normal, enquanto cresce a carga aplicada a um membro, obteremos um *diagrama tensão-deformação* para o material em estudo. Deste diagrama, seremos capazes de determinar algumas importantes propriedades do material, tais como o *módulo de elasticidade*, se o material é *dútil* ou *frágil* (Secs. 2.2 a 2.5).

Do diagrama tensão-deformação, também seremos capazes de determinar se as deformações na amostra do material irão desaparecer depois de o carregamento ter sido removido (neste caso, o material é dito ter comportamento *elástico*), ou se resultará numa *deformação plástica* ou *permanente* (Sec. 2.6).

Na Sec. 2.7, iremos discutir o fenômeno da *fadiga*, o qual faz com que os componentes estruturais ou da máquina venham a falhar depois de um grande número de carregamentos repetidos, mesmo que as tensões permaneçam numa faixa elástica.

A primeira parte do capítulo finaliza com a Sec. 2.8, que é voltada para a determinação da deformação de vários tipos de membros sob várias condições de carregamento axial.

Nas Secs. 2.9 e 2.10, iremos considerar *problemas estaticamente indeterminados*, isto é, problemas cujas reações de apoio e as forças internas *não podem* ser determinadas apenas pela Estática. As equações de equilíbrio provenientes do diagrama de corpo livre do membro considerado serão complementadas por relações envolvendo deformações e obtidas da geometria do problema.

Nas Secs. 2.11 a 2.15, constantes características adicionais do material serão introduzidas. Elas incluem o *coeficiente de Poisson*, que relaciona a deformação específica axial e a transversal, o *módulo de elasticidade de volume*, que caracteriza a variação do volume de um material sob pressão hidrostática e o *módulo de elasticidade transversal*, que relaciona as componentes de tensão de cisalhamento com a deformação específica de cisalhamento.

No texto adiante, as tensões são consideradas uniformemente distribuídas em qualquer seção transversal dada, e que também não ultrapassem a faixa elástica. Na Sec. 2.17 iremos considerar as barras chatas, e nas Secs. 2.18 e 2.19 discutiremos as tensões e deformações em membros feitos de material dútil, cujo ponto de escoamento do material é excedido. Também veremos que *deformações plásticas* e *tensões residuais* resultam de tais condições de carregamento.

2.2 DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA NORMAL SOB CARREGAMENTO AXIAL

Vamos considerar uma barra *BC*, de comprimento *L* e seção transversal de área *A*, que é suspensa do ponto *B* (Fig. 2.1a). Se aplicarmos uma carga *P* na extremidade *C*, a barra se alonga (Fig. 2.1b). Marcando-se os valores da intensidade da força *P* e os correspondentes valores de deformação δ (letra grega delta), nós certamente obtaremos um diagrama carga-deformação (Fig. 2.2). Todavia, este diagrama contém informações úteis para o estudo da barra considerada, mas não pode ser usado diretamente para prever deformações de outras barras de mesmo material e que tenham outras dimensões.

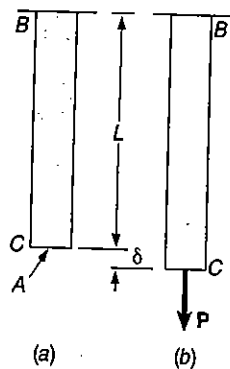


Fig. 2.1

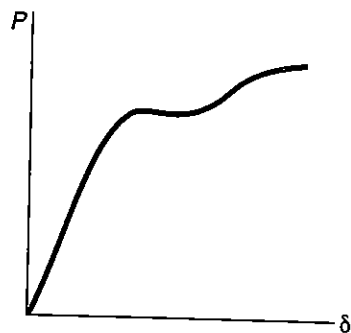


Fig. 2.2 Diagrama carga-deformação.

Notamos que, se uma deformação é causada na barra BC pela carga P , uma carga $2P$ é necessária para causar a mesma deformação na barra $B'C'$, de mesmo comprimento L e com seção transversal de área igual a $2A$ (Fig. 2.3). Note que, em ambos os casos, o valor da tensão é a mesma: $\sigma = P/A$. Por outro lado, a carga P aplicada a uma barra $B''C''$, de mesma área da seção transversal A , mas de comprimento $2L$, provoca uma deformação de 2δ nesta barra (Fig. 2.4), isto é, o dobro da deformação produzida em BC . Em ambos os casos, a razão entre a deformação e o comprimento da barra é a mesma, igual a δ/L . Esta observação nos leva à introdução do conceito de *deformação específica*. Nós definimos a *deformação específica normal* de uma barra sob carga axial como a *deformação por unidade de comprimento* desta barra. Expressamos a deformação específica normal por ϵ (letra grega epsilon), assim

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2.1)$$

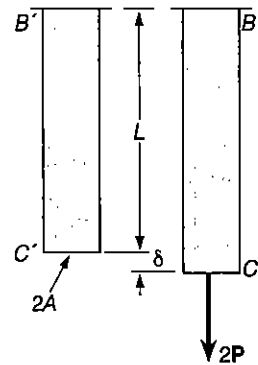


Fig. 2.3

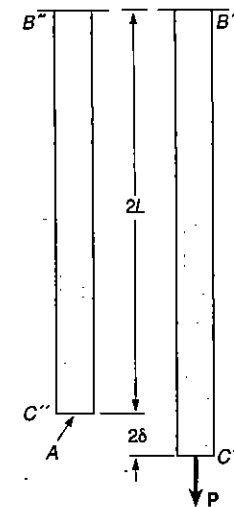


Fig. 2.4

Plotando-se a tensão $\sigma = P/A$ e a correspondente deformação específica $\epsilon = \delta/L$ em um gráfico, obteremos uma curva que caracteriza as propriedades do material e que não depende das dimensões da amostra do material usado. Esta curva é denominada *diagrama tensão-deformação* e será discutida em detalhes na Sec. 2.3.

Uma vez que a barra BC considerada na discussão anterior tinha uma seção transversal uniforme de área A , a tensão normal σ pode ser assumida como sendo constante de valor P/A , ao longo da barra. Então, é apropriado definir a *deformação específica* como uma relação entre a deformação total δ e o comprimento total L da barra. No caso de uma barra cuja área da seção transversal é variável, a tensão normal $\sigma = P/A$ varia ao longo da barra, e é necessário então definir a deformação específica em um determinado ponto Q , considerando um pequeno elemento de comprimento inicial Δx (Fig. 2.5). Chamando $\Delta \delta$ a deformação do elemento sob ação de carregamento, nós definimos a *deformação específica normal no ponto Q* como

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (2.2)$$

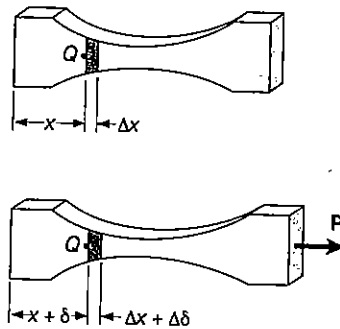


Fig. 2.5

Desde que deformação e comprimento sejam expressos nas mesmas unidades, a deformação específica normal ϵ obtida pela divisão de δ por L (ou $d\delta$ por dx) é uma grandeza adimensional. Então, o mesmo valor numérico é obtido para a deformação específica normal de uma barra, qualquer que seja o sistema de unidades. Considerando, por exemplo, uma barra de comprimento $L = 0,600$ m e de seção transversal uniforme, que se deforma de um valor $\delta = 150 \times 10^{-6}$ m. A deformação específica correspondente é:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6} \text{ m}}{0,600 \text{ m}} = 250 \times 10^{-6} \text{ m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

Note que a deformação poderia ser expressa em micrometro (μm). Poderíamos então escrever:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \mu\text{m}}{0,600 \text{ m}} = 250 \mu\text{m/m} = 250 \mu$$

e lê-se a resposta como "250 micros".

2.3 DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Vimos na Sec. 2.1 que o diagrama que representa as relações entre tensões e deformações específicas de um certo material é uma característica importante desse material. Para a obtenção do diagrama tensão-deformação de certo material, normalmente se faz um *ensaio de tração* em uma amostra do material. Nesse ensaio se usa

comumente um corpo de prova típico do material, indicado na Fig. 2.6. A área da seção transversal da parte cilíndrica central é medida cuidadosamente e duas marcas são desenhadas no corpo do cilindro, separadas de uma distância L_0 .



Fig. 2.6 Corpo de prova típico de ensaio de tração.

O corpo de prova é levado à máquina de teste (Fig. 2.7), que é usada para aplicar a carga centrada P . À medida que aumenta o valor de P , a distância L entre as duas marcas também aumenta (Fig. 2.8). Um medidor indica a distância L , e o alongamento $\delta = L - L_0$ é anotado para cada valor de P . Frequentemente se utiliza um segundo mostrador para medir e anotar as modificações no diâmetro do corpo de prova. Para cada par de valores lidos, P e δ , calcula-se a tensão σ dividindo-se P pela área da seção transversal inicial A_0 do corpo de prova. Calcula-se também a deformação específica ϵ dividindo-se o alongamento δ pelo comprimento inicial L_0 entre as duas marcas. Obtém-se assim o diagrama tensão-deformação marcando ϵ como abscissa e σ como ordenada.

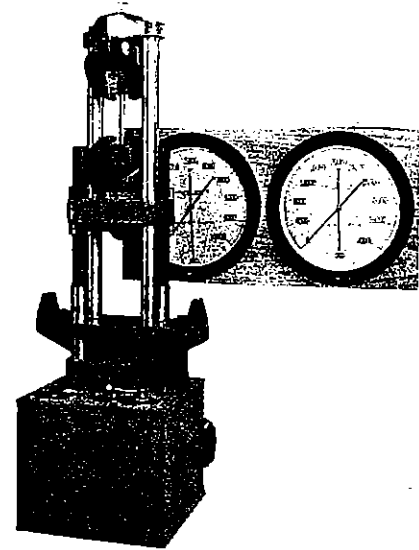


Fig. 2.7 Máquina de testes Universal. (Cortesia de Detroit Testing Machine Co.)



Fig. 2.8

O diagrama tensão-deformação varia muito de material para material, e, para um mesmo material, podem ocorrer resultados diferentes em vários ensaios, dependendo da temperatura do corpo de prova ou da velocidade de crescimento da carga. Entre os diagramas tensão-deformação de vários grupos de materiais é possível, no entanto, distinguir algumas características comuns; elas nos levam a dividir os materiais em duas importantes categorias, que são os materiais *dúteis* e os materiais *frágeis*.

Os materiais dúteis, que compreendem o aço estrutural e outros metais, se caracterizam por apresentarem *escoamento* a temperaturas normais. O corpo de prova é submetido a carregamento crescente, e seu comprimento aumenta, de início, lentamente, sempre proporcional ao carregamento. Desse modo, a parte inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta com grande coeficiente angular (Fig. 2.9). Entretanto, quando é atingido um valor crítico de tensão σ_e , o corpo de prova sofre uma

longa deformação, com pouco aumento da carga aplicada. Essa deformação é causada por deslizamento relativo de camadas do material de superfícies oblíquas, o que mostra que esse fato se dá principalmente por tensões de cisalhamento. Na Fig. 2.9 os diagramas tensão-deformação de dois materiais dúteis nos mostram que o alongamento do material após o início do escoamento pode ser até 200 vezes maior do que o alongamento ocorrido antes do escoamento se iniciar.

Quando o carregamento atinge um certo valor máximo, o diâmetro do corpo começa a diminuir, devido à perda de resistência local (Fig. 2.10). Esse fenômeno é conhecido como *estricção*. Após ter começado a estrição, um carregamento mais baixo é suficiente para manter o corpo de prova se deformando, até que sua ruptura se dê (Fig. 2.10b). Podemos ver que a ruptura se dá segundo uma superfície em forma de cone, que forma um ângulo aproximado de 45° com a superfície inicial do corpo de prova. Isso mostra que a ruptura dos materiais dúteis ocorre sob tensão de cisalhamento, e confirma o fato de que, com carga axial, as maiores tensões de cisalhamento ocorrem em planos que formam 45° com a direção da carga (conforme Sec. 1.6). A tensão σ_e correspondente ao início do escoamento é chamada *tensão de escoamento* do material; a tensão σ_u correspondente à máxima carga aplicada ao material é conhecida como *tensão última*, e a tensão σ_R correspondente ao ponto de ruptura é chamada *tensão de ruptura*.

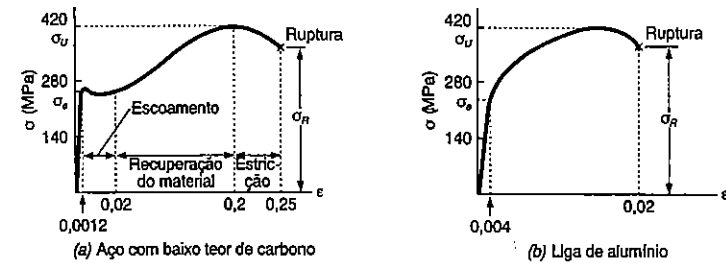


Fig. 2.9 Diagrama tensão-deformação de dois materiais dúteis.

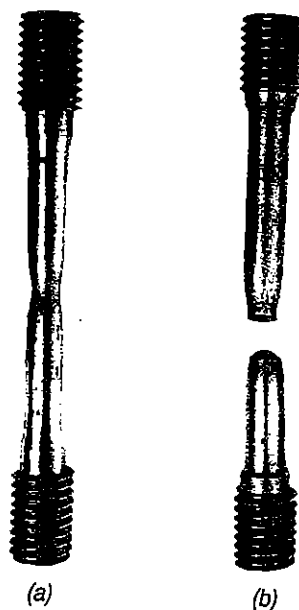


Fig. 2.10

Materiais frágeis, como ferro fundido, vidro e pedra, são caracterizados por uma ruptura que ocorre sem nenhuma mudança sensível no modo de deformação do material (Fig. 2.11). Então, para os materiais frágeis não existe diferença entre tensão última e tensão de ruptura. Além disso, a deformação até a ruptura é muito menor nos materiais frágeis do que nos materiais dúteis. A Fig. 2.12 mostra que não acontece a estrição em materiais frágeis, e que a ruptura se dá em uma superfície perpendicular ao carregamento. Pode-se concluir daí que a ruptura dos materiais frágeis se deve principalmente a tensões normais¹.

¹ Os testes de tração referidos nesta Seção são efetuados com os materiais à temperatura ambiente. Entretanto, um material que é dútil à temperatura ambiente pode apresentar características de material frágil a temperaturas muito baixas, enquanto um material frágil pode apresentar-se como material dútil a altas temperaturas. Para temperaturas diferentes do ambiente, devemos, então, nos referir a um material em estado dútil ou um material em estado frágil, ao invés de dizermos materiais dúteis ou frágeis.

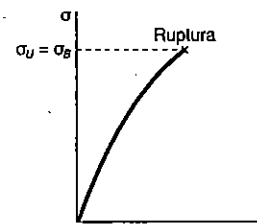


Fig. 2.11



Fig. 2.12

Os diagramas tensão-deformação da Fig. 2.9 mostram que o aço estrutural e o alumínio, ambos materiais dúteis, apresentam diferenças de comportamento no escoamento. Para o aço estrutural (Fig. 2.9a), as tensões permanecem constantes para uma grande variação das deformações, após o início do escoamento. Depois o valor da tensão deve crescer para que o material continue a alongar, até atingir o valor σ_U . Isto se dá devido a uma propriedade do material conhecida como recuperação. A tensão de escoamento do aço estrutural é obtida por observação, durante o teste de tração, dos valores da carga. Após um período de crescimento constante, observa-se que a carga cai subitamente para um valor ligeiramente menor, que se torna invariável durante a ocorrência do escoamento. Quando o teste é realizado cuidadosamente, é possível distinguir entre o *valor superior de escoamento*, correspondente à força que atua imediatamente antes do escoamento, e o *valor inferior de escoamento*, correspondente à força necessária para manter o escoamento. Como o valor superior é momentâneo, adota-se o valor inferior para a determinação da tensão de escoamento do material.

No caso do alumínio (Fig. 2.9b) e de muitos outros materiais dúteis, o início do escoamento não é caracterizado pelo trecho horizontal do diagrama (trecho este conhecido como *patamar de escoamento*); ao invés disso, as tensões continuam aumentando – embora não mais de maneira linear – até que a tensão última é alcançada. Começa então a estrição que pode levar à ruptura. Para esses materiais se define um valor convencional para a tensão σ_e . A tensão convencional de escoamento é obtida tomando-se no eixo das abscissas a deformação específica $\epsilon = 0,2\%$ (ou $\epsilon = 0,002$), e por esse ponto traçando-se uma reta paralela ao trecho linear inicial do diagrama (Fig. 2.13). A tensão σ_e corresponde ao ponto de interseção dessa reta com o diagrama; é definida como tensão convencional a 0,2%.

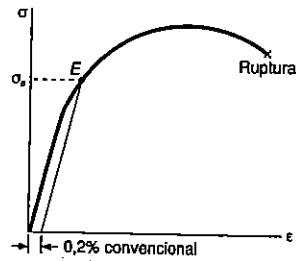


Fig. 2.13 Determinação da tensão de escoamento convencional.

Uma medida usual da dutibilidade de um material é o seu *alongamento percentual* que é definido como

$$\text{Alongamento percentual} = 100 \frac{L_R - L_0}{L_0}$$

onde L_0 e L_R são, respectivamente, o comprimento inicial do corpo de prova e seu comprimento final no instante da ruptura.

Outra medida da dutibilidade que é usada às vezes é a *redução percentual da área*, definida como

$$\text{Redução percentual da área} = 100 \frac{A_0 - A_R}{A_0}$$

onde A_0 e A_R são, respectivamente, a área da seção transversal do corpo de prova e a área mínima da ruptura. Para o aço estrutural, uma redução na área de 60 a 70% é comum.

Até agora nos referimos apenas a testes de tração. Se o corpo de prova feito de material dútil recebesse uma carga de compressão, o diagrama tensão-deformação obtido seria o mesmo do caso anterior, desde o trecho reto inicial, passando pelo trecho de escoamento e pelo de recuperação do material. Digno de nota é o fato de que, para o aço, a tensão de escoamento é a mesma para a tração e a compressão. Para valores altos de deformação específica, o comportamento nos dois casos passa a ser diferente, devendo-se lembrar que a estricção não pode ocorrer na compressão.

Para a maior parte dos materiais frágeis, verifica-se que a tensão última de compressão é muito maior que a tensão última na tração. Isso se deve a imperfeições do material, como fendas e cavidades, que debilitam o material, diminuindo sua resistência à tração.

2.4 TENSÕES E DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS VERDADEIRAS

Sabemos que as tensões marcadas nos diagramas das Figs. 2.9 e 2.11 foram obtidas pela divisão da carga P pela área de seção transversal A_0 , medida antes que qualquer deformação atuasse no corpo de prova. Como a área da seção transversal diminui com o aumento da carga P , as tensões marcadas nos diagramas não correspondem aos valores reais de tensão no material. A diferença entre a tensão de uso prático $\sigma = P/A_0$ que calculamos e a *tensão verdadeira* $\sigma_v = P/A$, que se obtém com a divisão da carga P pela área da seção transversal deformada, torna-se visível nos materiais dúteis em escoamento. A tensão de uso prático σ é diretamente proporcional a P , e seu valor diminui com P durante a estricção. A tensão verdadeira que é proporcional a P é também inversamente proporcional a A , e seu valor aumenta até a ruptura do corpo de prova.

Muitos cientistas usam uma definição diferente de deformação específica, no lugar do valor de uso prático $\epsilon = \delta/L_0$. Em vez de usar o alongamento total δ e o comprimento inicial L_0 , usam todos os valores sucessivos de L que foram anotados. Dividindo cada incremento $\Delta\epsilon = \Delta L/L$. Definem então a *deformação específica verdadeira* como o somatório dos valores $\Delta\epsilon$:

$$\epsilon_v = \Sigma \Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L)$$

Substituindo o somatório por uma integração, eles podem ainda definir a *deformação específica verdadeira* como o somatório dos valores $\Delta\epsilon$:

$$\epsilon_v = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (2.3)$$

O diagrama obtido quando se marcam no gráfico os valores da tensão verdadeira e da deformação específica verdadeira (Fig. 2.14) reflete de maneira mais acurada o comportamento do material. Como já vimos, não ocorre queda no valor da tensão verdadeira durante a estricção. Além disso, quando se usam tensões e deformações específicas verdadeiras, os resultados obtidos em ensaios de tração e compressão levam ao mesmo diagrama tensão-deformação. Esse fato não ocorre no caso de altos valores da deformação específica, quando se usam tensões e deformações de uso prático.

O engenheiro, no entanto, que tem a responsabilidade de determinar se uma dada carga leva a tensões e deformações aceitáveis, deve usar dados fáceis de avaliar, que são a área A_0 e o comprimento L_0 , do corpo de prova indeformado. Usará então o diagrama tensão-deformação obtido pelos valores $\sigma = P/A_0$ e $\epsilon = \delta/L_0$.

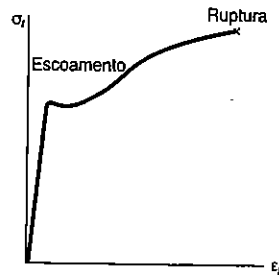


Fig. 2.14 Tensões verdadeiras e deformações específicas para um material dúctil.

2.5 LEI DE HOOKE; MÓDULO DE ELASTICIDADE

As estruturas correntes são projetadas de modo a sofrerem apenas pequenas deformações, que não ultrapassem os valores do diagrama tensão-deformação correspondentes ao trecho reto do diagrama. Na parte inicial do diagrama, a tensão σ é diretamente proporcional à deformação específica ϵ e podemos escrever

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.4)$$

Essa relação é conhecida como *Lei de Hooke*, e se deve ao matemático inglês Robert Hooke (1635-1703). O coeficiente E é chamado *módulo de elasticidade* do material, ou *módulo de Young* (cientista inglês, 1773-1829). Como a deformação específica é uma grandeza adimensional, o módulo E é expresso na mesma unidade de σ , pascal ou seus múltiplos no Sistema Internacional, e psi ou ksi no Sistema Inglês de unidades.

Ao maior valor da tensão σ para o qual a Lei de Hooke é válida se denomina *limite de proporcionalidade* do material. Quando o material é dúctil e possui o início do escoamento em um ponto bem definido do diagrama (Fig. 2.9a), o limite de proporcionalidade coincide com o ponto de escoamento. Para outros materiais, o limite de proporcionalidade não se define tão facilmente, pois é difícil precisar em que ponto as tensões deixam de ser proporcionais às deformações. Nesses casos, entretanto, o fato de usarmos a Lei de Hooke para valores de tensão ligeiramente acima do limite de proporcionalidade real não vai levar a erros significativos.

Algumas propriedades físicas dos materiais estruturais, como resistência, dutibilidade, resistência à corrosão etc., podem ser modificadas por tratamento térmico, presença de ligas metálicas ou pelo próprio processo usado na sua manufatura. Podemos notar, por exemplo, no diagrama tensão-deformação do ferro puro e de outros três tipos de aço (Fig. 2.15) que existem várias diferenças das tensões de escoamento,

tensões últimas e dos valores finais de deformação específica (dutibilidade) para esses metais. Todos eles, entretanto, têm o mesmo módulo de elasticidade; em outras palavras, sua "rigidez" ou capacidade de resistir a deformações é a mesma, dentro da região linear do diagrama. Assim, se em uma estrutura se substitui um aço de alta resistência por outro de menor resistência, e todas as dimensões das peças são mantidas, a estrutura ficará sobrecarregada, mas sua rigidez permanece a mesma.

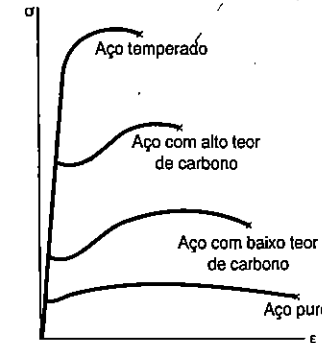


Fig. 2.15

2.6 COMPORTAMENTO ELÁSTICO E COMPORTAMENTO PLÁSTICO DOS MATERIAIS

Um material tem comportamento *elástico* quando as deformações causadas por um certo carregamento desaparecem com a retirada do carregamento. Chama-se *limite de elasticidade* do material ao maior valor de tensão para o qual o material ainda apresenta comportamento elástico.

Se o material tem o início de escoamento bem definido (Fig. 2.9a), então o limite de elasticidade e o limite de proporcionalidade coincidem com a tensão de escoamento. Assim, o material se comporta como elástico enquanto as tensões se mantêm abaixo do valor do escoamento.

Se o material atingir o escoamento e se deformar, como descreve a Sec. 2.3, quando a carga é retirada as tensões e deformações decrescem de maneira linear, ao longo de uma linha reta CD paralela à reta AB da curva de carregamento (Fig. 2.16). O fato de ϵ não voltar ao ponto zero indica que o material sofreu uma *deformação permanente ou plástica*. Para a maior parte dos materiais, a deformação plástica atingida

não depende apenas da máxima tensão a que o material fica sujeito, mas depende também do tempo decorrido até a retirada do carregamento. A parcela da deformação plástica que depende da tensão é chamada *deformação lenta* do material, e a parcela que depende do tempo de carregamento – e da temperatura – é chamada *fluência*.

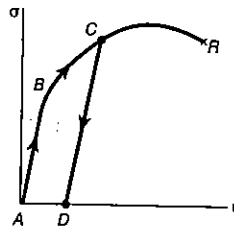


Fig. 2.16

Quando o material não possui início de escoamento bem definido, não se consegue determinar o limite de elasticidade com precisão. Podemos então adotar para esse limite a tensão convencional de escoamento (Sec. 2.3), sem erros apreciáveis. Podemos verificar na Fig. 2.13 que a linha reta usada para determinar o ponto da tensão de escoamento convencional representa a curva de descarregamento do material, depois que a tensão σ_e é atingida. O material não se comporta como perfeitamente elástico, e a deformação plástica resultante será tão pequena quanto a deformação específica adotada para determinação da tensão convencional.

Se, após ter sido carregado e descarregado, o corpo de prova é carregado novamente (Fig. 2.17), a nova curva de carregamento praticamente coincidirá com aquela obtida do descarregamento, até pouco antes de atingir o ponto C. Ocorre aí um desvio da nova curva para a direita, até encontrar o diagrama tensão-deformação original. A parte reta do novo diagrama de carregamento é mais longa que a do diagrama inicial. Assim, os limites de elasticidade e proporcionalidade tiveram seus valores aumentados, em virtude da recuperação de resistência que ocorreu durante o carregamento inicial. De qualquer forma, a deformação específica de ruptura permanece a mesma, e a dutibilidade do material, que agora é medida no ponto D, diminui.

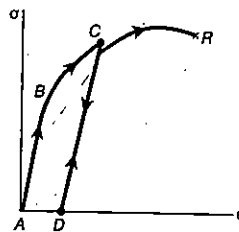


Fig. 2.17

Na discussão acima, o corpo de prova foi carregado duas vezes no mesmo sentido, com carregamentos de tração. Vamos agora considerar o caso em que o segundo carregamento é aplicado em sentido contrário ao primeiro.

Vamos considerar que o material é o aço doce, que tem tensão de escoamento de mesmo valor para a tração e compressão. Inicialmente, aplica-se carga de tração até que o ponto C do diagrama seja atingido (Fig. 2.18). Após o descarregamento (ponto D), aplica-se uma carga de compressão, levando o material a atingir o ponto H, onde a tensão é igual a $-\sigma_e$. A porção DH da curva tensão-deformação é curvada e não está bem definido o ponto de escoamento. Isto é dito como *efeito Bauschinger*. Como a carga de compressão é mantida, o material escoou ao longo da linha HJ.

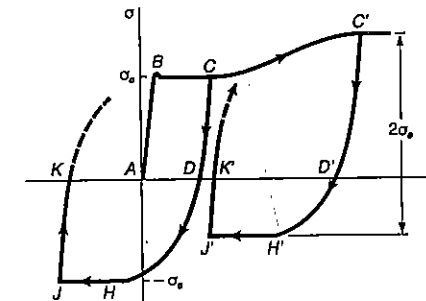


Fig. 2.18

Se o carregamento é removido quando é atingido o ponto J, a tensão retorna a zero através da linha JK, e notamos que a declividade de JK é igual ao módulo de elasticidade E. A deformação resultante AK pode ser positiva, negativa ou nula, dependendo apenas do trecho percorrido ao longo das linhas BC e HJ. Se a carga de tração é novamente aplicada ao corpo de prova, a porção do diagrama tensão-deformação começando no ponto K (linha tracejada) irá se curvar para a direita até atingir a tensão de escoamento σ_e .

Se o carregamento inicial é suficiente para levar o material a máxima deformação plástica (ponto C'), o descarregamento se dará segundo a linha C'D'. Então, aplica-se o carregamento contrário, a tensão torna-se compressiva e atinge o máximo valor em H', onde tem início o escoamento do material e, mantendo-se ao longo da linha H'J'. Notamos que o máximo valor desta tensão de compressão é menor que τ_e , mas a variação total das tensões entre C' e H', continua igual a $2\sigma_e$.

Se o ponto K ou K' coincide com a origem A do diagrama, a deformação permanente é nula, e o material aparentemente retornou às suas condições iniciais. Entretanto, mudanças internas no material irão ocorrer; se a seqüência de carregamento e descarregamento é repetida algumas vezes, o material irá se romper sem

qualquer aviso, depois de algumas repetições (ruptura brusca). Isso indica que as deformações plásticas excessivas a que o material foi submetido levaram a mudanças radicais na sua estrutura interna. Por isso, carregamentos alternados em regime de deformações plásticas raramente são permitidos na prática, e somente em condições rigorosas de controle. Em algumas situações isto pode ser fácil de ser observado, como ao desentortar e endireitar peças danificadas ou no alinhamento de peças estruturais.

2.7 CARGAS REPETIDAS; FADIGA

Nas seções precedentes, examinamos o comportamento de um corpo de prova sujeito à carga axial. Vimos que, se a tensão aplicada não ultrapassa o limite de elasticidade do material, este volta às condições iniciais quando é retirado o carregamento. Poderíamos então concluir agora que uma certa carga pode ser repetida muitas vezes, desde que as tensões permaneçam dentro de valores do regime elástico. Essa conclusão é correta para um número de repetições da ordem de dezena ou centena. Para um número de repetições do carregamento da ordem de milhares ou milhões de vezes, ela deixa de ser válida. Nesses casos, a ruptura se dá a uma tensão bem abaixo da tensão de ruptura obtida com carregamento estático; a este fenômeno se dá o nome de *fadiga*. A ruptura por fadiga é sempre uma ruptura frágil, mesmo para materiais dúteis.

A fadiga deve ser considerada no projeto de estruturas e componentes de máquinas que possam estar sujeitas a carregamentos repetidos ou alternados. O número de ciclos de carregamento que pode ocorrer durante a vida útil de uma peça é muito variável. Por exemplo, uma ponte rolante de uma indústria pode ser carregada até dois milhões de vezes em 25 anos (cerca de 300 carregamentos por dia), um virabrequim de automóvel será solicitado cerca de um bilhão de vezes se o automóvel rodar 300.000 km e uma hélice de turbina pode ser carregada centenas de bilhões de vezes durante a sua vida útil.

Alguns carregamentos são de natureza variável. Assim, a passagem de tráfego sobre uma ponte provoca alterações nos valores das tensões que existem somente por causa do peso da ponte. A condição mais severa ocorre quando se dá uma alternância completa de carga durante um ciclo de carregamento. As tensões no eixo de um vagão de estrada de ferro se alternam completamente a cada meia volta da roda.

O número de ciclos de carregamentos repetidos ou alternados pode ser determinado experimentalmente para qualquer nível de tensão máxima. Quando uma série de testes é feita para vários níveis de tensão máxima, podemos desenhar uma curva $\sigma - n$. Para cada teste, obtemos a ordenada σ e a abscissa n , que são a tensão máxima e um determinado número de ciclos. Como n é um número muito grande, as abscissas são marcadas em escala logarítmica.

A Fig. 2.19 mostra uma curva típica $\sigma - n$ para o aço. O número de ciclos necessário para causar a ruptura é relativamente baixo para valores altos da tensão aplicada. À medida que a intensidade das tensões vai baixando, o número de ciclos de

carregamento necessário para causar a ruptura aumenta, até que se atinge um valor das tensões conhecido como o *limite de duração*, para o qual a ruptura não ocorre, mesmo para um número muito grande de ciclos. Para o aço de baixo teor de carbono, o limite de duração é aproximadamente metade da tensão de ruptura do aço.

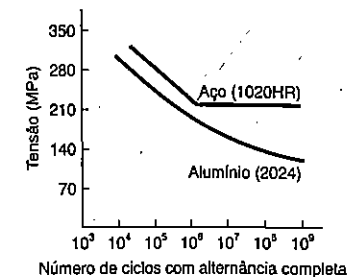


Fig. 2.19

Para os metais não-ferrosos, como o cobre e o alumínio, a curva $\sigma - n$ (Fig. 2.19) mostra que a tensão de ruptura continua decrescendo de valor com o aumento do número de ciclos. Para tais metais o limite de duração é fixado arbitrariamente como a tensão de ruptura após 500 milhões de ciclos de carregamento.

Exames feitos em corpos de provas, eixos e molas, que romperam por efeito de fadiga, mostram que a ruptura se iniciou em uma fissura microscópica ou uma falha similar do material. A cada novo carregamento a falha aumentava um pouco sua dimensão. Devido aos sucessivos ciclos de carregamento, a fissura tomou uma grande porção do material, e a parte que não foi danificada tornou-se insuficiente para resistir à tensão, rompendo bruscamente. O estado da superfície do material de teste ou do corpo de prova tem influência no valor da tensão no limite de duração, pois qualquer falha ou fissura pode dar início ao processo de fadiga. O limite de duração é maior nos corpos de prova com superfície preparada e polida do que naquelas peças simplesmente usinadas, ou que sofreram alguma oxidação. Para aplicações de materiais junto ao mar, ou em ambientes agressivos ou corrosivos, pode ocorrer uma redução de 50% no limite de duração.

2.8 DEFORMAÇÕES DE BARRAS SUJEITAS A CARGAS AXIAIS

Tomemos uma barra homogênea BC de comprimento L e seção transversal uniforme de área A sujeita à força axial centrada P (Fig. 2.20). Se a tensão atuante $\sigma = P/A$ não exceder o limite de proporcionalidade do material, podemos aplicar a Lei de Hooke e escrever:

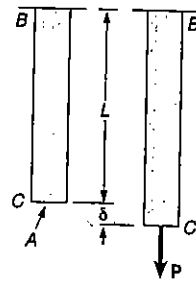


Fig. 2.20

$$\sigma = E \epsilon \tag{2.4}$$

segue-se então que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \tag{2.5}$$

Na Sec. 2.2 foi definida a deformação específica normal $\epsilon = \delta/L$, portanto

$$\delta = \epsilon L \tag{2.6}$$

e, substituindo (2.5) em (2.6) temos:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

A Equação 2.7 só pode ser usada se a barra for homogênea (módulo de elasticidade E constante), tiver seção transversal uniforme de área constante A e a carga for aplicada nas extremidades da barra. Se as forças forem aplicadas em outros pontos, ou se a barra consiste de várias partes com diferentes seções transversais ou compostas de diferentes materiais, devemos dividi-la em segmentos que, individualmente satisfaçam as condições de aplicação da Fórmula 2.7. Chamando de P_i , L_i , A_i e E_i , respectivamente, à força, ao comprimento, à área e ao módulo de elasticidade correspondentes ao elemento i , vamos expressar a deformação total da barra como:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

Vimos na Sec. 2.2 que, no caso de barras com seção transversal variável (Fig. 2.5), a deformação específica ϵ depende da posição do ponto Q , onde ela é definida e calculada como $\epsilon = d\delta/dx$. Retirando dessa expressão o valor $d\delta$ e levando à Fórmula 2.5, podemos exprimir a deformação do elemento de comprimento dx como:

$$d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE}$$

A deformação total da barra, δ , é obtida por integração estendida ao comprimento L .

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE} \tag{2.9}$$

A Fórmula 2.9 deve ser usada no lugar da Fórmula 2.7 quando a área da seção transversal varia como função de x e também quando a forma interna P depende de x , como é o caso da barra sujeita ao próprio peso.

EXEMPLO 2.1

Determine a deformação da barra de aço da figura sob a ação das cargas indicadas ($E = 200$ GPa).

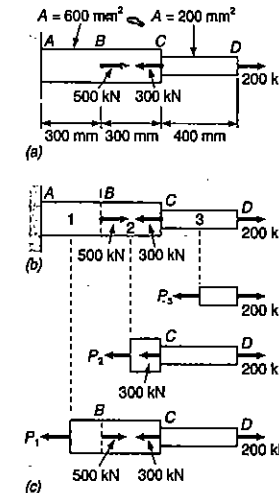


Fig. ex.2.21

Dividimos a barra nos três segmentos indicados na Fig. 2.21b e escrevemos:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &= 0,300 \text{ m} & L_3 &= 0,400 \text{ m} \\ A_1 = A_2 &= 600 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & A_3 &= 200 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Para determinar as forças internas P_1 , P_2 e P_3 , precisamos passar seções transversais pelas três partes da peça, e desenhar o diagrama de corpo livre da parte da barra que fica à direita de cada seção (Fig. 2.21c). Estudando o equilíbrio de cada uma das partes, obtemos:

$$\begin{aligned} P_1 &= 400 \text{ kN} = 400 \times 10^3 \text{ N} \\ P_2 &= -100 \text{ kN} = -100 \times 10^3 \text{ N} \\ P_3 &= 200 \text{ kN} = 200 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

Levamos os valores obtidos à Equação 2.8 e calculamos:

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right) \\ &= \frac{1}{200 \times 10^9} \left[\frac{(400 \times 10^3)(0,300)}{600 \times 10^{-6}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-100 \times 10^3)(0,300)}{600 \times 10^{-6}} + \frac{(200 \times 10^3)(0,400)}{200 \times 10^{-6}} \right] \\ \delta &= 2,75 \times 10^{-3} \text{ m} = 2,75 \text{ mm} \end{aligned}$$

A barra BC da Fig. 2.20, que foi usada para deduzir a Fórmula 2.7, e a barra AD da Fig. 2.21, que foi estudada no Exemplo 2.1, possuíam ambas uma extremidade fixada em suportes indesejáveis. Nos dois casos, então, a deformação δ da barra foi igual ao deslocamento de sua extremidade. Quando as duas pontas de uma barra são livres, a deformação da barra é medida pelo *deslocamento relativo* de suas extremidades. Tomando como exemplo a estrutura da Fig. 2.22a, que consiste de três barras elásticas de comprimento L ligadas em A por um pino rígido. Quando a força P é aplicada em B , as três barras se deformam (Fig. 2.22b). A deformação das barras AC e AC' é medida pelo deslocamento do ponto A , δ_A , pois essas barras são fixas nos suportes C e C' . Por outro lado, a barra AB tem extremidades livres e sua deformação é medida pela diferença de deslocamentos δ_A e δ_B dos pontos A e B , isto é, pelo deslocamento relativo de B em relação a A . Chamando esse deslocamento relativo de $\delta_{B/A}$, escrevemos

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \quad (2.10)$$

sendo A e E , respectivamente, a área da seção transversal e o módulo de elasticidade da barra AB .

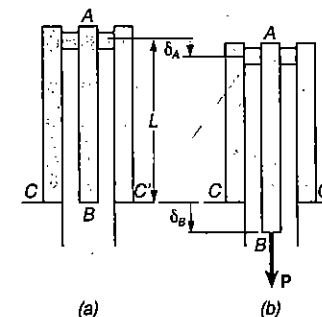
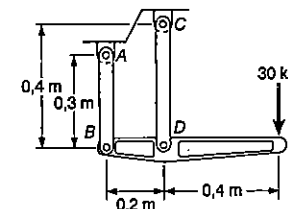


Fig. 2.22

PROBLEMA RESOLVIDO 2.1

A barra rígida BDE é suspensa por duas hastes AB e CD . A haste AB é de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$) com área da seção transversal de 500 mm^2 ; a haste CD é de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) com área da seção transversal de 600 mm^2 . Para a força de 30 kN determine: a) deslocamento de B ; b) deslocamento de D ; c) deslocamento de E .



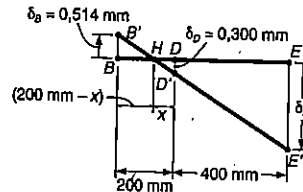
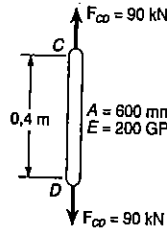
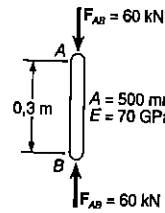
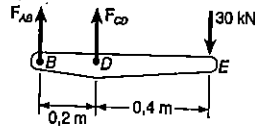
Corpo livre: Barra BDE

$$+) \Sigma M_B = 0: -(30 \text{ kN})(0,6 \text{ m}) + F_{CD}(0,2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \quad \text{tração}$$

$$+) \Sigma M_D = 0: -(30 \text{ kN})(0,4 \text{ m}) - F_{AB}(0,2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \quad \text{compressão}$$



a) Deslocamento de B. A força interna na haste AB é de compressão, e temos $P = -60 \text{ kN}$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0,3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$

O sinal negativo indica uma contração da barra AB, e, em consequência, o deslocamento para cima de B:

$$\delta_B = 0,514 \text{ mm} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

b) Deslocamento de D. Na barra CD a força é $P = 90 \text{ kN}$, escrevemos

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0,4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ MPa})} = 300 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_D = 0,300 \text{ mm} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

c) Deslocamento de E. Sejam B' e D' as posições de B e D após o deslocamento. Como a barra BDE é rígida, os pontos B', D' e E' estão em uma linha reta, e podemos escrever

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \quad \frac{0,514 \text{ mm}}{0,300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x}$$

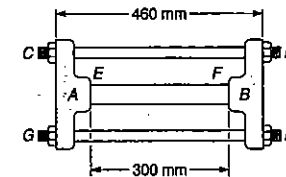
$$x = 73,7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \quad \frac{\delta_E}{0,300 \text{ mm}} = \frac{(400 \text{ mm}) + (73,7 \text{ mm})}{73,7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1,928 \text{ mm} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

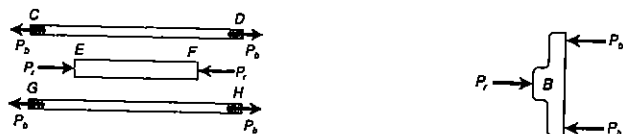
PROBLEMA RESOLVIDO 2.2

Os suportes rígidos A e B comprimem uma barra de alumínio EF de 38 mm de diâmetro através de dois parafusos de aço, CD e GH, ambos de 20 mm de diâmetro. O passo da rosca de cada parafuso é de 2,5 mm e, após terem sido ajustados, os parafusos sofrem um aperto de um quarto de volta. Sabendo-se que para o aço $E = 200 \text{ GPa}$ e para o alumínio $E = 70 \text{ GPa}$, determinar a tensão normal na barra.



Deformações dos parafusos CD e GH. Apertando as porcas, estas produzem tração nos parafusos. Devido a simetria, ambos estão sujeitos a mesma força interna P_p e sofrem a mesma deformação δ_p . Temos,

$$\delta_p = + \frac{P_p L_p}{A_p E_p} = + \frac{P_p (0,460)}{\frac{1}{4} \pi (0,020)^2 (200 \times 10^9)} = + 7,32 \times 10^{-9} P_p \quad (1)$$



Barra EF. A barra está comprimida. Denotando por P_p a intensidade da força na barra e por δ_b a deformação da barra, escrevemos:

$$\delta_b = - \frac{P_b L_b}{A_b E_b} = - \frac{P_b (0,300)}{\frac{1}{4} \pi (0,038)^2 (70 \times 10^9)} = - 3,78 \times 10^{-9} P_b \quad (2)$$

Deslocamento relativo entre D e B. Apertando-se ambas as porcas de um quarto de volta, estas produzem, nas extremidades D e H , um deslocamento de $1/4$ (2,5 mm) relativo ao suporte B . Considerando a extremidade D , escrevemos:

$$\delta_{D/B} = \frac{1}{4} (2,5 \times 10^{-3}) = 6,25 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (3)$$

Mas $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, onde δ_D e δ_B representam os deslocamentos de D e B , respectivamente. Se assumirmos que o suporte A tem uma posição fixa enquanto as porcas D e H estão sendo apertadas, esses deslocamentos são iguais às deformações dos parafusos e da barra. Temos então,

$$\delta_{D/B} = \delta_p - \delta_b \quad (4)$$

Substituindo (1), (2) e (3) em (4), obtemos:

$$6,25 \times 10^{-4} = 7,32 \times 10^{-9} P_p + 3,78 \times 10^{-9} P_b \quad (5)$$

Diagrama de Corpo Livre: Suporte B

$$\pm \Sigma F = 0: \quad P_b - 2P_p = 0 \quad P_b = 2P_p \quad (6)$$

Forças nos parafusos e na barra

Substituindo por P_b de (6) em (5), vem:

$$6,25 \times 10^{-4} = 7,32 \times 10^{-9} P_p + 3,78 \times 10^{-9} (2P_p)$$

$$P_p = 42 \text{ kN}$$

$$P_b = 84 \text{ kN}$$

Tensão na barra

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{84 \times 10^3}{\frac{1}{4} \pi (0,038)^2} \quad \sigma_b = 74 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS

2.1 Uma haste de poliestireno, de comprimento 300 mm e diâmetro 25,4 mm, é submetida a uma carga de tração de 3560 N. Sabendo-se que $E = 3,1$ GPa, determinar: (a) o alongamento da haste; (b) a tensão normal na haste.

2.2 Um arame de aço de 60 m de comprimento não deve alongar-se mais do que 48 mm, quando é aplicada uma tração de 6 kN. Sendo $E = 200$ GPa, determinar: (a) o menor diâmetro que pode ser especificado para o arame; (b) o correspondente valor da tensão normal.

2.3 Um arame de 80 m de comprimento e diâmetro de 5 mm é feito de um aço com $E = 200$ GPa e tensão última de 400 MPa. Se um coeficiente de segurança de 3,2 é desejado, qual é: (a) a maior tração admissível no arame; (b) o correspondente alongamento do arame?

2.4 Um fio de nylon está sujeito a uma tração de 9,0 N. Sabendo-se que $E = 3,45$ GPa e que a máxima tensão normal admissível é de 40 MPa, determinar: (a) o diâmetro necessário para o fio; (b) o correspondente acréscimo percentual do comprimento do fio.

2.5 Uma haste de controle feita de latão-amarelo deve alongar-se de 3,2 mm, quando sujeito a uma carga de 4000 N. Sabendo-se que $E = 105$ GPa e que a máxima tensão normal admissível é de 415 MPa, determinar: (a) o menor diâmetro que pode ser especificado para a haste; (b) o correspondente comprimento necessário da haste.

2.6 Num arame de alumínio de 4 mm de diâmetro, é observado um alongamento de 25 mm, quando a tração no arame é de 400 N. Sabendo-se que $E = 70$ GPa e, que a tensão última para o alumínio é de 110 MPa, determinar: (a) o comprimento do arame; (b) o coeficiente de segurança.

2.7 Uma barra de alumínio de 1,5 m de comprimento não poderá alongar-se mais do que 1 mm e a tensão normal não exceder a 40 MPa, quando estiver sujeita a uma carga axial de 3 kN. Sabendo-se que $E = 70$ GPa, determinar o diâmetro necessário da barra.

2.8 Um fio de nylon está sujeito a uma tração de 10 N. Sabendo-se que $E = 3,45 \text{ GPa}$, que a máxima tensão normal admissível é de 40 MPa, e que o comprimento do fio não poderá aumentar mais do que 1%, determinar o diâmetro necessário do fio.

2.9 Duas barras cilíndricas maciças são ligadas em B e carregadas como mostrado. A barra AB é de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e a barra BC é de latão ($E = 105 \text{ GPa}$). Determinar: (a) a deformação total da barra composta ABC; (b) a deflexão do ponto B.

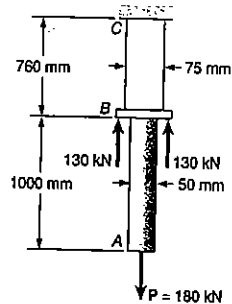


Fig. P2.9

2.10 Duas barras cilíndricas maciças são ligadas em B e carregadas como mostrado. A barra AB é de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e a barra BC é de latão ($E = 105 \text{ GPa}$). Determinar: (a) a deformação total da barra composta ABC; (b) a deflexão do ponto B.

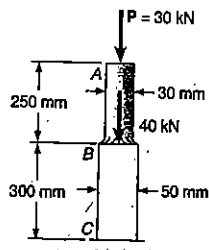


Fig. P2.10

2.11 Para a barra composta do Prob. 2.10, determinar: (a) a carga P, para que a deformação total da barra seja $-0,2 \text{ mm}$; (b) a correspondente deflexão do ponto B.

2.12 Para a barra composta do Prob. 2.9, determinar: (a) a carga, para a qual a deformação total da barra resulta nula; (b) a correspondente deflexão do ponto B.

2.13 Duas barras cilíndricas maciças AC e CD, ambas de mesma liga de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$), são soldadas juntas em C e submetidas ao carregamento indicado. Determinar: (a) a deformação total da barra composta ACD; (b) a deflexão do ponto C.

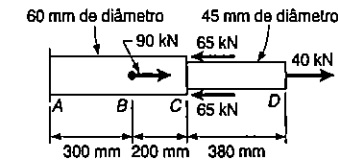


Fig. P2.13

2.14 Uma amostra para ensaio de 5 mm de espessura deve ser cortada de uma placa de vinil ($E = 3,10 \text{ GPa}$) e submetida a uma carga de tração de 1,5 kN. Determinar: (a) a deformação total da amostra; (b) a deformação da mesma, na porção central.

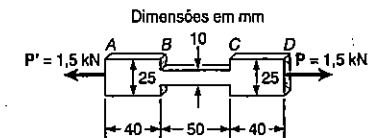


Fig. P2.14

2.15 Uma barra maciça de latão de 150 mm de comprimento e 10 mm de diâmetro se ajusta perfeitamente, dentro de um tubo de mesmo comprimento, com 15 mm de diâmetro externo e 10 mm de diâmetro interno. Uma porção de 50 mm da barra está colada ao tubo e sobre esta é aplicada uma carga de 27 kN, como mostrado. Sabendo-se que $E = 105 \text{ GPa}$, determinar: (a) a deflexão do ponto A; (b) o máximo valor da tensão normal nesse conjunto.

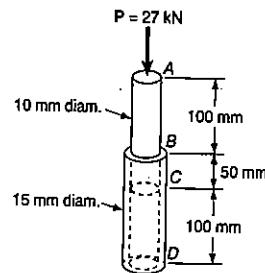


Fig. P2.15

2.16 Um tubo de alumínio de 250 mm de comprimento ($E = 70$ GPa), e com diâmetro externo de 36 mm e interno de 28 mm, pode ser fechado em ambas as extremidades por meio de tampas com rosca simples, de 1,5 mm de passo. Após uma das tampas ser totalmente apertada, coloca-se uma barra maciça de latão ($E = 105$ GPa) de 25 mm de diâmetro dentro deste tubo e em seguida a outra tampa é totalmente rosqueada. Como a barra é sensivelmente maior do que o tubo, observa-se que a tampa comprime a barra durante uma rotação de um quarto de volta, antes de completamente fechada. Determinar: (a) a tensão normal no tubo e na barra; (b) a deformação no tubo e na barra.

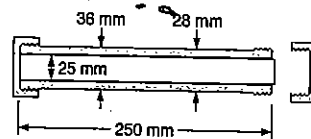


Fig. P2.16

2.17 Resolver o Prob. 2.16, considerando que o tubo é de latão ($E = 105$ GPa) e a barra de alumínio ($E = 70$ GPa).

2.18 Um tubo cilíndrico de poliestireno de parede fina ($E = 3,1$ GPa), com 3,2 mm de espessura, e uma placa rígida circular (é mostrada apenas parte dela), são usadas para suportar uma barra de aço AB ($E = 200$ GPa), com 280 mm de comprimento e 6 mm de diâmetro. Se uma carga P de 3500 N é aplicada em B , determinar: (a) o alongamento da barra AB ; (b) a deflexão do ponto B ; (c) a tensão normal na barra AB .

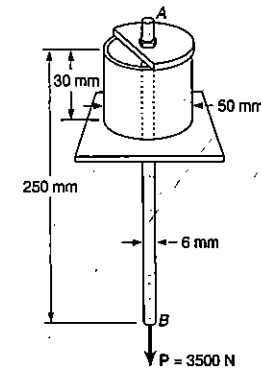


Fig. P2.18

2.19 Para a barra composta do Prob. 2.9, determinar a maior carga P admissível, se a deformação total da barra não deve exceder a 1 mm e a tensão normal ser no máximo igual a 180 MPa.

2.20 Para a barra composta do Prob. 2.10, determinar a maior carga P admissível, se em valores absolutos a deformação total da barra e sua máxima tensão normal não podem exceder a 0,2 mm e 75 MPa, respectivamente.

2.21 Para a amostra do Prob. 2.14, determinar a maior carga P admissível, se a deformação na porção AB e a deformação total da amostra não devem exceder a 0,2 mm e 1 mm, respectivamente.

2.22 Para a barra e o suporte do Prob. 2.18, determinar a maior carga P admissível, se a deflexão nos pontos A e B não devem exceder a 0,108 mm e 0,305 mm, respectivamente.

2.23 Para a treliça de aço ($E = 200$ GPa) e carregamento mostrado, determinar as deformações nos membros BD e DE , sabendo-se que suas seções transversais têm 1300 mm² e 1950 mm².

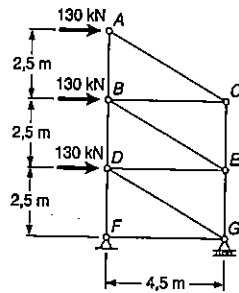


Fig. P2.23

2.24 Os membros AB e BE de treliça mostrada são de barras de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) com 25 mm de diâmetro. Para o carregamento mostrado, determinar o alongamento da (a) barra AB ; (b) barra BE .

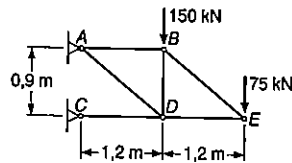


Fig. P2.24

2.25 Cada uma das quatro hastes de ligação verticais, conectadas às duas vigas horizontais, são de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$) e têm uma seção transversal retangular de $10 \times 40 \text{ mm}$. Para o carregamento mostrado, determinar a deflexão no: (a) ponto E ; (b) ponto F ; (c) ponto G .

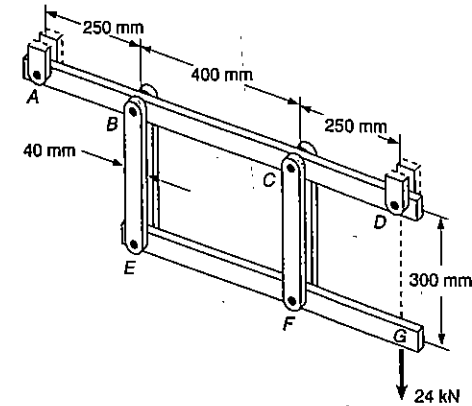


Fig. P2.25

2.26 Cada uma das hastes de ligação AB e CD , são de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e tem seção transversal uniforme de $6,4 \times 25,4 \text{ mm}$. Determinar a maior carga que pode ser aplicada ao ponto E , sendo que a deflexão nesse ponto não pode exceder a 0,25 mm.

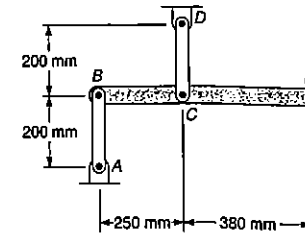


Fig. P2.26

2.27 Um cabo homogêneo de comprimento L e seção transversal uniforme é preso por uma de suas extremidades. (a) Expressando por ρ a densidade (massa por volume) do cabo e por E o módulo de elasticidade, determinar o alongamento do cabo, devido ao seu próprio peso; (b) Mostre que o mesmo alongamento poderá ser obtido se o cabo fosse horizontal e se uma força igual à metade do seu peso fosse aplicada na extremidade do cabo.

2.28 Determinar a deflexão do cume A de um parabolóide de revolução homogêneo, de altura h , densidade ρ e módulo de elasticidade E , devido ao seu próprio peso.

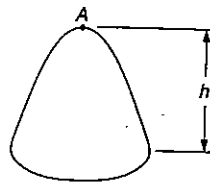


Fig. P2.28

2.29 Determine a deflexão do cume *A* de um cone circular homogêneo, de altura *h*, densidade ρ e módulo de elasticidade *E*, devido ao seu próprio peso.

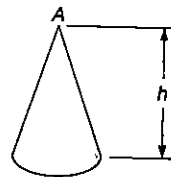


Fig. P2.29

2.30 Uma carga vertical *P* é aplicada no centro *A* da seção superior de um tronco de um cone homogêneo, de altura *h*, raio mínimo *a* e raio máximo *b*. (a) Expressando por *E* o módulo de elasticidade do material e desprezando o efeito de seu peso, determine a deflexão do ponto *A*; (b) Mostre que o mesmo resultado pode ser obtido, se a carga *P* fosse aplicada no centro *A* da seção superior de um cilindro homogêneo de altura *h* e seção transversal elíptica, com semi-eixo menor *a* e semi-eixo maior *b*.

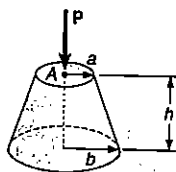


Fig. P2.30

2.31 O volume de uma amostra tracionada é essencialmente constante, enquanto a deformação plástica ocorre. Se o diâmetro inicial da amostra é d_1 , mostre que quando o diâmetro é *d*, a deformação exata é $\epsilon_t = 2 \ln (d_1/d)$.

2.32 Expressando por ϵ a "deformação técnica" em uma amostra tracionada, mostre que a determinação exata é $\epsilon_t = \ln (1 + \epsilon)$.

2.9 PROBLEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

Nos problemas estudados na seção precedente, pudemos sempre utilizar os diagramas de corpo livre e as equações de equilíbrio na determinação das forças internas produzidas nas várias partes da estrutura por carregamentos conhecidos. Ao obtermos esses valores, pudemos, então, usando as Equações 2.8 e 2.9, calcular a deformação δ de qualquer barra.

Em muitos problemas, no entanto, as forças internas não podem ser determinadas apenas com os recursos da estática. Na maior parte desses problemas, as próprias reações, que são forças externas, não podem ser determinadas simplesmente desenhando o diagrama de corpo livre da peça e estudando suas equações de equilíbrio. Essas equações de equilíbrio devem ser complementadas por outras relações envolvendo deformações, que podem ser obtidas considerando as condições geométricas do problema. Tais problemas são ditos *estaticamente indeterminados*, pois a estática não é suficiente para determinar as reações e esforços internos. Os próximos exemplos mostram como conduzir à solução desses problemas.

EXEMPLO 2.2

Uma barra de comprimento *L* e área da seção transversal A_1 , com módulo de elasticidade E_1 , foi colocada dentro de um tubo de mesmo comprimento *L*, mas de área de seção transversal A_2 e módulo de elasticidade E_2 . Qual é a deformação da barra e do tubo, quando uma força *P* é aplicada por meio de uma placa rígida?

Chamando de P_1 e P_2 , respectivamente, as forças axiais na barra e no tubo, desenhamos os diagramas de corpo livre dos três elementos (Fig. 2.23*b, c, d*). O terceiro diagrama nos dá uma informação de utilidade:

$$P_1 + P_2 = P \tag{2.11}$$

Ocorre, no entanto, que uma equação não é suficiente para a determinação das duas incógnitas, as forças P_1 e P_2 (esforços internos). O problema é estaticamente indeterminado.

Entretanto, a geometria do problema nos mostra que as deformações δ_1 e δ_2 da barra e do tubo devem ser iguais. Da Equação 2.7 podemos escrever:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad (2.12)$$

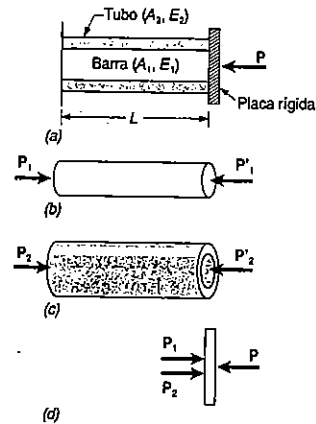


Fig. ex.2.23

Igualando as duas expressões, obtemos:

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \quad (2.13)$$

As Equações 2.11 e 2.13 se resolvem simultaneamente para a determinação de P_1 e P_2 :

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Em seguida calculamos a deformação da barra e do tubo por qualquer das expressões (2.12).

EXEMPLO 2.3

A barra AB de comprimento L e seção transversal de área constante é presa a suportes indesejáveis em A e B antes de ser carregada. Quais são os valores das tensões em AC e BC, devidos à aplicação da carga P no ponto C (Fig. 2.24a)?

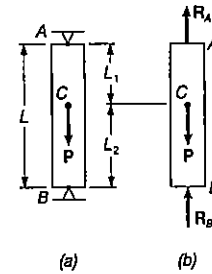


Fig. ex.2.24

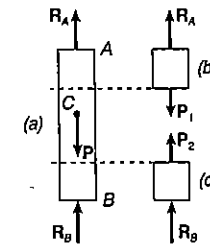


Fig. ex.2.25

Desenhando o diagrama de corpo livre da barra vamos obter a equação de equilíbrio:

$$R_A + R_B = P \quad (2.14)$$

Como essa equação é insuficiente para a determinação das duas reações R_A e R_B , o problema é estaticamente indeterminado.

É possível, entretanto, a determinação dessas reações, se analisarmos a geometria do sistema, que nos leva a concluir que a deformação total da barra deve ser nula. Chamando de δ_1 e δ_2 , respectivamente, às deformações das partes AC e BC escrevemos:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

Tomando as expressões de δ_1 e δ_2 em termos dos esforços internos correspondentes, P_1 e P_2 temos:

$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \quad (2.15)$$

Os diagramas de corpo livre mostrados na Fig. 2.25 nas partes b e c nos dizem que $P_1 = R_A$ e que $P_2 = -R_B$. Levando esses valores em (2.15), escrevemos:

$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \quad (2.16)$$

Resolvendo simultaneamente (2.14) e (2.16) obtemos para as reações:

$$R_A = PL_2/L \text{ e } R_B = PL_1/L.$$

Podemos agora calcular as tensões nas partes AC e BC dividindo $P_1 = R_A$ e $P_2 = R_B$, respectivamente, pela área da seção transversal da barra.

Método da superposição. Uma estrutura é estaticamente indeterminada toda vez que estiver ligada a mais suportes do que o necessário para manter o seu equilíbrio. O número de reações a calcular é maior que o número de possíveis equações de equilíbrio. É comum chamar um dos suportes da estrutura de *superabundante* e eliminá-lo para proceder à resolução do problema. Não é possível modificar as condições iniciais do problema de modo arbitrário, então a reação proporcionada pela ligação superabundante deve ser mantida na resolução. Essa reação superabundante será tratada como uma força desconhecida, que, juntamente com as demais forças aplicadas, deve levar à estrutura valores de deformações compatíveis com as ligações originais.

A solução do problema é conduzida considerando-se separadamente as deformações causadas pelas cargas aplicadas e aquelas provenientes da ação da reação superabundante. Essas deformações, ao final da resolução, são somadas – ou superpostas – para a obtenção do resultado final².

EXEMPLO 2.4

A barra de aço da figura 2.26 é presa a dois apoios fixos A e B. Determinar as reações desses apoios quando se aplica o carregamento indicado.

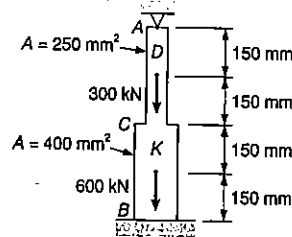


Fig. ex.2.26

² Na Sec. 2.12 discute-se a utilização deste método para o caso de efeito combinado de vários carregamentos.

Vamos considerar a reação em B como superabundante e retirar o apoio B deixando a barra livre nessa extremidade. A reação R_B será considerada como uma força desconhecida (Fig. 2.27a), cujo valor será determinado pelas considerações de deformação δ da barra igual a zero.

A resolução do problema é levada a efeito, estudando-se separadamente a deformação δ_R devida à reação R_B (Fig. 2.27c).

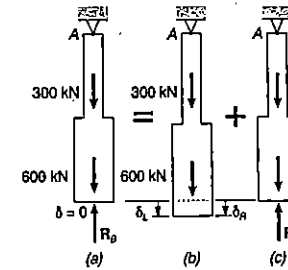


Fig. ex.2.27

A barra é dividida em quatro partes (Fig. 2.28), e a Equação 2.8 fornece a deformação δ_F . Seguindo o mesmo procedimento do Ex. 2.1, pode-se escrever

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0,150 \text{ m}$$

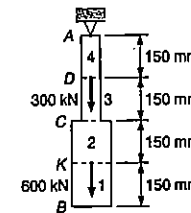


Fig. ex.2.28

Substituindo esses valores na Equação 2.8, tem-se

$$\delta_F = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \frac{0,150 \text{ m}}{E}$$

$$\delta_F = \frac{1,125 \times 10^9}{E} \quad (2.17)$$

Para a determinação de δ_R devido a R_B , divide-se a barra em duas partes (Fig. 2.29) e escreve-se:

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0,300 \text{ m}$$

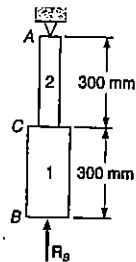


Fig. ex.2.29

Substituindo esses valores na Equação 2.8 obtém-se:

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = - \frac{(1,95 \times 10^3) R_B}{E} \quad (2.18)$$

Como a deformação total da barra deve ser zero,

$$\delta = \delta_F + \delta_R = 0 \quad (2.19)$$

Levando os valores δ_F e δ_R obtidos em (2.17) e (2.18) na Equação 2.19 escreve-se:

$$\delta = \frac{1,125 \times 10^9}{E} - \frac{(1,95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

Dessa última expressão calcula-se o valor de R_B

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

A reação R_A no apoio superior é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.30). Tem-se então:

$$\Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

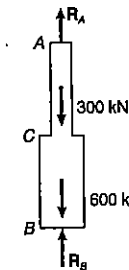


Fig. ex.2.30

Uma vez determinadas as reações, os valores de tensões e deformações específicas são calculados facilmente. Convém lembrar que a deformação total da barra é zero, mas que as várias partes componentes da barra sofrem deformações sob o efeito dos carregamentos e das restrições dos apoios.

EXEMPLO 2.5

Calcular as reações em A e B, na barra do Ex. 2.4, supondo que existe uma distância de 4,5 mm entre a barra e o apoio B, quando o carregamento é aplicado. Adotar $E = 200 \text{ GPa}$ (Fig. 2.31).

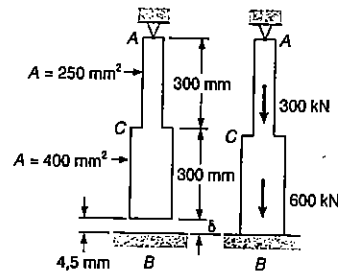


Fig. ex.2.31

Vamos seguir a mesma seqüência do Ex. 2.4. Considerando como superabundante a reação em B, calculamos as deformações δ_F e δ_R , devidas, respectivamente, às cargas aplicadas e à reação R_B . Neste caso, entretanto, a barra pode ser alongada, e sua deformação total δ não é nula, mas $\delta = 4,5$ mm. Escrevemos,

$$\delta = \delta_F + \delta_R = 4,5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (2.20)$$

Os valores δ_F e δ_R , que foram calculados em (2.17) e (2.18), são agora levados a (2.20). Lembrando que $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, temos

$$\delta = \frac{1,125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1,95 \times 10^3) R_B}{200 \times 10^9} = 4,5 \times 10^{-3}$$

Essa expressão nos leva ao valor de R_B ,

$$R_B = 115,4 \times 10^3 \text{ N} = 115,4 \text{ kN}$$

A reação no apoio A é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.30):

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B &= 0 \\ R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115,4 \text{ kN} &= 785 \text{ kN} \end{aligned}$$

2.10 PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

Nas estruturas estudadas até este ponto, consideramos que a temperatura permanecia constante durante o tempo de carregamento. Vamos agora considerar situações em que ocorrem variações de temperatura.

Tomemos primeiramente a barra AB, homogênea e de seção transversal uniforme, apoiada em uma superfície lisa horizontal (Fig. 2.32a). Se aumentarmos a temperatura da barra de um valor ΔT , notamos que ela se alonga de um valor δ_T que é proporcional tanto à variação da temperatura quanto ao comprimento da barra L (Fig. 2.32b). Temos então:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (2.21)$$

α é constante característica do material, chamada de **coeficiente de dilatação térmica**. Como L e δ_T são expressos em unidades de comprimento, α representa uma quantidade **por grau C** ou **por grau F**, dependendo de como expressamos a temperatura, se em graus Celsius ou em graus Fahrenheit.

À deformação total δ_T está relacionada uma deformação específica $\epsilon_T = \delta_T/L$. Reescrevendo a Equação 2.21, concluímos que:

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \quad (2.22)$$

ϵ_T é chamada **deformação térmica específica**, uma vez que é causada por variação de temperatura na barra. No caso que estamos considerando, **não existem tensões relacionadas com a deformação ϵ_T** .

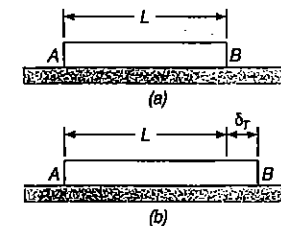


Fig. 2.32

Vamos considerar agora que a barra AB de comprimento L foi colocada entre dois anteparos fixos, separados da distância L (Fig. 2.33a). Não existem tensões ou deformações nesta condição inicial. Se elevarmos a temperatura de ΔT , o alongamento da barra será nulo, pois os anteparos impedem qualquer deformação. Sendo a barra homogênea e de seção uniforme, a deformação específica em qualquer ponto é $\epsilon_T = \delta_T/L$, também nula. No entanto, para evitar o alongamento da barra, os anteparos vão aplicar sobre ela as forças P e P' após a elevação da temperatura (Fig. 2.33b). É criado um estado de tensão na barra (sem que ocorram deformações específicas).

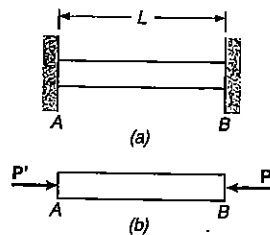


Fig. 2.33

Ao tentarmos calcular a tensão σ criada pela variação da temperatura, verificamos que o problema é estaticamente indeterminado. É necessário inicialmente calcular a intensidade da força P , levando em conta as condições de alongamento nulo da barra. Utilizando o método da superposição da Sec. 2.9, retiramos o anteparo B (Fig. 2.34a) que restringe a deformação da barra. Ela então se alonga livremente, com a variação da temperatura ΔT (Fig. 2.34b). De acordo com a Fórm. 2.21, o alongamento correspondente é:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Aplicamos agora à extremidade B da barra a força P que representa a reação superabundante e, utilizando a Fórm. 2.73, obtemos uma segunda deformação (Fig. 2.34c).

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Como a deformação total deve ser nula, temos:

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

donde se conclui que

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

e que a tensão atuante na barra devido à variação de temperatura ΔT é

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T) \quad (2.23)$$

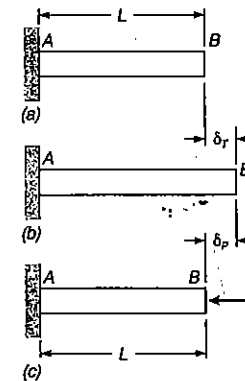


Fig. 2.34

Devemos ter em mente que este resultado, bem como nossa observação anterior sobre ausência de deformações específicas, se aplicam no caso de barra de seção transversal uniforme e material homogêneo. Qualquer outro problema envolvendo variações de temperatura em estruturas impedidas de se deformarem deve ser analisado dentro de suas características. De qualquer modo, podemos sempre considerar separadamente as deformações provocadas pela variação de temperatura e pelas reações superabundantes e superpor os resultados.

EXEMPLO 2.6

A barra AB é perfeitamente ajustada aos anteparos fixos quando a temperatura é de $+25^\circ\text{C}$. Determinar as tensões atuantes nas partes AC e CB da barra para a temperatura de -50°C . Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ (Fig. 2.35).

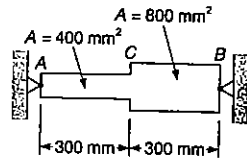


Fig. ex.2.35

Determinaremos inicialmente as reações nos anteparos. Como o problema é estaticamente indeterminado, retiramos o anteparo B. A variação da temperatura é:

$$\Delta T = (-50^{\circ}\text{C}) - (25^{\circ}\text{C}) = -75^{\circ}\text{C}$$

A deformação correspondente (Figs. 2.36a e b) é

$$\begin{aligned} \delta_T &= \alpha(\Delta T)L \\ &= (12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(-75^{\circ}\text{C})(0,6 \text{ m}) = -540 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

Aplicando então a força desconhecida R_B à extremidade B (Fig. 2.36c), usaremos a Equação 2.8 para a determinação da deformação δ_R . Substituindo

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = 0,3 \text{ m} \\ A_1 &= 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & A_2 &= 800 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ P_1 &= P_2 = R_B & E &= 200 \times 10^9 \text{ Pa} \end{aligned}$$

na Equação 2.8, escrevemos:

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{R_B}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} \left(\frac{0,3 \text{ m}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{0,3 \text{ m}}{800 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \end{aligned}$$

Devido às restrições dos anteparos, a deformação total é nula, e podemos dizer que:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_T + \delta_R = 0 \\ \delta &= -540 \times 10^{-6} \text{ m} + (5,625 \times 10^{-9} \text{ m/N})R_B = 0 \end{aligned}$$

de onde vamos obter:

$$R_B = 96,0 \times 10^3 \text{ N} = 96,0 \text{ kN}$$

A reação em A é igual e de sentido contrário.

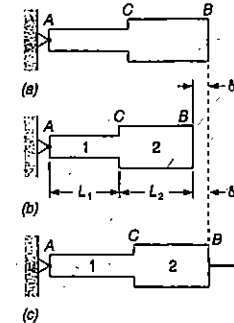


Fig. ex.2.36

Conhecidas as forças nas duas porções da barra que são $P_1 = P_2 = 96,0 \text{ kN}$, obtemos os valores das tensões atuantes em AC e CB:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{96,0 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 240 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{96,0 \times 10^3 \text{ N}}{800 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 120 \text{ MPa}$$

O fato de a deformação total da barra ser zero não deve levar à conclusão de que a deformação em AC e CB é nula. A solução do problema baseada nessa conclusão estaria errada. Do mesmo modo, as deformações específicas em AC e CB não devem ser adotadas como nulas. Para estudar melhor este ponto, vamos determinar a deformação específica ϵ_{AC} da porção AC da barra. Esse valor ϵ_{AC} pode ser dividido em duas parcelas. Uma delas é a parcela ϵ_T produzida na barra, sem o anteparo B, pela variação de temperatura ΔT (Fig. 2.36b). Da Equação 2.22, escrevemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_T &= \alpha \Delta T = (12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(-75^{\circ}\text{C}) \\ &= -900 \times 10^{-6} = -900 \mu \end{aligned}$$

A outra componente de ϵ_{AC} está associada à tensão σ_1 devido à força R_B aplicada na barra (Fig. 2.36c). A Lei de Hooke leva ao valor dessa parcela da deformação específica:

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} = 1200 \times 10^{-6} = 1200 \mu$$

Somando as parcelas de deformação específica em AC, vamos obter:

$$\epsilon_{AC} = \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -900 \mu + 1200 \mu = +300 \mu$$

Um cálculo análogo leva à determinação da deformação específica na parte CB

$$\epsilon_{CB} = \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -900 \mu + 600 \mu = -300 \mu$$

As deformações totais δ_{AC} e δ_{CB} das partes da barra são, respectivamente,

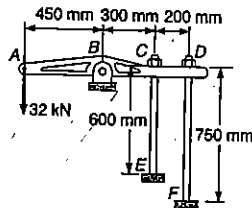
$$\delta_{AC} = \epsilon_{AC}(AC) = (+300 \mu)(0,3 \text{ m}) = +90 \mu\text{m}$$

$$\delta_{CB} = \epsilon_{CB}(CB) = (-300 \mu)(0,3 \text{ m}) = -90 \mu\text{m}$$

Verificamos, então, que a soma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ das duas deformações é zero, embora nenhum dos dois valores seja nulo.

PROBLEMA RESOLVIDO 2.3

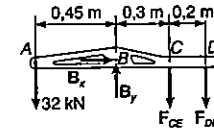
A haste CE de 10 mm de diâmetro e a haste DF de 15 mm de diâmetro são ligadas à barra rígida ABCD como na figura. Sabendo-se que as hastes são de alumínio e usando-se $E = 70 \text{ GPa}$, determinar: a) a força provocada em cada haste pelo carregamento indicado; b) o deslocamento do ponto A.



Condições de equilíbrio. Considerando como corpo livre a barra ABCD, notamos que as reações em B e nas hastes são estaticamente indeterminadas. No entanto, da estática podemos escrever:

$$+\uparrow \Sigma_B = 0: (32 \text{ kN})(0,45 \text{ m}) - F_{CE}(0,3 \text{ m}) - F_{DF}(0,5 \text{ m}) = 0$$

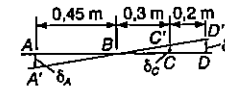
$$0,3F_{CE} + 0,5F_{DF} = 14,4 \times 10^3 \quad (1)$$



Condições da Geometria. Após a aplicação da força de 32 kN, a barra assume a posição A'BC'D'. Da semelhança de triângulos BAA', BCC' e BDD', temos:

$$\frac{\delta_C}{0,3 \text{ m}} = \frac{\delta_D}{0,5 \text{ m}} \quad \delta_C = 0,6\delta_D \quad (2)$$

$$\frac{\delta_A}{0,45 \text{ m}} = \frac{\delta_D}{0,5 \text{ m}} \quad \delta_A = 0,9\delta_D \quad (3)$$



Deformações. Usando a Equação 2.8, temos:

$$\delta_C = \frac{F_{CE} L_{CE}}{A_{CE} E} \quad \delta_D = \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E}$$

Substituindo em (2), escrevemos:

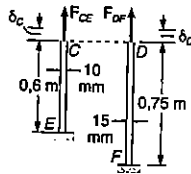
$$\delta_C = 0,6\delta_D \quad \frac{F_{CE} L_{CE}}{A_{CE} E} = 0,6 \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E}$$

$$F_{CE} = 0,6 \frac{L_{DF} A_{CE}}{L_{CE} A_{DF}} F_{DF} = 0,6 \left(\frac{0,75 \text{ m}}{0,60 \text{ m}} \right) \left[\frac{\frac{1}{4} \pi (0,10 \text{ m})^2}{\frac{1}{4} \pi (0,015 \text{ m})^2} \right] F_{DF} \quad F_{CE} = 0,333 F_{DF}$$

Força em cada haste. Substituindo em (1) temos:

$$0,3(0,333 F_{DF}) + 0,5 F_{DF} = 14,4 \times 10^3 \quad F_{DF} = 24 \text{ kN}$$

$$F_{CE} = 0,333 F_{DF} = 0,333(24 \text{ kN}) \quad F_{CE} = 8 \text{ kN}$$



Deslocamentos. O deslocamento do ponto D é

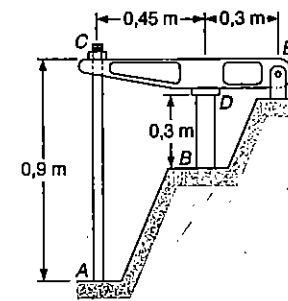
$$\delta_D = \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E} = \frac{(24 \text{ kN})(0,75 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0,015 \text{ m})^2 (70 \text{ GPa})} \quad \delta_D = 1,455 \text{ mm}$$

Usando (3), escrevemos:

$$\delta_A = 0,9 \delta_D = 0,9(1,455 \text{ mm}) \quad \delta_A = 1,310 \text{ mm}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 2.4

A barra rígida *CDE* é presa ao apoio *E* por um pino, e se apóia no cilindro de latão *BD* de 30 mm de diâmetro. Um parafuso de 22 mm de diâmetro passa por um furo na barra em *C*, e é fixo por uma porca simplesmente ajustada. A montagem, feita à temperatura de 20°C, não leva nenhuma tensão à estrutura. A temperatura do cilindro de latão é aumentada para 50°C, enquanto o parafuso tem sua temperatura mantida constante. Pede-se determinar para essas condições as tensões no cilindro.



Barra AC: aço

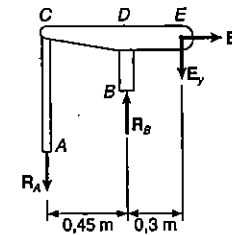
$E = 200 \text{ GPa}$

$\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

Cilindro BD: latão

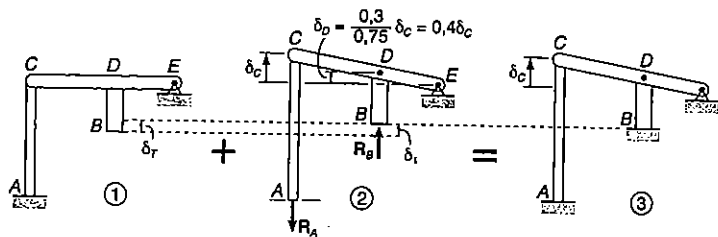
$E = 105 \text{ GPa}$

$\alpha = 18,8 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$



Condições de equilíbrio. Considerando todo o conjunto como corpo livre, temos:

$$+ \sum M_E = 0: \quad R_A(0,75 \text{ m}) - R_B(0,3 \text{ m}) = 0 \quad R_A = 0,4 R_B \quad (1)$$



Deformações. Utilizando o método da superposição, vamos considerar R_B como reação superabundante. Removendo-se R_B e aumentando a temperatura, o ponto B se desloca para baixo de um valor δ_T . A reação R_B deve causar então uma deformação δ_1 de mesmo valor, para que o deslocamento de B seja zero (Fig. 3).

Deslocamento δ_T . Devido à elevação da temperatura de $\Delta T = 50^\circ - 20 = 30^\circ\text{C}$, o comprimento do cilindro de cobre aumenta de δ_T

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0,3 \text{ m})(30^\circ\text{C})(18,8 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}) = 169,2 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Deslocamento δ_1 . Da Fig. 2 temos que $\delta D = 0,4\delta_C$ e que $\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D}$

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A(0,9 \text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0,022 \text{ m})^2(200 \text{ GPa})} = 1,184 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0,4\delta_C = 0,4(6,37 \times 10^{-9} R_A) = 4,735 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B(0,3 \text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0,03 \text{ m})^2(105 \text{ GPa})} = 4,042 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

Sabemos de (1) que $R_A = 0,40R_B$ e escrevemos:

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4,735(0,4R_B) + 4,042R_B]10^{-9} = 5,936 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

$$\delta_T = \delta_1: \quad 169,2 \times 10^6 \text{ m} = 5,93 \times 10^{-9} R_B \quad R_B = 28,5 \text{ kN}$$

Tensões no cilindro

$$\sigma_B = \frac{R_B}{A} = \frac{28,5 \text{ kN}}{1/4 \pi (0,03)^2} \quad \sigma_B = 40,3 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS

2.33 Uma coluna de concreto de 1,2 m de altura é reforçada por quatro barras de aço, cada uma com 20 mm de diâmetro. Sabendo-se que os módulos de elasticidade para o concreto e para o aço valem 25 MPa e 200 MPa, respectivamente. Determinar as tensões normais no aço e no concreto, quando uma força centrada de 670 kN é aplicada na coluna.

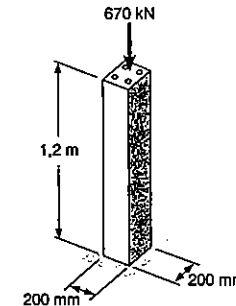


Fig. P2.33

2.34 Uma barra de 250 mm de comprimento, com seção transversal retangular de 15 x 30 mm, consiste de duas lâminas de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$), de 5 mm de espessura, e no centro de uma lâmina de latão ($E = 105 \text{ GPa}$), com a mesma espessura. Se ela está sujeita a uma força centrada, $P = 30 \text{ kN}$, determinar a tensão normal (σ) nas lâminas de alumínio; (b) na lâmina de latão.

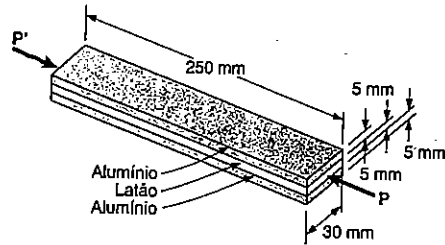


Fig. P2.34

2.35 Determinar a deformação da barra composta do Prob. 2.34, se nela atuar uma força centrada de intensidade $P = 45 \text{ kN}$.

2.36 Uma força centrada compressiva de 180 kN está aplicada na montagem mostrada, por meio de placas rígidas colocadas em ambas as extremidades. Sabe-se que os módulos de elasticidade do aço e do alumínio valem 200 GPa e 70 GPa , respectivamente. Determinar: (a) as tensões normais no cilindro interno de aço e no tubo de alumínio; (b) a deformação da montagem.

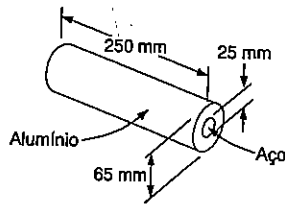


Fig. P2.36

2.37 Uma barra de poliestireno consiste de duas porções cilíndricas AB e BC , restringidas em ambas as extremidades, e suporta duas cargas de 27 kN , como indicado. Sabendo-se que $E = 3,1 \text{ GPa}$, determinar: (a) as reações em A e C ; (b) a tensão normal em cada porção da barra.

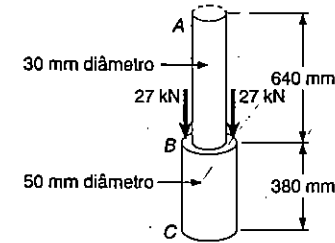


Fig. P2.37

2.38 Duas barras cilíndricas, uma de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e outra de latão ($E = 105 \text{ GPa}$), são ligadas em C e engastadas em A e E . Para o carregamento indicado, determinar: (a) as reações em A e E ; (b) a deflexão no ponto C .

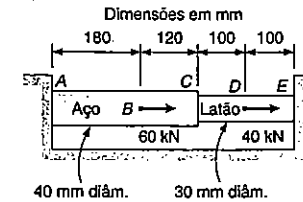


Fig. P2.38

2.39 Resolver o Prob. 2.38, assumindo que a barra AC é feita de latão e a barra CE é de aço.

2.40 Um tubo de latão de 300 mm de comprimento, com 30 mm de diâmetro externo e 3 mm de espessura, é fixado em um torno mecânico manual, que está ajustado de tal modo que os mordentes encostem nas suas extremidades, sem que exerça qualquer pressão nelas. Duas forças P e Q , de intensidade $P = 190 \text{ kN}$ e $Q = 160 \text{ kN}$, são então aplicadas ao tubo, como indicado. Sabendo-se que $E = 105 \text{ GPa}$, determinar: (a) as forças exercidas pelo torno sobre o tubo em A e D ; (b) a elongação da parte BC do tubo.

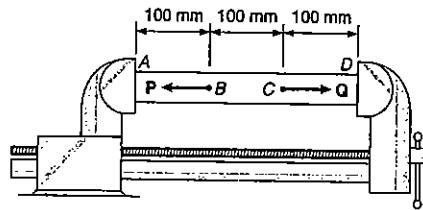


Fig. P2.40

2.41 Resolver o Prob. P2.40, assumindo que depois das forças P e Q terem sido aplicadas, o torno é ajustado com um aumento da distância entre os mordentes de 0,25 mm.

2.42 Resolver o Prob. P2.40, assumindo que depois das forças P e Q terem sido aplicadas, o torno é ajustado com uma redução da distância entre os mordentes de 0,25 mm.

2.43 Duas barras cilíndricas, uma feita de aço ($E = 200$ GPa) e a outra de latão ($E = 105$ GPa), são ligadas em C . A barra composta é engastada em A , enquanto que existe uma folga de 0,12 mm entre a extremidade E e a parede vertical. Uma força de 60 kN é então aplicada em B , e uma de 40 kN em D , ambas horizontais e dirigidas para a direita (como mostrado na Fig. P2.38). Determinar: (a) as reações em A e E ; (b) a deflexão no ponto C .

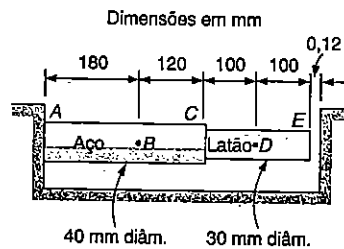


Fig. P2.43

2.44 Resolver o Prob. 2.43, assumindo que a barra AC é feita de latão e a barra CE de aço.

2.45 Uma barra rígida AD é sustentada, como indicado, por dois arames de aço de 1,6 mm de diâmetro ($E = 200$ GPa), um pino e um suporte em D . Sabendo-se que os arames estão inicialmente esticados, determinar: (a) a tração adicional em cada arame, quando uma força P de 530 N é aplicada em B ; (b) a correspondente deflexão no ponto B .

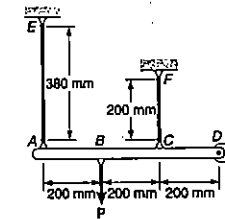


Fig. P2.45

2.46 Uma barra rígida é suspensa por meio de quatro arames, fixados a uma placa fina, como indicado. Os arames amarrados aos pinos A e D são de alumínio ($E = 70$ GPa) e têm um diâmetro de 2,5 mm; enquanto que os demais são de aço ($E = 200$ GPa) e têm diâmetro de 2 mm. Sabendo-se que todos os arames estão inicialmente esticados, determinar: (a) a tração adicional em cada arame quando uma carga de 2 kN é aplicada no ponto médio da barra; (b) o correspondente alongamento dos arames.

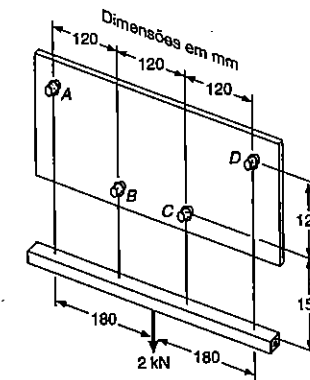


Fig. P2.46

2.47 Resolver o Prob. 2.46, considerando que os arames amarrados aos pinos *A* e *D* são de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e têm diâmetro de 2,5 mm, enquanto que os demais são de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$) e têm diâmetro de 2 mm.

2.48 As hastes de ligação *BC* e *DE* são ambas de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e são de 1,25 mm de largura por 6,35 mm de espessura. Determinar: (a) a força em cada haste, quando uma força *P* de 2670 N é aplicada à barra rígida *AF*, como indicado; (b) a correspondente deflexão no ponto *A*.

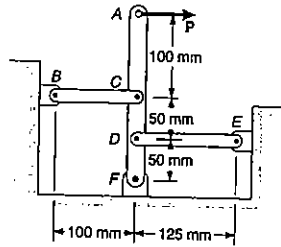


Fig. P2.48

2.49 Cada um dos parafusos de aço *AD* e *CE* ($E = 200 \text{ GPa}$) tem um diâmetro de 8 mm e tem suas extremidades superiores rosqueadas, com rosca simples e de passo igual a 2 mm. Sabendo-se que a porca em *A*, depois de ser perfeitamente ajustada, é apertada de duas voltas completas, determinar: (a) a tração em cada barra; (b) a deflexão no ponto *A* da barra rígida *ABC*.

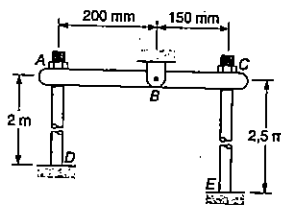


Fig. P2.49

2.50 Resolver o Prob. 2.49, assumindo que depois de ser levemente ajustada à porca em *C*, e não à porca em *A*, ela é apertada de duas voltas completas.

2.51 A barra rígida *ABCD* é suspensa por três cabos idênticos, como indicado. Sabendo-se que $a = b$, determinar a tração em cada cabo, causada pela carga *P* aplicada em *C*.

2.52 A barra rígida *ABCD* é suspensa por três cabos idênticos, como indicado. Sabendo-se que $a = 2b$, determinar a tração em cada cabo, causada pela carga *P* aplicada em *C*.

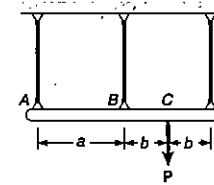


Fig. P2.51 e P2.52

2.53 Um trilho de aço ($E = 200 \text{ GPa}$; $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) de uma estrada de ferro foi estendido a uma temperatura de -2°C . Determinar a tensão normal no trilho quando a temperatura atingir 50°C , considerando que os trilhos: (a) são soldados formando um trilho contínuo; (b) são de comprimento igual a 12 m, com uma fenda de 6,35 mm entre eles.

2.54 A montagem mostrada consiste em um tubo de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$; $\alpha = 23,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) preenchido com núcleo de aço ($E = 200 \text{ GPa}$; $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) e, com ausência de tensão a uma temperatura de 20°C . Considerando somente deformações axiais, determine a tensão no tubo de alumínio quando a temperatura atingir 180°C .

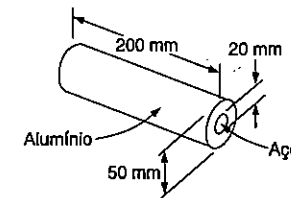


Fig. P2.54

2.55 Resolver o Prob. 2.54, considerando que o núcleo é feito de latão ($E = 105 \text{ GPa}$; $\alpha = 20,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$), ao invés de aço.

2.56 Uma coluna de concreto de 1,2 m é reforçada por quatro barras de aço, cada uma de 20 mm de diâmetro, como indicado. Sabendo-se que para o aço $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ e para o concreto $E = 25 \text{ GPa}$ e $\alpha = 9,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, determinar as tensões normais induzidas no aço e no concreto, devidas a um aumento de temperatura de 27°C .

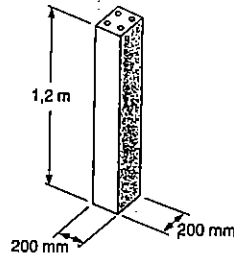


Fig. P2.56

2.57 Uma barra composta de duas porções cilíndricas AB e BC é engastada em ambas as extremidades. A porção AB é de latão ($E = 105 \text{ GPa}$; $\alpha = 20,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) e a porção BC é de aço ($E = 200 \text{ GPa}$; $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$). Sabendo-se que a barra está inicialmente sem tensão, determinar: (a) as tensões normais induzidas na porção AB e BC , por uma temperatura aumentada de 30°C ; (b) a correspondente deflexão no ponto B .

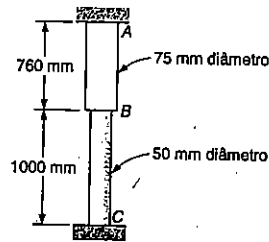


Fig. P2.57

2.58 Uma barra composta de duas porções cilíndricas AB e BC é engastada em ambas as extremidades. A porção AB é de aço ($E = 200 \text{ GPa}$; $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) e a

porção BC é de latão ($E = 105 \text{ GPa}$; $\alpha = 20,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$). Sabendo-se que a barra está inicialmente sem tensão, determinar: (a) as tensões normais induzidas nas porções AB e BC , por uma temperatura de 50°C ; (b) a correspondente deflexão no ponto B .

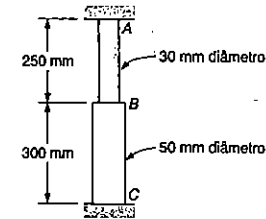


Fig. P2.58

2.59 Resolver o Prob. 2.58, considerando que a porção AB da barra composta é de latão e a porção BC de aço.

2.60 Resolver o Prob. 2.57, considerando que a porção AB da barra composta é de aço e a porção BC de latão.

2.61 Uma barra de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$; $\alpha = 23,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) e uma haste de aço ($E = 200 \text{ GPa}$; $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) tem as dimensões mostradas, a uma temperatura de 20°C . A haste de aço é aquecida até que a barra de alumínio possa ser ajustada livremente nela. A temperatura de toda a montagem é então elevada para 150°C . Determinar a tensão final: (a) na barra; (b) na haste.

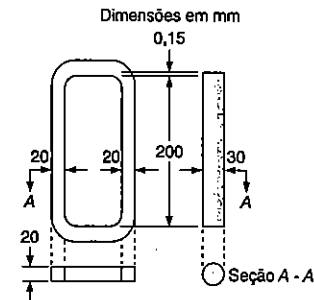


Fig. P2.61

2.62 A temperatura da barra composta do Prob. 2.43 é aumentada para 80°C. Sabendo-se que, para o aço $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, para o latão $E = 105 \text{ GPa}$ e $\alpha = 20,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, e que nenhuma força é aplicada em B ou D , determinar: (a) as tensões normais nas porções AC e CE ; (b) a deformação na porção AC .

2.63 A barra AB é de latão ($E = 105 \text{ GPa}$; $\alpha = 20,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) e a barra CD de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$; $\alpha = 23,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$). Sabendo-se que a fenda existente entre as extremidades das barras é de 0,5 mm, determinar: (a) a tensão normal em cada barra, depois que a temperatura for aumentada para 80°C; (b) a deformação da barra AB nesse instante.

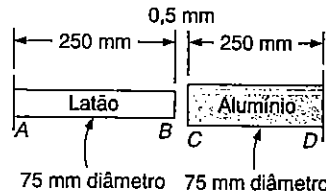


Fig. P2.63

2.64 Para as barras do Prob. 2.63, determinar: (a) a temperatura à qual a tensão na barra AB deve ser de -138 MPa ; (b) a correspondente deformação na barra AB .

2.65 Para as barras do Prob. 2.49, vamos considerar que depois de ser perfeitamente ajustada cada uma das porcas A e C é afrouxada de meia volta. A temperatura de ambas as barras é então diminuída de 60°C. Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, determinar a tensão final: (a) na barra AD ; (b) na barra CE .

2.11 COEFICIENTE DE POISSON

Vimos, na parte inicial deste Capítulo, que para uma barra delgada e homogênea, carregada axialmente, as tensões e deformações satisfazem a lei de Hooke, enquanto não for excedido o limite de elasticidade do material. Adotando que a força P tem a direção do eixo x (Fig. 2.37a), temos $\sigma_x = P/A$, onde A é a área de seção transversal da barra. Da lei de Hooke temos

$$\epsilon_x = \sigma_x/E \quad (2.24)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

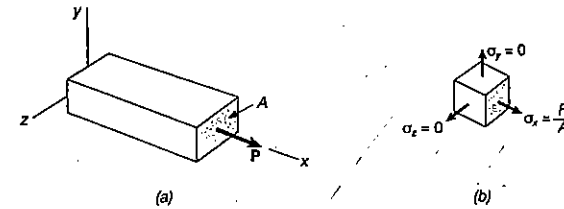


Fig. 2.37

A Fig. 2.37b mostra que nas faces respectivamente perpendiculares aos eixos y e z temos $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Esse fato pode levar-nos a imaginar que as deformações específicas ϵ_y e ϵ_z são também iguais a zero. Isto entretanto **não ocorre**. Em todos os materiais, o alongamento produzido por uma força P na direção dessa força é acompanhado por uma contração em qualquer direção transversal (Fig. 2.38)³. Assumimos que o material em estudo é homogêneo, isto é, consideramos que suas várias propriedades mecânicas são independentes do ponto considerado. Vamos agora assumir que o material é **isotrópico**, isto é, consideramos que suas várias propriedades mecânicas são também independentes da direção considerada. Com esta suposição adicional, a deformação específica deve ser a mesma para qualquer direção transversal: $\epsilon_z = \epsilon_y$. Esse valor é chamado **deformação específica transversal**. O valor absoluto da relação entre a deformação específica transversal e a deformação específica longitudinal é chamado **coeficiente de Poisson** (Siméon Denis Poisson, matemático francês, 1781-1840). É normalmente expresso pela letra grega ν (nũ). Temos então:

$$\nu = \left| \frac{\text{deformação específica transversal}}{\text{deformação específica longitudinal}} \right| \quad (2.25)$$

ou

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (2.26)$$

para as condições de carregamento da Fig. 2.37. Das Equações 2.24 e 2.26, escrevemos as relações seguintes, que descrevem totalmente as condições de deformações específicas sob carga axial paralela ao eixo x :

³ Poderíamos também supor, de modo errado, que o volume da barra vai permanecer constante, como resultado dos efeitos simultâneos de alongamento axial e da contração transversal.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = \frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (2.27)$$

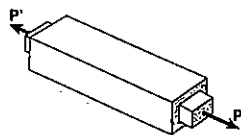


Fig. 2.38

EXEMPLO 2.7

Uma barra de material homogêneo e isotrópico tem 500 mm de comprimento e 16 mm de diâmetro. Sob a ação da carga axial de 12 kN, o seu comprimento aumenta em 300 μm e seu diâmetro se reduz em 2,4 μm. Determinar o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

A área da seção transversal da barra é

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 201 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Consideramos o eixo x coincidente com o eixo da barra para escrevermos então (Fig. 2.39)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N}}{201 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 59,7 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300 \mu\text{m}}{500 \text{ mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2,4 \mu\text{m}}{16 \text{ mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

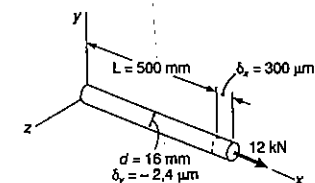


Fig. ex.2.39

Da Lei de Hooke, $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$, obtemos:

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59,7 \text{ MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99,5 \text{ GPa}$$

e, da Equação 2.26,

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0,25$$

2.12 ESTADOS MÚLTIPLOS DE CARREGAMENTO; GENERALIZAÇÃO DA LEI DE HOOKE

Nosso estudo até agora se limitou à análise das barras delgadas submetidas a cargas axiais, isto é, dirigidas ao longo de um eixo somente. Considerando esse eixo como o eixo x e chamando a força interna de P , calculamos as componentes de tensão, que são $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ e $\sigma_z = 0$.

Passamos agora a considerar elementos estruturais sujeitos à ação de carregamentos que atuam nas direções dos três eixos coordenados, produzindo tensões normais σ_x , σ_y e σ_z , todas diferentes de zero (Fig. 2.40). Temos então um estado

múltiplo de carregamento ou um carregamento multiaxial. Devemos notar que este não é o caso geral de tensões descrita na Sec. 1.7, pois não estão incluídas as tensões de cisalhamento entre aquelas indicadas pela Fig. 2.40.

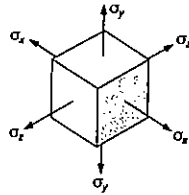


Fig. 2.40

Vamos considerar um cubo elementar de um certo material (Fig. 2.41a), adotando para suas dimensões arestas de comprimento unitário. Sob a ação do carregamento multiaxial o cubo elementar se deforma, tornando-se um **paralelepípedo-retângulo** cujos lados têm comprimentos, respectivamente, $1 + \epsilon_x$, $1 + \epsilon_y$ e $1 + \epsilon_z$, onde ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z são as deformações específicas nas direções dos três eixos coordenados (Fig. 2.41b). Devido às deformações que aparecem em elementos vizinhos do mesmo material, o cubo elementar pode também sofrer uma translação, que no momento não interessa considerar, uma vez que estudamos apenas a deformação do próprio elemento, e não um deslocamento qualquer que ele possa ter como corpo rígido.

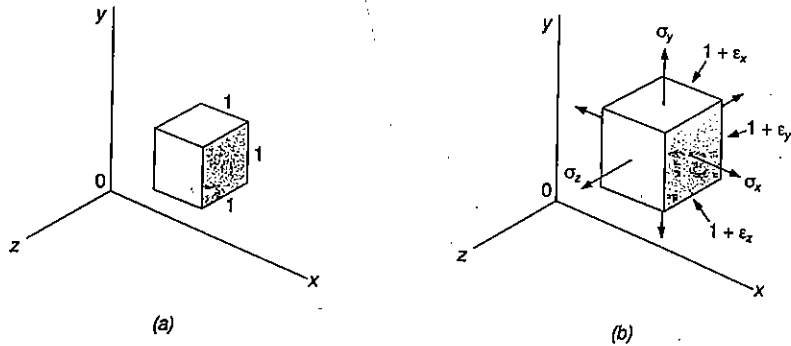


Fig. 2.41

Queremos agora escrever as expressões das componentes de deformação ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z em função das componentes de tensão σ_x , σ_y e σ_z . Para isso vamos considerar separadamente o efeito provocado por cada componente de tensão e superpor os resultados. O método que propomos agora será usado várias vezes no livro, e se baseia

no **princípio da superposição**. Este princípio afirma que o efeito provocado em uma estrutura por determinado carregamento combinado pode ser obtido *determinando-se separadamente os efeitos dos vários carregamentos e combinando-se os resultados obtidos*. Duas condições se fazem necessárias para a aplicação do princípio:

1. Cada efeito é diretamente proporcional à carga que o produziu.
2. A deformação causada por qualquer dos carregamentos é pequena e não afeta as condições de aplicação dos outros carregamentos.

No caso de estado múltiplo de carregamento, a primeira condição será satisfeita se as tensões não excederem o limite de proporcionalidade do material, enquanto a segunda condição fica satisfeita se as tensões em uma das faces não causarem em outra face do elemento deformação que possa alterar o cálculo das tensões nessa segunda face.

Considerando em primeiro lugar a tensão σ_x , vimos, na Sec. 2.11, que essa componente causa, na direção do eixo x , a deformação específica de valor σ_x/E , e nas direções dos eixos y e z a deformação específica dada por $-\nu\sigma_x/E$. Da mesma maneira, a componente de tensão σ_y , aplicada separadamente, provoca as deformações específicas σ_y/E na direção do eixo y e $-\nu\sigma_y/E$ nas outras direções. Finalmente, a componente σ_z causa as deformações específicas σ_z/E na direção do eixo z e $-\nu\sigma_z/E$ nas direções x e y . Combinando os resultados acima, chegamos às expressões das componentes das deformações específicas correspondentes ao estado múltiplo de carregamento:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= + \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= - \frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (2.28)$$

As Equações 2.28 exprimem a **generalização da Lei de Hooke para carregamento multiaxial**. Como foi salientado, os resultados são válidos para o caso de tensões que não excedam o limite de proporcionalidade do material e deformações pequenas. Recordamos também que um valor positivo de tensão significa tração e um valor negativo indica compressão. Do mesmo modo, um valor positivo de deformação específica significa expansão na direção respectiva e um valor negativo indica contração.

EXEMPLO 2.8

A Fig. 2.42 mostra um bloco de aço submetido à ação de pressão uniforme em todas as faces. Mediu-se a variação do comprimento AB , que foi de $-24 \mu\text{m}$. Determinar: (a) a variação de comprimento das outras duas arestas; (b) a pressão p aplicada às faces do bloco. Adotar $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,29$.

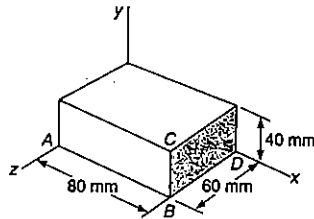


Fig. ex.2.42

a) **Alteração no comprimento das outras arestas.** Substituindo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ nas Equações 2.28 verificamos que as três componentes de deformação específica têm um valor comum

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \quad (2.29)$$

Como $\epsilon_x = \delta_x/AB = -24 \mu\text{m}/80 \text{ mm} = -300 \mu$, vamos ter

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \mu$$

onde segue que

$$\delta_y = \epsilon_y(BC) = (-300 \mu)(40 \text{ mm}) = -12 \mu\text{m}$$

$$\delta_z = \epsilon_z(BD) = (-300 \mu)(60 \text{ mm}) = -18 \mu\text{m}$$

b) **Pressão.** Da Equação 2.29, escrevemos

$$p = -\frac{E\epsilon_x}{1 - 2\nu} = -\frac{(200 \text{ GPa})(-300 \mu)}{1 - 0,58} = 142,9 \text{ MPa}$$

*2.13 DILATAÇÃO VOLUMÉTRICA; MÓDULO DE ELASTICIDADE DE VOLUME⁴

Nesta Seção estudaremos os efeitos causados pelas tensões normais σ_x , σ_y e σ_z no volume de um elemento de certo material. Consideremos para o estudo o cubo elementar da Fig. 2.41. Enquanto se encontra livre de tensões o elemento tem volume unitário. As tensões σ_x , σ_y e σ_z o levam à forma de um paralelepípedo-retângulo de volume

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

As deformações específicas são muito menores que a unidade, e os produtos entre elas que aparecem no desenvolvimento da expressão acima podem ser desprezados. Temos, então:

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

A mudança de volume do elemento será chamada e , que tem valor

$$e = v - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1$$

ou

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (2.30)$$

Como o elemento tinha inicialmente volume unitário, o valor e representa a **variação de volume por unidade de volume**; e é chamado então de *dilatação volumétrica específica* ou *dilatação cúbica específica* do material. Substituindo (2.28) em (2.30) escrevemos:

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E} \quad (2.31)$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

⁴ Como a dilatação e representa uma variação de volume, ela deve ser independente da orientação do elemento considerado. Segue-se das Equações 2.30 e 2.31 que as quantidades $(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$ e $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ são também independentes dessa orientação. Essa propriedade será verificada no Capítulo 6.

Um caso que apresenta interesse especial é o de um corpo submetido à pressão uniforme hidrostática p . Cada componente de pressão é então igual a $-p$ e a Equação 2.31 leva a

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p \quad (2.32)$$

Adotando a notação

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.33)$$

a Equação 2.32 se expressa na forma

$$e = -\frac{p}{k} \quad (2.34)$$

A constante k é chamada **módulo de elasticidade de volume** do material. Ela é expressa nas mesmas unidades do módulo de elasticidade E , em pascal.

É lógico concluir que um material estável sujeito à hidrostática só pode contrair seu volume e a dilatação cúbica específica e na Equação 2.34 é negativa. Daí segue-se que o módulo de elasticidade de volume é um valor positivo. Na Equação 2.33 vemos que $1-2\nu > 0$, ou $\nu < \frac{1}{2}$. O coeficiente de Poisson é positivo, e para materiais usuais

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (2.35)$$

Podemos imaginar um material ideal com valor de ν igual a zero. Esse material poderia ser dilatado em qualquer direção sem sofrer contrações laterais. Por outro lado, um material ideal que tivesse $\nu = \frac{1}{2}$, e portanto $k = \infty$, seria perfeitamente compressível ($e = 0$). A Equação 2.31 nos mostra que, para materiais usuais no regime elástico ($\nu < \frac{1}{2}$), a aplicação de um alongamento em uma direção, por exemplo a direção do eixo x ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$), leva a um aumento do volume ($e > 0$)⁵.

⁵ No regime plástico, entretanto, o volume do material permanece praticamente constante.

EXEMPLO 2.9

Determinar, para o bloco de aço da Fig. 2.42, a variação de volume ΔV quando se aplica a ele uma pressão hidrostática $p = 180$ MPa. Adotar $E = 200$ GPa e $\nu = 0,29$.

A Equação 2.33 nos fornece o módulo de elasticidade de volume do aço,

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{3(1-0,58)} = 158,7 \text{ GPa}$$

e da Equação 2.34 calculamos a dilatação cúbica específica,

$$e = -\frac{p}{k} = -\frac{180 \text{ MPa}}{158,7 \text{ GPa}} = -1,134 \times 10^{-3}$$

O volume do bloco no estado indeformado é

$$V = (80 \text{ mm})(40 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 192 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Como e representa a variação de volume por unidade de volume, $e = \Delta V/V$, teremos então

$$\Delta V = eV = (-1,134 \times 10^{-3})(192 \times 10^3 \text{ mm}^3)$$

$$\Delta V = -218 \text{ mm}^3$$

2.14 DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO

As Equações 2.28 da Sec. 2.12, relacionando as tensões normais e deformações específicas, foram deduzidas assumindo-se que não havia tensões de cisalhamento envolvidas. A Fig. 2.43 mostra um caso de estado de tensões mais geral, onde estão presentes as tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{zx} e τ_{yz} (bem como as tensões correspondentes τ_{yx} , τ_{xz} e τ_{zy}). Essas tensões não têm nenhum efeito direto nas deformações específicas, e enquanto as deformações permanecerem pequenas, não vão influenciar a dedução nem a validade das Equações 2.28. As deformações de cisalhamento tenderão a deformar o cubo elementar em um paralelepípedo oblíquo.

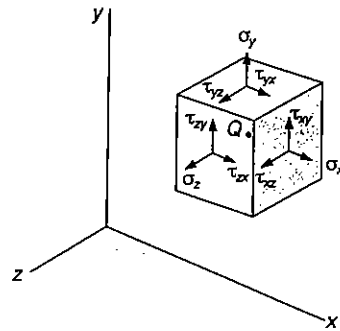


Fig. 2.43

Tomemos inicialmente um cubo elementar de lado unitário, sujeito apenas às tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} aplicadas às faces do cubo, perpendiculares, respectivamente, aos eixos x e y (Fig. 2.44). (Sabemos da Sec. 1.7 que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$). O elemento se deforma assumindo a forma de um romboide de lado unitário (Fig. 2.45). Dois dos ângulos formados pelas quatro faces do cubo que estão sob tensão se reduzem para o valor $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$, enquanto os outros dois aumentam do valor $\frac{\pi}{2}$ para o valor $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$.

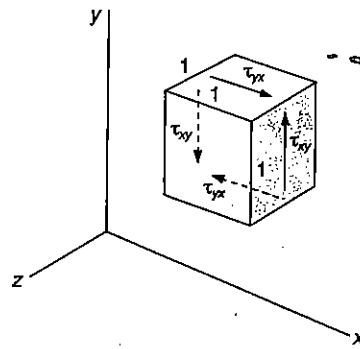


Fig. 2.44

O pequeno ângulo γ_{xy} (expresso em radianos) define a distorção do cubo e é chamado **deformação de cisalhamento** correspondente às direções x e y . Quando a

deformação provoca uma **redução** no ângulo formado pelas faces orientadas segundo os eixos x e y , respectivamente (Fig. 2.45), a deformação de cisalhamento γ_{xy} é positiva; de modo contrário ela é negativa.

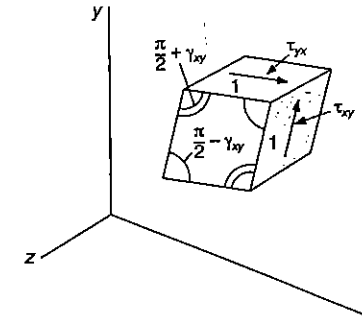


Fig. 2.45

Devemos notar que, como resultado das deformações de elementos vizinhos do material, o cubo elementar pode também estar sujeito a uma rotação. Todavia, como no caso já visto das deformações normais, estamos agora interessados com o estado real de deformação do elemento, e não com qualquer rotação que lhe seja imposta como corpo rígido⁶.

Marcando em um gráfico os valores τ_{xy} e os valores correspondentes de τ_{yx} , obtemos o diagrama tensão-deformação de cisalhamento, para o material em estudo. Isso pode ser conseguido realizando-se um teste de torção, como veremos no Capítulo 3. O diagrama é semelhante àquele das tensões normais obtido para o mesmo material por um teste de tração, já descrito anteriormente. Todavia, valores tais como tensão de escoamento, tensão última etc., para um certo material, dão em torno da metade dos valores obtidos no ensaio de tração desse material. Como no caso das tensões e deformações específicas normais, a parte inicial do diagrama tensão-deformação no cisalhamento é uma linha reta. Para os valores de tensão que não excedam o limite de proporcionalidade no cisalhamento, escrevemos então (nos materiais homogêneos e isotrópicos),

6 Na definição da deformação de cisalhamento γ_{xy} , alguns autores adotam de modo arbitrário que a deformação real do elemento é acompanhada por uma rotação, de modo que as faces horizontais do cubo elementar não rodem. O ângulo γ_{xy} é então representado pelo ângulo segundo o qual rodaram as outras duas faces (Fig. 2.46). Outros ainda adotam uma rotação de tal maneira que as faces horizontais girem no sentido anti-horário de um ângulo $1/2\gamma_{xy}$ e as faces verticais girem no mesmo valor $1/2\gamma_{xy}$ no sentido horário (Fig. 2.47). As duas suposições são desnecessárias e podem levar a confusões. Assim, preferimos neste texto associar a deformação de cisalhamento γ_{xy} com uma *mudança no ângulo* formado por duas faces, ao invés de considerá-la como a *rotação de uma certa face* sob condições restritivas.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.36)$$

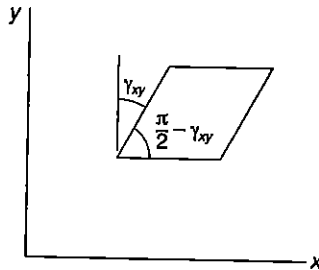


Fig. 2.46

Essa relação é a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento, e a constante G é chamada **módulo de elasticidade transversal** do material. Como a deformação de cisalhamento γ_{xy} foi definida como um ângulo em radianos, ela é adimensional, e o módulo G é expresso nas mesmas unidades de τ_{xy} , em pascal. O módulo de elasticidade transversal G de qualquer material é menor que a metade, mas maior que um terço do módulo de elasticidade E desse material⁷.

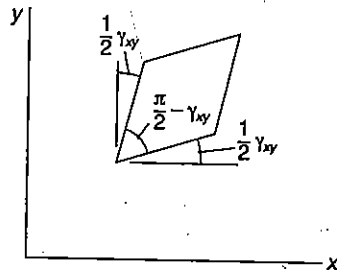


Fig. 2.47

Considerando agora um cubo elementar de certo material submetido às tensões de cisalhamento τ_{yz} e τ_{zy} (Fig. 2.48a), definimos a deformação de cisalhamento

⁷ V. Prob. 2.90.

γ_{yz} como sendo a variação no ângulo formado pelas faces sob tensão. A deformação de cisalhamento γ_{zx} é definida da mesma maneira, considerando-se um elemento sujeito às tensões de cisalhamento τ_{zx} e τ_{xz} (Fig. 2.48b).

Para valores de tensões que não excedam o limite de proporcionalidade, podemos escrever as seguintes relações adicionais.

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (2.37)$$

onde a constante G é a mesma da Equação 2.36.

Para o estado geral de tensões apresentado na Fig. 2.43, podemos aplicar o princípio da superposição e combinar os resultados obtidos nesta seção e na Sec. 2.12, desde que nenhuma das tensões envolvidas exceda o correspondente limite de proporcionalidade. Obtemos dessa maneira o grupo de equações relacionadas abaixo, que representam a Lei de Hooke na forma generalizada, para um material homogêneo e isotrópico sob a ação do estado de tensões mais geral:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= + \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= - \frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Um exame das Equações 2.38 pode levar à falsa suposição de que é necessário determinar-se experimentalmente as três constantes E , G e ν para aplicação das equações. Na verdade, apenas duas dessas constantes precisam ser determinadas para qualquer material, pois a terceira pode ser determinada por um cálculo simples, como veremos na próxima Seção.

EXEMPLO 2.10

Um bloco retangular é feito de material que tem módulo de elasticidade transversal $G = 600$ MPa. O bloco é colado a duas placas horizontais rígidas. A placa inferior é fixa

e a placa superior é submetida à força **P** (Fig. 2.49). Sabendo-se que a placa superior se move de 0,8 mm sob a ação da força, determinar: (a) a deformação de cisalhamento no material; (b) a força **P** que atua na placa superior.

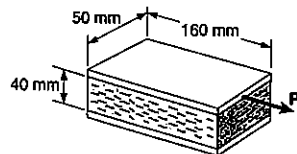


Fig. ex.2.49

a) **Deformação de cisalhamento.** Adotamos para a origem do sistema de eixos coordenados o ponto médio do lado **AB** e dirigido segundo a Fig. 2.50 mostra. De acordo com a definição, a deformação de cisalhamento γ_{xy} é igual ao ângulo formado pela vertical e a linha **CF**, que une os pontos médios de **AB** e **DE**. Lembrando que esse ângulo é bem pequeno, expresso em radianos, temos

$$\gamma_{xy} = \text{tg } \gamma_{xy} = \frac{0,8 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} \quad \gamma_{xy} = 0,020$$

b) **Força atuante na placa superior.** Em primeiro lugar, determina-se a tensão τ_{xy} no material, usando-se a Lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (600 \text{ MPa})(0,020) = 12 \text{ MPa}$$

Em seguida obtém-se a força atuante na placa,

$$P = \tau_{xy}A = (12 \times 10^6 \text{ Pa})(0,160 \text{ m} \times 0,050 \text{ m}) = 96 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 96 \text{ kN.}$$

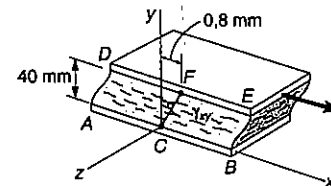


Fig. ex.2.50

2.15 ASPECTOS COMPLEMENTARES NA DEFORMAÇÃO SOB CARGA AXIAL; RELAÇÕES ENTRE E, ν E G

Vimos na Sec. 2.11 que uma barra delgada submetida à força axial de tração apresenta alongamento ao longo do eixo na direção da força e contração nas outras direções transversais. Se a força **P** atua na direção do eixo **x**, a deformação específica axial será ϵ_x , sendo as deformações específicas transversais expressas por $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, onde ν é o coeficiente de Poisson. Dessa forma, um cubo elementar de lado unitário é orientado segundo mostra a Fig. 2.51a se transformará em um paralelepípedo-retângulo de lados $+ \epsilon_x$, $1 - \nu\epsilon_x$ e $1 - \nu\epsilon_x$. (A figura mostra apenas uma face do elemento.) Por outro lado, se o elemento é orientado de forma a ficar a 45° em relação ao eixo do carregamento (Fig. 2.51b), a face mostrada na figura se transforma em um losango. Constata-se que a força axial **P** provoca no elemento uma deformação de cisalhamento γ' igual ao acréscimo ou redução dos ângulos mostrados na Fig. 2.51b⁸.

8 Como pode ser observado, a carga **P** também provoca deformação específica normal no elemento, Fig. 2.51b (V. Prob. 2.74).

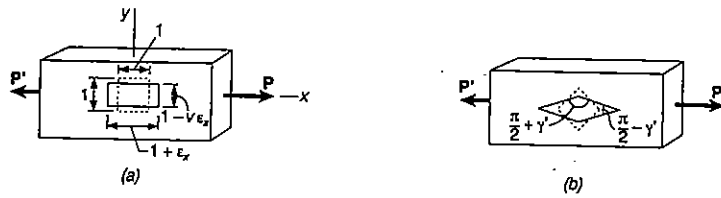


Fig. 2.51

Não deve causar surpresa o fato de um carregamento axial causar deformações de cisalhamento junto com a deformação específica axial, uma vez que a Sec. 1.7 mostrou que uma força axial P causa tensões normais e de cisalhamento de mesmo valor nas quatro faces de um elemento orientado a 45° em relação ao eixo da barra.

Isso foi mostrado na Fig. 1.36, que é repetida aqui por conveniência. Na Sec. 1.6 também se mostrou que a tensão de cisalhamento máxima ocorre em um plano que forma ângulo de 45° com o eixo da força. Segue-se da Lei de Hooke, aplicada a tensões e deformações de cisalhamento, que a deformação de cisalhamento γ' referente ao elemento da Fig. 2.51b também é máxima: γ' = γ_m.

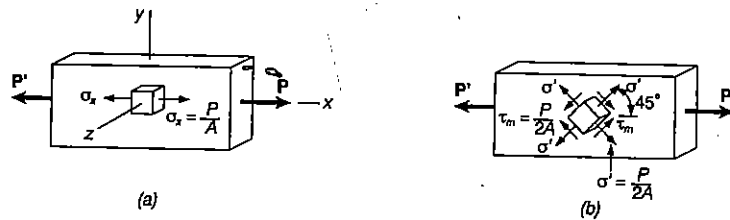


Fig. 1.36 (repetida)

Um estudo mais detalhado da variação das tensões de acordo com a seção considerada será deixado para o Capítulo 6. Por ora, vamos deduzir uma relação entre a máxima deformação de cisalhamento γ' = γ_m referente ao elemento da Fig. 2.51b, e a deformação específica normal ε_x na direção do carregamento. Para esse propósito, vamos considerar o elemento prismático obtido quando se intercepta o tubo elementar da Fig. 2.51a por um plano diagonal (Figs. 2.52a e b). Esse novo elemento, inicialmente com a forma apresentada na Fig. 2.52a, se deforma até se transformar no elemento da Fig. 2.52c, que tem lados horizontal e vertical, respectivamente, 1 + ε_x e 1 - ν ε_x. O

ângulo formado pela face oblíqua e pela face horizontal do elemento da Fig. 2.52b é exatamente metade do ângulo reto do cubo elementar da Fig. 2.51b. O ângulo β no qual este ângulo se transforma deve ser então metade de π/2 - γ_m. Escrevemos então:

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

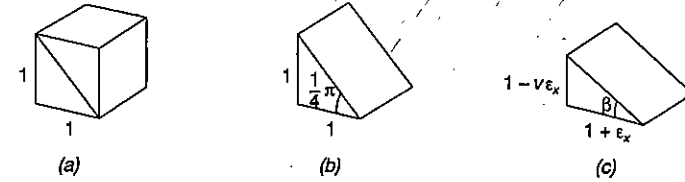


Fig. 2.52

Da expressão trigonométrica da diferença de dois ângulos temos, para tangente:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}}$$

ou, como γ_m/2 é um ângulo muito pequeno,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}} \quad (2.39)$$

Da Fig. 2.52c podemos ver que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \nu \epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \quad (2.40)$$

Igualando (2.39) e (2.40) e isolando γ_m, escrevemos:

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu) \epsilon_x}{1 + \frac{1 - \nu}{2} \epsilon_x} \epsilon_x$$

Como $\epsilon_x \ll 1$, o denominador da expressão acima pode ser adotado igual a 1; teremos então:

$$\gamma_m = (1 + \nu)\epsilon_x \quad (2.41)$$

que é a relação procurada entre a deformação de cisalhamento máxima γ_m e a deformação específica axial ϵ_x .

Para obter uma relação entre as constantes E , ν e G , lembramos que, pela Lei de Hooke, $\gamma_m = \tau_m/G$, e que, para carga axial, $\epsilon_x = \sigma_x/E$. A Equação 2.41 será escrita como:

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu) \frac{\sigma_x}{E}$$

Resolvendo para G , temos

$$G = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\tau_m}{\sigma_x} \quad (2.42)$$

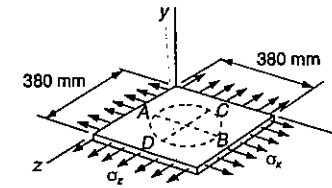
Da Fig. 1.36 vemos que $\sigma_x = P/A$ e que $\tau_m = P/2A$, onde A é a área da seção transversal da barra. Dessa maneira temos $\tau_m/\sigma_x = 1/2$.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.43)$$

que exprime o módulo de elasticidade transversal G em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν .

PROBLEMA RESOLVIDO 2.5

Um círculo de diâmetro $d = 230$ mm é desenhado em uma placa de alumínio sem tensões, de espessura $t = 20$ mm. Aplicam-se então forças que atuam no plano da placa, causando as tensões normais $\sigma_x = 84$ MPa e $\sigma_z = 140$ MPa. Adotando-se $\nu = 1/3$ e $E = 70$ GPa, determinar as variações que ocorrem: (a) no comprimento do diâmetro AB; (b) no comprimento do diâmetro CD; (c) na espessura da placa; (d) no volume da placa.



Lei de Hooke. Notamos que $\sigma_y = 0$. Utilizando as Equações 2.28, determinamos a deformação específica na direção de cada eixo coordenado:

$$\epsilon_x = + \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = \frac{1}{70 \times 10^{-3}} (84 - 0 - \frac{1}{3} 140) = + 0,533 \times 10^{-3} \text{ m/m}$$

$$\epsilon_y = - \frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = \frac{1}{70 \times 10^{-3}} (-\frac{1}{3} 84 + 0 - \frac{1}{3} 140) = - 1,067 \times 10^{-3} \text{ m/m}$$

$$\epsilon_z = - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{70 \times 10^{-3}} (-\frac{1}{3} 84 + 0 + 140) = + 1,600 \times 10^{-3} \text{ m/m}$$

a) **Diâmetro AB.** A variação no comprimento é $\delta_{B/A} = \epsilon_x \cdot d$

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (0,533 \times 10^{-3})(230)$$

$$\delta_{B/A} = + 122,6 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

b) **Diâmetro CD**

$$\delta_{C/D} = \epsilon_z d = (1,60 \times 10^{-3})(230)$$

$$\delta_{C/D} = + 368 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

c) **Espessura.** Temos $t = 20$ mm, e

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-1,067 \times 10^{-3})(20)$$

$$\delta_t = - 21,3 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

d) **Volume.** Utilizando a Equação 2.30 escrevemos:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (+0,533 - 1,067 + 1,600)10^{-3} = 1,067 \times 10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = +1,067 \times 10^{-3}[(380)(380)(20)]$$

$$\Delta V = +3081 \text{ m}^3 \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.66 Em um teste de tração, uma barra de alumínio de 20 mm de diâmetro é submetida a uma força P de 30 kN. Sabendo-se que $E = 80 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,35$, determinar: (a) o alongamento da barra, em um trecho central de 150 mm; (b) a variação do diâmetro da barra.

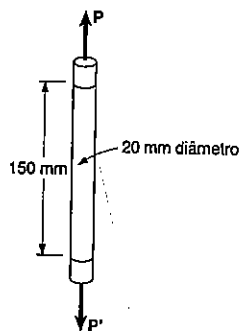


Fig. P2.66 e Fig. P2.67

2.67 Em um teste de tração, uma barra de 20 mm de diâmetro, feita de um plástico que acaba de ser desenvolvido, é submetida a uma força P de intensidade 6 kN. Sabendo-se que um alongamento de 14 mm e um decréscimo de 0,85 mm no diâmetro são observados, em um trecho central de 150 mm de comprimento, determinar: o módulo de elasticidade longitudinal (E), o módulo de elasticidade transversal (G) e o coeficiente de Poisson (ν) do material.

2.68 Uma linha de inclinação 4:10 é desenhada sobre uma placa de latão-amarelo de 150 mm de largura e 6,35 mm de espessura. Usando a tabela do Apêndice B, para esse material, determinar a inclinação da linha quando a placa é submetida a uma carga axial centrada de 200 kN, como indicado.

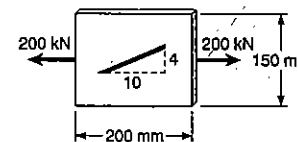


Fig. P2.68

2.69 Um tubo de aço de 1,8 m de comprimento, 300 mm de diâmetro externo e 13 mm de espessura é usado como uma pequena coluna e suporta uma carga axial centrada de 1335 kN. Usando a tabela do Apêndice B, para aço estrutural, determinar: (a) a variação de comprimento do tubo; (b) a variação do diâmetro externo do tubo; (c) a variação da espessura da parede do tubo.

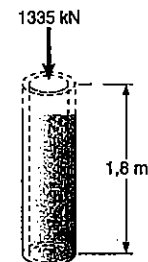


Fig. P2.69

2.70 Um quadrado de 20 mm de lado é desenhado na parede de um vaso de pressão de aço de grandes dimensões. Depois de pressurizado o estado biaxial de tensões no quadrado é como o mostrado. Usando a tabela do Apêndice B, para o aço estrutural, determinar a variação do comprimento: (a) do lado AB ; (b) do lado BC ; (c) da diagonal AB .

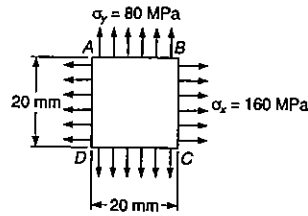


Fig. P2.70

2.71 Para o quadrado do Prob. 2.70, determinar a variação percentual da inclinação da diagonal *DB* devida à pressurização do vaso.

2.72 A barra de alumínio *AD* é ajustada a uma camisa, onde é aplicada uma pressão hidrostática de 40 MPa, no trecho *BC* de comprimento igual a 300 mm. Sabendo-se que $E = 70 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,36$, determinar: (a) a variação do comprimento total *AD* da barra; (b) a variação do diâmetro no ponto médio da barra.

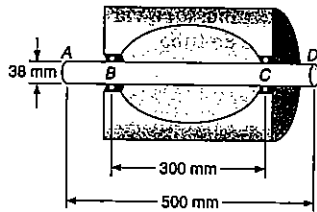


Fig. P2.72

2.73 Para o Prob. 2.72, determinar as forças que poderão ser aplicadas nas extremidades *A* e *D* da barra para que: (a) a deformação axial, na porção *AB* da barra, permaneça nula enquanto a pressão hidrostática estiver aplicada; (b) o comprimento total da barra *AD* permaneça invariável.

2.74 Para uma barra submetida a um carregamento axial, expressar a deformação específica normal ϵ' , na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo do carregamento, em termos da deformação específica axial ϵ_x por: (a) comparação das hipotenusas dos triângulos indicados na Fig. 2.52, que representam um elemento, antes e depois, da deformação; (b) usando os valores das correspondentes tensões σ' e σ_x indicadas na Fig. 1.36, e a Lei de Hooke generalizada.

2.75 A linha de inclinação *b:a*, onde *a* e *b* são ambas diferentes de zero, estava desenhada na placa quando ela estava ausente de tensões. A placa é então submetida ao estado biaxial de tensões indicado. Pede-se: (a) mostrar que dentro da zona elástica e para qualquer material a variação percentual na inclinação da linha pode ser

expressa por $100(\sigma_y - \sigma_x)/2G$. (Sugestão: Usar uma expansão em séries, negligenciando os termos de ordem maior em σ_x/E e σ_y/E); (b) usar o resultado obtido no item a para resolver os Probs. 2.68 e 2.71.

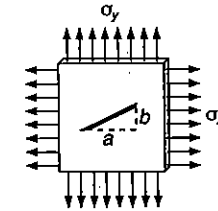


Fig. P2.75

2.76 Em muitas aplicações de carregamento, sabe-se que a tensão normal numa dada direção é nula, como por exemplo, $\sigma_z = 0$, para o caso da placa fina mostrada. Para este caso, conhecido como o estado plano de tensões, mostre que, uma vez conhecidas as deformações específicas ϵ_x e ϵ_y determinadas experimentalmente, nós podemos expressar σ_x , σ_y e σ_z por:

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E \frac{\epsilon_y + \nu \epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

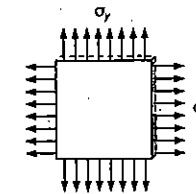


Fig. P2.76

2.77 Em muitas situações físicas, os vínculos impedem que as deformações específicas ocorram em uma dada direção, por exemplo, $\epsilon_z = 0$, para o caso mostrado, onde o movimento longitudinal de qualquer ponto do prisma não é permitido. Assim, seções

planas perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas e separadas com afastamento constante. Mostre que, para esta situação, na qual é conhecido o estado plano de deformações, podemos expressar σ_z , ϵ_x e ϵ_y como segue:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

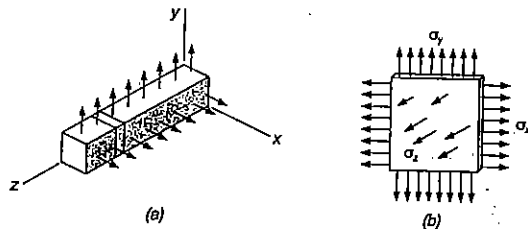


Fig. P2.77

*2.78 Determinar a variação da altura e a variação do volume para: (a) a barra de comprimento 150 mm, considerada no Prob. 2.66; (b) o tubo de comprimento 1,8 m, do Prob. 2.69.

*2.79 Determinar a variação do volume da barra do Prob. 2.72 pelo: (a) cálculo da dilatação do material; (b) subtração do volume original da porção BC, do seu volume final.

*2.80 Um bloco cilíndrico de latão, com 160 mm de altura e 120 mm de diâmetro, é deixado afundar num oceano até uma profundidade onde a pressão é 75 MPa (cerca de 7500 m abaixo da superfície). Sabendo-se que $E = 105 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,35$, determinar: (a) a variação da altura do bloco; (b) sua variação do diâmetro; (c) sua variação do volume.

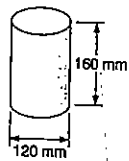


Fig. P2.80

*2.81 Para o bloco do Prob. 2.80, determinar a pressão que pode ser aplicada: (a) somente nas suas faces de topo; (b) somente na sua superfície cilíndrica, para causar a mesma variação do volume e da pressão hidrostática, definida no Prob. 2.80. Em cada caso, encontrar também as correspondentes variações da altura e do diâmetro do bloco.

2.82 Um amortecedor de vibrações consiste em dois blocos de borracha dura, coladas à placa AB, e dois suportes fixos, como indicado. Sabendo-se que a força de intensidade $P = 26,7 \text{ kN}$ causa uma deflexão vertical de 1,6 mm na placa AB, determinar o módulo de elasticidade transversal para a borracha usada.

2.83 Um amortecedor de vibrações consiste em dois blocos de borracha, com um módulo de elasticidade transversal $G = 19 \text{ MPa}$, colados à placa AB, e dois suportes rígidos. Expressando por P a intensidade da força aplicada à placa e por δ a correspondente deflexão, determinar a constante de mola efetiva P/δ do sistema.

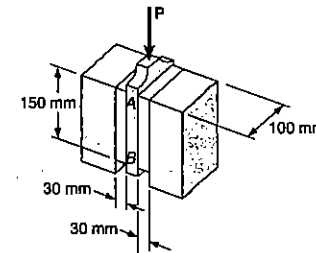


Fig. P2.82 e Fig. P2.83

2.84 O bloco de plástico mostrado é colado a um suporte rígido e a uma placa vertical, na qual uma carga P de 240 kN é aplicada. Sabendo-se que para o plástico usado $G = 1050 \text{ MPa}$, determinar a deflexão da placa.

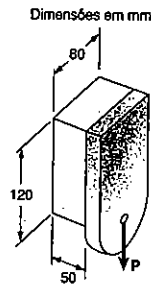


Fig. P2.84

2.85 Qual carga P poderia ser aplicada à placa do Prob. 2.84, para produzir uma deflexão vertical de 1,5 mm?

2.86 Dois blocos de borracha com um módulo de elasticidade transversal $G = 12 \text{ MPa}$ são colados aos suportes rígidos e à placa AB . Sabendo-se que $c = 100 \text{ mm}$ e $P = 45 \text{ kN}$, determinar as menores dimensões para a e b dos blocos, se a tensão de cisalhamento para a borracha não deve exceder a 1,45 MPa e a deflexão da placa deve ser pelo menos de 4,7 mm.

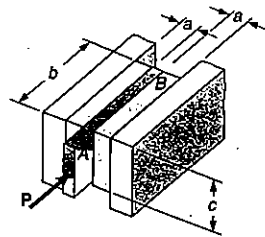


Fig. P2.86 e Fig. P2.87

2.87 Dois blocos de borracha com um módulo de elasticidade transversal $G = 10,3 \text{ MPa}$ são colados aos suportes rígidos e à placa AB . Sabendo-se que

$b = 200 \text{ mm}$ e $c = 125 \text{ mm}$, determinar a maior carga P admissível para os blocos, se a tensão de cisalhamento na borracha não deve exceder 1,45 MPa e a deflexão da placa deve ser pelo menos de 6,4 mm.

*2.88 Um suporte isolador de vibração consiste em uma barra A de raio $R_1 = 10 \text{ mm}$ e um tubo B de raio interno $R_2 = 25 \text{ mm}$, fixados a um tubo de borracha central de 80 mm de comprimento e com módulo de elasticidade transversal $G = 12 \text{ MPa}$. Determinar a maior força P admissível que pode ser aplicada à barra A , sendo que a deflexão não pode exceder a 2,50 mm.

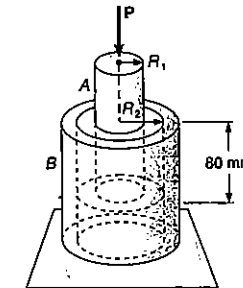


Fig. P2.88 e Fig. P2.89

*2.89 Um suporte isolador de vibração consiste em uma barra A de raio R_1 e um tubo B de raio interno R_2 , fixados a um tubo de borracha central de 80 mm de comprimento e com módulo de elasticidade transversal $G = 10,93 \text{ MPa}$. Determinar o valor necessário da relação R_2/R_1 , se uma força P de 10 kN causa uma deflexão de 2 mm na barra A .

*2.90 Mostre que, para qualquer material dado, a relação G/E , módulo de elasticidade transversal pelo módulo de elasticidade longitudinal, é sempre menor do que 1/2, porém maior do que 1/3. (Sugestão: Consulte a Equação (2.43) e a Sec. 2.13.)

*2.91 As constantes dos materiais E , G , k e ν são relacionadas pelas Equações (2.33) e (2.43). Mostre que qualquer uma destas constantes pode ser expressa em termos de qualquer outra duas constantes. Por exemplo, mostre que: (a) $k = GE/(9G - 3E)$ e (b) $\nu = (3k - 2G)/(6k + 2G)$.

2.16 DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS CAUSADAS POR CARREGAMENTO AXIAL; PRINCÍPIO DE SAINT-VENANT

Adotamos até este ponto que as tensões normais são uniformemente distribuídas em qualquer seção transversal perpendicular ao eixo de uma barra, no caso de força axial. Como vimos na Sec. 1.2, essa suposição não se verifica na vizinhança do ponto de aplicação da força, e a determinação da tensão real em qualquer seção é um problema estaticamente indeterminado.

A Sec. 2.9 mostrou como resolver um problema estaticamente indeterminado, envolvendo a determinação de forças, por meio de considerações sobre as deformações causadas por essas forças. É razoável concluir então que na determinação de tensões em uma barra devemos analisar as deformações específicas produzidas na barra por essas tensões. Esse é o enfoque encontrado em textos mais avançados, onde a teoria matemática da elasticidade é usada na determinação da distribuição de tensões correspondente a vários casos de aplicação das forças nas extremidades de barras. Neste texto, empregando os métodos matemáticos que supomos ao alcance de um curso básico, determinaremos apenas a distribuição de tensões para o caso em que são utilizadas duas placas rígidas para a transmissão das forças à barra (Fig. 2.53).

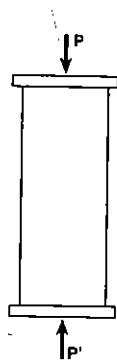


Fig. 2.53

Se as forças são aplicadas no centro das placas⁹, estas deverão se mover uma em direção a outra sem rotação, provocando um encurtamento da barra e um aumento na largura e na espessura. É lógico assumir que o eixo da barra se mantém retilíneo, que as seções planas se mantêm planas e que todos os elementos se deformam da mesma maneira. Essa suposição é compatível com as condições das extremidades da barra.

O que foi dito está ilustrado na Fig. 2.54, que mostra um modelo de borracha antes e depois do carregamento¹⁰. Desde que todos os elementos se deformam da mesma maneira, a distribuição de deformações específicas ao longo do material deve ser uniforme. A deformação específica axial ϵ_y e a deformação específica transversal $\epsilon_x = -\nu\epsilon_y$ são constantes. A Lei de Hooke pode ser aplicada se o material não ficar sujeito a tensões que excedam o limite de proporcionalidade. Podemos escrever $\sigma_y = E\epsilon_y$, donde se deduz que a tensão σ_y também é constante. Então, a distribuição de tensões é uniforme ao longo do modelo, e em qualquer ponto,

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{\text{méd}} = \frac{P}{A}$$

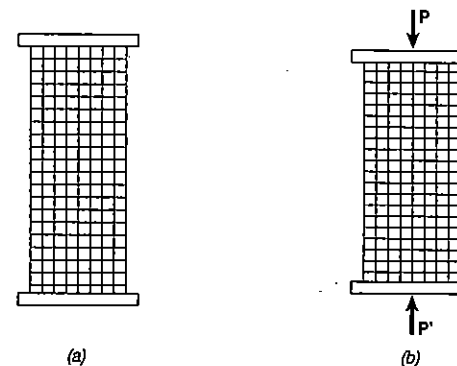


Fig. 2.54

9 De modo mais preciso, podemos dizer que a linha de ação das forças passa pelo centróide da seção transversal (cf. Sec. 1.3).

10 Para barras longas e delgadas ocorre outra configuração de deformação se a força é suficientemente grande; ocorre a flambagem da barra, que assume uma forma curva. Este assunto será visto no Capítulo 11.

Se as cargas são concentradas, como mostra a Fig. 2.55, os elementos da vizinhança dos pontos de aplicação das forças ficam submetidos a grandes tensões, enquanto outros elementos próximos às faces do modelo não são afetados pelo carregamento. Grandes valores de tensões e deformações específicas são observados nas vizinhanças do ponto de aplicação das forças, enquanto não ocorre deformação alguma nos vértices do modelo. À medida que analisamos elementos mais e mais afastados das extremidades da barra, notamos uma progressiva equalização das deformações, conduzindo a uma distribuição mais uniforme de tensões e deformações específicas ao longo da seção transversal. Esse fato fica bem caracterizado na Fig. 2.56, que mostra os resultados obtidos no estudo da distribuição de tensões em uma placa retangular fina, sujeita à carga concentrada, resultados esses obtidos por meio de métodos matemáticos avançados. Notamos que a uma distância b de qualquer borda da placa, sendo b a largura desta, a distribuição de tensões ao longo da seção transversal é praticamente uniforme. Podemos então assumir o valor da tensão normal em qualquer ponto daquela seção transversal como sendo a tensão média $\sigma_y = P/A$. Assim, para as seções transversais situadas a uma distância igual ou maior que b da extremidade da barra, a distribuição de tensões na seção transversal é a mesma, quer a barra tenha sido carregada como indicado na Fig. 2.55 ou na Fig. 2.54. Em outras palavras, com exceção dos pontos na vizinhança do ponto de aplicação da força, a distribuição de tensões pode ser adotada independentemente do modo como se aplica o carregamento. Este resultado, que não se aplica somente a carregamento axial, mas a qualquer tipo de carregamento, é conhecido como **princípio de Saint-Venant** (Adhémar Barré de Saint-Venant, matemático e engenheiro francês, 1797-1886).

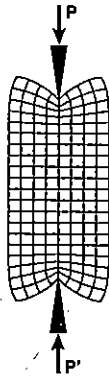


Fig. 2.55

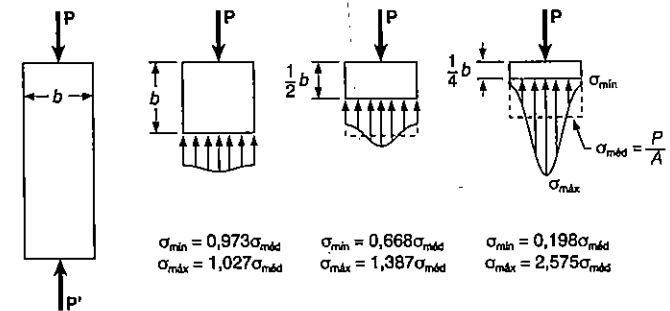


Fig. 2.56

O princípio de Saint-Venant torna possível substituir um certo carregamento por outro mais simples, por ocasião de calcular as tensões em uma peça estrutural. Devemos ter em mente, no entanto, dois pontos importantes para aplicação do princípio:

1. O carregamento real e o carregamento usado na determinação das tensões devem ser estaticamente equivalentes.
2. Nas proximidades dos pontos de aplicação das forças a determinação das tensões se faz por meio de métodos matemáticos avançados ou métodos experimentais, não podendo ser usada a simplificação acima.

Devemos observar que as placas utilizadas para distribuir as tensões de maneira uniforme (Fig. 2.54) devem permitir a livre deformação da barra na direção lateral. Assim, as placas não devem ser coladas à barra, mas devem apenas ser colocadas em contato com ela; devem também ser suficientemente lisas para não impedir a expansão lateral. Tais condições podem ser obedecidas para barras sujeitas a forças de compressão, mas não podem ser cumpridas para materiais sujeitos à tração. Mas mesmo que não se possa fazer ou usar ligações reais que levem a uma distribuição uniforme das tensões, é importante podermos **idealizar** um modelo que permita a distribuição das tensões de maneira uniforme. Tendo em mente esse modelo ideal, podemos então compará-lo com as condições reais de carregamento encontradas na prática.

2.17 CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

Como já foi visto, o valor das tensões nas proximidades dos pontos de aplicação de cargas concentradas é muito maior que a tensão média ao longo da peça. Quando a peça estrutural contém descontinuidades, como furos ou variação brusca de seção, podem ocorrer altos valores de tensões nesses pontos de descontinuidade.

As Figs. 2.57 e 2.58 se referem a dois desses casos citados, mostrando a distribuição de tensões em seções críticas. A Fig. 2.57 mostra o caso de uma placa com um furo circular, indicando a distribuição de tensões na seção que passa pelo centro do furo. A Fig. 2.58 se refere a uma barra chata que consiste de duas seções transversais diferentes, com arredondamentos efetuando a transição da forma da seção; a figura mostra a distribuição de tensões na parte mais estreita da transição, onde ocorrem as maiores tensões.

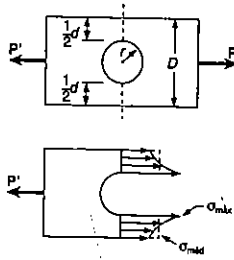


Fig. 2.57 Distribuição de tensões próximas a um furo circular em placa sujeita à carga axial.

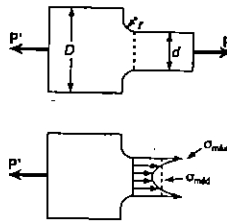


Fig. 2.58 Distribuição de tensões próximas aos adocamentos em barra chata sujeita à carga axial.

Tais resultados foram obtidos experimentalmente através de método fotoelástico. O engenheiro que tiver de projetar ou estudar peças desse tipo não necessitará levar a efeito uma análise fotoelástica, pois os resultados obtidos são independentes das dimensões das peças e do material usado; eles dependem unicamente das relações entre os parâmetros geométricos envolvidos, quer dizer, da relação r/d no caso de furo circular e das relações r/d e D/d no caso de arredondamentos. Além disso, interessa ao projetista o valor máximo da tensão em certa seção, sendo a distribuição real de tensões um dado de menor importância, pois o dimensionamento é conduzido buscando-se evitar que o valor máximo da tensão ultrapasse os valores admissíveis para o material. Por esse motivo, se define a relação/

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{méd}}} \quad (2.44)$$

entre a tensão máxima e a tensão média calculada na seção crítica (mais estreita) de descontinuidade. Essa relação é chamada **coeficiente de concentração de tensões** para a descontinuidade em estudo. Os coeficientes de concentração de tensões podem ser determinados uma única vez, e expressos em termos de relações entre os parâmetros geométricos envolvidos. Os resultados obtidos são colocados em forma de tabelas ou gráficos como o da Fig. 2.59. Assim, para determinação da tensão máxima atuante nas proximidades de um ponto de descontinuidade, o projetista determina a tensão média $\sigma_{\text{méd}} = P/A$ na seção crítica, e multiplica o resultado obtido pelo coeficiente de concentração de tensões K apropriado. Este procedimento é válido para valores de tensão $\sigma_{\text{máx}}$ que não ultrapassem o limite de proporcionalidade do material, pois os valores de K marcados na Fig. 2.59 foram obtidos adotando-se uma relação linear entre tensões e deformações específicas.

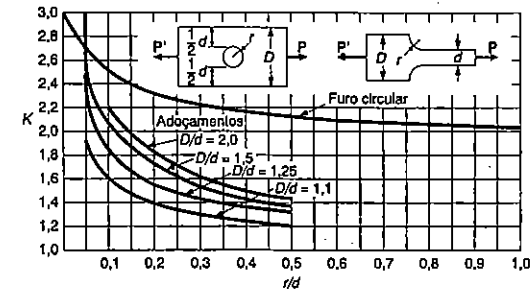


Fig. 2.59 Coeficientes de concentração de tensões para barras chatas sob carga axial¹¹. A tensão média deve ser calculada para a menor seção: $\sigma_{\text{méd}} = P/t$, onde t é a espessura da chapa.

11 M. M. Frocht, "Estudos fotoelásticos de concentração de tensões", *Mechanical Engineering*, ago. 1936, pp. 485-9.

EXEMPLO 2.11

Uma barra chata de aço é constituída de duas partes de 10 mm de espessura, uma com 40 mm e outra com 60 mm de largura, ligadas por uma região de transição com arredondamentos de 8 mm de raio (r). Determinar a máxima carga axial P que pode ser suportada com segurança pela barra, sendo a tensão admissível do material que a compõe $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$.

Inicialmente calculamos as relações

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1,50$$

$$\frac{r}{d} = \frac{8 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0,20$$

Na Fig. 2.59, usando a curva correspondente a $D/d = 1,50$, encontramos o valor do coeficiente de concentração de tensões para $r/d = 0,20$

$$K = 1,72$$

Levando esse valor à Equação 2.44, calculamos

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx}}{1,72}$$

Mas $\sigma_{máx}$ não pode exceder a tensão admissível $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$. Adotando esse valor para $\sigma_{máx}$ encontramos que a tensão média na parte mais estreita ($d = 40 \text{ mm}$) da barra não pode exceder o valor

$$\sigma_{méd} = \frac{165 \text{ MPa}}{1,72} = 96 \text{ MPa}$$

Lembrando que $\sigma_{méd} = P/A$, temos

$$P = A\sigma_{méd} = (40 \text{ mm})(10 \text{ mm})(96 \text{ MPa}) = 38,4 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 38,4 \text{ kN}$$

2.18 DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS

Os resultados a que chegamos até aqui foram baseados na suposição de uma relação linear entre tensões e deformações específicas. Dizendo de outro modo, assumimos que o limite de proporcionalidade do material não foi atingido em nenhum dos casos vistos. Para os fins práticos o limite de proporcionalidade coincide com o limite de elasticidade e com a tensão de escoamento do material, de modo que também assumimos que o material se comportou como elástico, voltando à forma inicial uma vez retirado o carregamento. Se, por qualquer razão, a tensão de escoamento do material é excedida em qualquer ponto da peça em estudo, ocorrem deformações plásticas, e a maior parte dos resultados obtidos anteriormente deixa de ter validade. Se isso ocorrer, devemos levar a efeito uma análise mais minuciosa do problema, baseada em relações não-lineares entre tensões e deformações.

Uma análise que leve em conta as relações reais envolvendo tensões e deformações está fora do alcance deste texto, mas podemos adentrar um pouco no estudo do comportamento plástico dos materiais, considerando um material elastoplástico idealizado, para o qual o diagrama tensão-deformação consiste de dois segmentos de reta como mostra a Fig. 2.60. O diagrama tensão-deformação para o aço doce, na região de elasticidade e na zona plástica, é parecido com esta idealização. Enquanto a tensão σ não excede a tensão de escoamento de σ_e , o material se comporta como elástico e obedece à Lei de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$. Quando σ atinge o valor de σ_e , o material começa a escoar, e deforma-se plasticamente sob carregamento constante. Se o carregamento é removido, a linha de descarregamento no diagrama é a reta CD , paralela à porção inicial AY da curva de carregamento. O segmento AD do eixo horizontal leva à deformação plástica permanente, que se obtém a partir do carregamento e descarregamento do material. Apesar de que nenhum material se comporta exatamente como mostrado na Fig. 2.60, esse diagrama tensão-deformação será útil na análise das deformações plásticas dos materiais dúteis, como o aço doce.

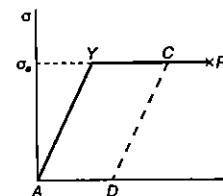


Fig. 2.60

EXEMPLO 2.12

Uma barra de comprimento $L = 500$ mm e área da seção transversal $A = 60$ mm² é feita de material elastoplástico, com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa na zona elástica e tensão de escoamento $\sigma_e = 300$ MPa. A barra está submetida à carga axial até que seu alongamento atinja o valor de 7 mm, quando o carregamento é removido. Qual é a deformação permanente resultante?

Voltando ao diagrama da Fig. 2.60, vemos que a máxima deformação específica, representada pela abscissa do ponto C, é

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{7 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

Por outro lado, a deformação específica no escoamento representada pela abscissa do ponto Y, é

$$\epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{300 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1,5 \times 10^{-3}$$

A deformação específica após o descarregamento é representada pela abscissa ϵ_D do ponto D. Vemos, pela Fig. 2.60, que

$$\begin{aligned} \epsilon_D &= AD = YC = \epsilon_C - \epsilon_e \\ &= 14 \times 10^{-3} - 1,5 \times 10^{-3} = 12,5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

A deformação permanente é δ_D , correspondente à deformação específica ϵ_D . Temos

$$\delta_D = \epsilon_D L = (12,5 \times 10^{-3})(500 \text{ mm}) = 6,25 \text{ mm}$$

EXEMPLO 2.13

Uma barra circular de 800 mm de comprimento e área de seção transversal $A_b = 45$ mm² é colocada dentro de um tubo de mesmo comprimento e área de seção transversal $A_t = 60$ mm². As extremidades do tubo e da barra são presas a um apoio fixo e a uma placa rígida como mostra a seção longitudinal da Fig. 2.61. A barra e o tubo são de material elastoplástico, com módulos de elasticidade $E_b = 200$ GPa e $E_t = 100$ GPa, e tensões de escoamento $(\sigma_b)_e = 200$ MPa e $(\sigma_t)_e = 250$ MPa. Desenhar o diagrama força-deformação do conjunto barra-tubo, quando uma força P é aplicada à placa.

Inicialmente determinamos o esforço interno e o alongamento da barra quando começa o escoamento:

$$(P_b)_e = (\sigma_b)_e A_b = (200 \text{ MPa})(45 \text{ mm}^2) = 9 \text{ kN}$$

$$(\delta_b)_e = (\epsilon_b)_e L = \frac{(\sigma_b)_e}{E_b} L = \frac{200 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} (800 \text{ mm}) = 0,8 \text{ mm}$$

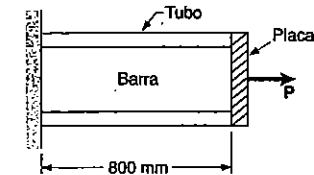


Fig. ex.2.61

Como o material é elastoplástico, o diagrama força-deformação da barra consiste em uma reta inclinada e uma reta horizontal, como mostra a Fig. 2.62a. Adotando a mesma seqüência para o tubo, temos

$$(P_t)_e = (\sigma_t)_e A_t = (250 \text{ MPa})(60 \text{ mm}^2) = 15 \text{ kN}$$

$$(\delta_t)_e = (\epsilon_t)_e L = \frac{(\sigma_t)_e}{E_t} L = \frac{250 \text{ MPa}}{100 \text{ GPa}} (800 \text{ mm}) = 2 \text{ mm}$$

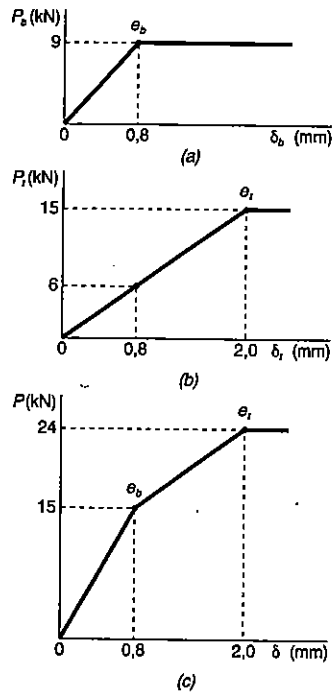


Fig. ex.2.62

O diagrama carga-deslocamento apenas do tubo é mostrado na Fig. 2.62b. É fácil ver que o carregamento e o alongamento do conjunto barra-tubo são, respectivamente,

$$P = P_b + P_t \quad \delta = \delta_b = \delta_t$$

Desenhemos então o diagrama força-deslocamento desejado somando as coordenadas dos diagramas para a barra e para o tubo separadamente (Fig. 2.62c). Os pontos e_b e e_t correspondem ao início do escoamento na barra e no tubo, respectivamente.

EXEMPLO 2.14

Se a carga P aplicada ao conjunto barra-tubo do Ex. 2.13 aumenta de zero até 19,5 kN e decresce novamente até zero, determinar: (a) o máximo alongamento do conjunto; (b) a deformação permanente após a remoção do carregamento.

a) **Alongamento máximo.** Recorrendo à Fig. 2.62c, observamos que a carga $P_{m\acute{a}x} = 19,5$ kN corresponde a um ponto localizado no segmento $Y_b Y_t$ do diagrama carga-deformação do conjunto. Assim, a barra atingiu a zona plástica, com $P_b = (P_b)_Y = 9$ kN e $(\sigma_b)_Y = 200$ MPa, enquanto o tubo ainda está em regime elástico com

$$P_t = P - P_b = 19,5 \text{ kN} - 9 \text{ kN} = 10,5 \text{ kN}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = \frac{10,5 \text{ kN}}{60 \text{ mm}^2} = 175 \text{ MPa}$$

$$\delta_t = \epsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = \frac{175 \text{ MPa}}{100 \text{ GPa}} (800 \text{ mm}) = 1,40 \text{ mm}$$

O máximo alongamento do conjunto é, então,

$$\delta_{m\acute{a}x} = \delta_t = 1,40 \text{ mm}$$

b) **Deformação permanente.** Fazendo agora a força P decrescer de 19,5 kN até zero, os esforços internos P_b e P_t decrescem segundo uma linha reta, mostrada nas Figs. 2.64a e b, respectivamente. A força P_b decresce segundo a linha CD paralela à porção inicial da curva de carregamento, enquanto a força P_t decresce ao longo da curva de carregamento original, uma vez que o ponto de escoamento não foi atingido para o tubo. Sua soma P , então, irá decrescer ao longo da linha CE , paralela à linha OY_b da curva força-deformação do conjunto (Fig. 2.64c). Da Fig. 2.62c podemos calcular a declividade de OY_b , e de CE , que é $m = 15/0,8 = 18,75$. Na Fig. 2.64c, o segmento FE representa a deformação δ' do conjunto durante o descarregamento, e o segmento OE representa a deformação permanente δ_p após a retirada da carga P . Do triângulo CEF , temos

$$\delta' = -\frac{P_{m\acute{a}x}}{m} = -\frac{19,50}{18,75} = -1,04 \text{ mm}$$

A deformação permanente é então

$$\delta_p = \delta_{m\acute{a}x} + \delta' = 1,40 - 1,04 = 0,36 \text{ mm}$$

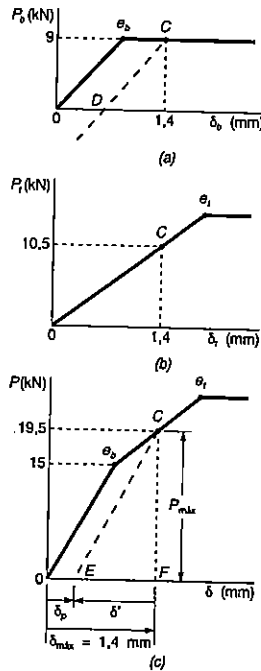


Fig. ex.2.63

A discussão sobre concentrações de tensões da Sec. 2.17 foi conduzida assumindo-se para o material uma relação tensão-deformação linear. As distribuições de tensões mostradas nas Figs. 2.57 e 2.58, bem como os coeficientes de concentração de tensões da Fig. 2.59, não podem ser usados quando ocorrem deformações plásticas, isto é, quando o valor de $\sigma_{m\acute{a}x}$ obtido dessas figuras ultrapassa a tensão de escoamento σ_e .

Considerando novamente a placa da Fig. 2.57 com um furo circular, vamos adotar que o material que a constitui é elastoplástico, ou seja, que o diagrama tensão-deformação específica é aquele da Fig. 2.60. Enquanto não acontecem deformações plásticas, a distribuição de tensões segue o modelo da Sec. 2.17 (Fig. 2.64a). A área limitada pela curva de distribuição das tensões, de valor $\int \sigma dA$, é igual à intensidade da força P . Assim, a área e o valor máximo $\sigma_{m\acute{a}x}$ da tensão devem crescer com o aumento da força P .

Enquanto $\sigma_{m\acute{a}x} \leq \sigma_e$, as distribuições de tensões sucessivas, obtidas com o aumento da força, vão apresentar sempre a mesma forma mostrada na Fig. 2.57 e repetida na Fig. 2.64a. Uma vez atingido o valor P_e , ou ultrapassado esse valor, a

distribuição de tensões começa a se alterar na vizinhança do furo. A maior tensão que pode ocorrer no material é $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_e$, e os pontos nas proximidades do furo passam a apresentar esse valor para a tensão (Figs. 2.64b e c). Isso significa que o material está se escoando na vizinhança da descontinuidade da placa. Se a carga P continuar aumentando, a região atingida pelas tensões de escoamento se expande até atingir as bordas da placa (Fig. 2.64d). Nesse ponto, a distribuição de tensões torna-se constante ao longo da seção da placa, $\sigma = \sigma_e$, e o correspondente valor de P é o maior valor que pode ser utilizado sem causar a ruptura da chapa ($P = P_U$).

É interessante comparar o valor máximo P_e da força que pode ser aplicada quando não se desejam deformações permanentes, com o valor P_U que causa a ruptura da barra. Tomando a expressão da tensão média, $\sigma_{méd} = P/A$, sendo A a área da seção transversal, e lembrando a definição de coeficiente de concentração de tensões, $K = \sigma_{m\acute{a}x}/\sigma_{méd}$, escrevemos

$$P = \sigma_{méd} A = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} A}{K} \quad (2.45)$$

para qualquer valor de $\sigma_{m\acute{a}x}$ que não exceda σ_e . Quando $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_e$ (Fig. 2.64b), temos $P = P_e$, e da Equação 2.45

$$P_e = \frac{\sigma_e A}{K} \quad (2.46)$$

Por outro lado, quando $P = P_U$ (Fig. 2.64d), temos $\sigma_{méd} = \sigma_e$, e então

$$P_U = \sigma_e A \quad (2.47)$$

Comparando as Equações 2.46 e 2.47, concluímos que

$$P_e = \frac{P_U}{K} \quad (2.48)$$

*2.19 TENSÕES RESIDUAIS

No Exemplo 2.12 da Seção anterior, consideramos uma barra que sofreu alongamento além da deformação correspondente ao início do escoamento. Ao retirarmos o carregamento, a barra não recuperou o seu comprimento inicial, permanecendo deformada permanentemente. No entanto, ao retirarmos o carregamento, todas as tensões desapareceram. Esse caso não deve ser encarado como um fato geral.

Na verdade, quando as várias partes ligadas de uma estrutura sofrem deformações plásticas de valores diferentes, as tensões nessas partes não caem para zero quando se retira o carregamento. Algumas peças da estrutura continuarão apresentando tensões chamadas **tensões residuais**.

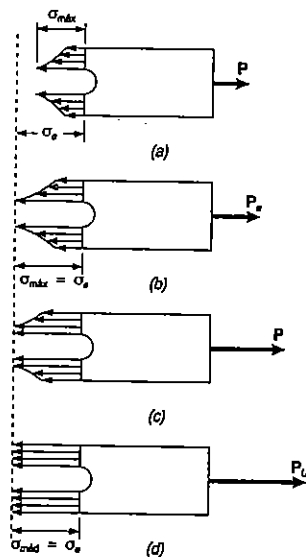


Fig. 2.64 Distribuição de tensões em um material elastoplástico submetido a uma carga crescente.

O próximo exemplo nos ajudará a compreender como aparecem as tensões residuais em uma estrutura.

Exemplo 2.15

Determinar as tensões residuais na barra e no tubo dos Exemplos 2.13 e 2.14 depois da carga **P** ter sido aumentada desde zero até 19,5 kN e decrescer novamente até zero.

Observamos agora na Fig. 2.65 que os esforços internos P_b e P_t não são iguais a zero depois da retirada da força **P**. Seus valores estão indicados pelo ponto **E** nas partes **a** e **b**, respectivamente, da Fig. 2.65. Segue-se que as tensões correspondentes não são iguais a zero, mesmo após a montagem ter sido descarregada. Para determinarmos as tensões residuais correspondentes na barra e no tubo, vamos calcular as tensões inversas σ'_b e σ'_t provocadas pelo descarregamento, e somá-las às tensões máximas $\sigma_b = 200$ MPa e $\sigma_t = 175$ MPa encontradas na parte (a) da resolução.

A deformação específica causada pelo descarregamento é a mesma na barra e no tubo. Ela vale

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-1,04 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} = -1,30 \times 10^{-3}$$

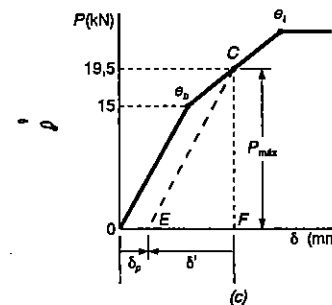
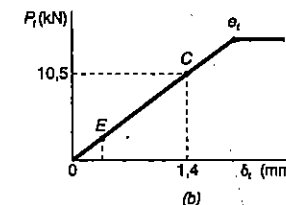
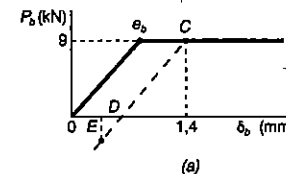


Fig. ex.2.65

As correspondentes tensões inversas na barra e no tubo são, respectivamente

$$\sigma'_b = \epsilon' E_b = (-1,30 \times 10^{-3})(200 \text{ GPa}) = -260 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1,30 \times 10^{-3})(100 \text{ GPa}) = -130 \text{ MPa}$$

As tensões residuais se calculam por superposição das tensões causadas pela fase de descarregamento com aquelas tensões inversas do descarregamento. Temos, então,

$$(\sigma_b)_{res} = \sigma_b + \sigma'_b = 200 \text{ MPa} - 260 \text{ MPa} = -60 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_t)_{res} = \sigma_t + \sigma'_t = 175 \text{ MPa} - 130 \text{ MPa} = +45 \text{ MPa}$$

Quando as deformações plásticas são causadas por variação da temperatura, podem ocorrer também as tensões residuais. Consideremos como exemplo a pequena barra AB que deve ser soldada ao furo da placa Fig. 2.66. Durante o processo de solda a temperatura da barra aumenta até um valor acima de 1000°C, temperatura esta para a qual a rigidez da barra e seu módulo de elasticidade serão praticamente zero. As dimensões da placa, bem maiores, fazem com que sua temperatura não se eleve muito acima da temperatura ambiente (20°C). Desse modo, ao se completar a solda, teremos a barra AB à temperatura T = 1000°C, ligada a uma placa à temperatura de 20°C, sem ocorrência de tensões.

Com o resfriamento da barra, seu módulo de elasticidade aumenta e atinge seu valor normal de cerca de 200 GPa, mais ou menos a 500°C. Como a temperatura continua baixando, temos uma situação semelhante àquela considerada na Sec. 2.10 e ilustrada na Fig. 2.33. Na Equação 2.23 podemos explicitar ΔT, e fazer σ igual à tensão de escoamento, σ_e = 300 MPa, obtendo a variação de temperatura capaz de levar a barra ao escoamento. Adotamos α = 12 × 10⁻⁶/°C, valor médio para o aço.

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300 \text{ MPa}}{(200 \text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C})} = -125^\circ\text{C}$$

Esse valor mostra que a barra começará a escoar em torno de 375°C, e continuará o escoamento a um nível de tensão praticamente constante, até a temperatura ambiente. Assim, como resultado da operação de solda, cria-se uma tensão residual na barra e na solda, de valor aproximadamente igual à tensão de escoamento do aço da barra.

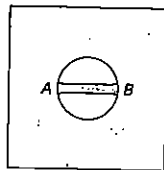


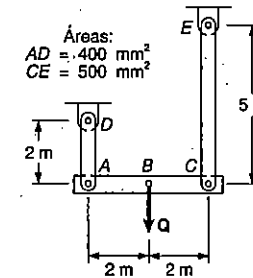
Fig. 2.66

Ocorrem tensões residuais também como resultado do esfriamento de metais fundidos. Nesses casos, a parte externa do metal esfria mais depressa que o interior. A superfície das peças adquire então rigidez (e volta ao valor normal) antes da parte interna. Quando as peças voltam inteiramente à temperatura ambiente, a parte interna se contrai mais que a superfície. Como resultado, a parte interna fica sujeita a tensões residuais de tração, e a superfície se encontra submetida a tensões residuais de compressão.

As tensões residuais devidas a soldas, fundição e usinagem podem ser muito altas, da ordem da tensão de escoamento do material. Tais tensões podem ser eliminadas, se necessário, reaquecendo a peça até mais ou menos 600°C, e efetuando um esfriamento lento, durante 12 a 24 horas.

PROBLEMA RESOLVIDO 2.6

A viga rígida ABC, inicialmente horizontal, é suspensa por duas barras de aço. O ponto médio B da viga se desloca de 10 mm para baixo, pela aplicação lenta da força Q, que é então retirada lentamente. Sabendo-se que o aço usado nas barras tem comportamento elastoplástico, com E = 200 GPa e σ_e = 300 MPa, determinar: (a) o máximo valor de Q necessário e a posição da viga, para a deflexão de 10 mm; (b) a posição final da viga.



Condições de equilíbrio. Sendo Q aplicada no centro da viga, temos

$$P_{AD} = P_{CE} \quad \text{e} \quad Q = 2P_{AD}$$

Comportamento no regime elástico. O máximo valor de Q e a máxima deflexão elástica do ponto A ocorrem quando σ = σ_e na barra AD.

$$(P_{AD})_{\text{máx}} = \sigma_e A = (300 \text{ MPa})(400 \text{ mm}^2) = 120 \text{ kN}$$

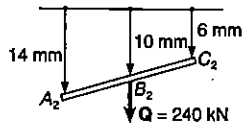
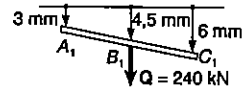
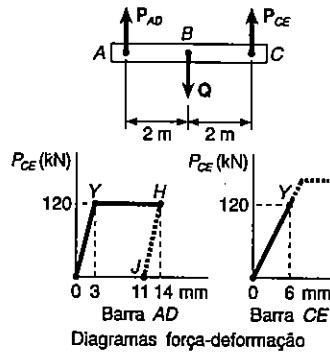
$$Q_{\text{máx}} = 2(P_{AD})_{\text{máx}} = 2(120 \text{ kN}) \quad Q_{\text{máx}} = 240 \text{ kN}$$

$$\delta_{A_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_{\epsilon}}{E} L = \left(\frac{300 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \right) (2 \text{ m}) = 3 \text{ mm}$$

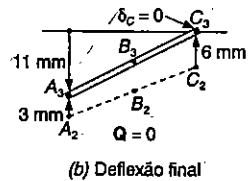
Como $P_{CE} = P_{AD} = 120 \text{ kN}$, a deflexão correspondente no ponto C ocorre quando

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \text{ kN}}{500 \text{ mm}^2} = 240 \text{ MPa}$$

$$\delta_{C_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \left(\frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \right) (5 \text{ m}) = 6 \text{ mm}$$



(a) Deflexão para $\delta_B = 10 \text{ mm}$



(b) Deflexão final

A deformação correspondente em B é

$$\delta_{B_1} = \frac{1}{2}(\delta_{A_1} + \delta_{C_1}) = \frac{1}{2}(3 \text{ mm} + 6 \text{ mm}) = 4,5 \text{ mm}$$

Como devemos ter $\delta_B = 10 \text{ mm}$, concluímos que devem ocorrer deformações plásticas.

Deformações plásticas. Deformações plásticas ocorrem na barra AD para $Q = 240 \text{ kN}$, sendo $\sigma_{AD} = 300 \text{ MPa}$. Como a tensão na barra CE está no regime elástico, δ_C permanece em 6 mm . A deflexão δ_A necessária para levar δ_B ao valor de 10 mm é

$$\delta_{B_2} = 10 \text{ mm} = \frac{1}{2}(\delta_{A_2} + 6 \text{ mm}) \quad \delta_{A_2} = 14 \text{ mm}$$

Descarregamento. Enquanto a força Q é gradualmente removida, a força P_{AD} decresce ao longo da linha HJ paralela à porção inicial do diagrama força-deformação da barra AD . A deflexão final do ponto A é

$$\delta_{A_3} = 14 \text{ mm} - 3 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$$

Como a tensão na barra CE se mantém no regime elástico, vemos que a deflexão final no ponto C é zero.

PROBLEMAS

2.92 Sabendo-se que a tensão normal admissível para o aço da barra mostrada vale 150 MPa , determinar a máxima força P admissível, axial e centrada, que pode ser aplicada à barra.

2.93 Uma força axial e centrada, de intensidade $P = 40 \text{ kN}$, é aplicada à barra de aço mostrada. Determinar o máximo valor da tensão normal: (a) em A ; (b) em B .

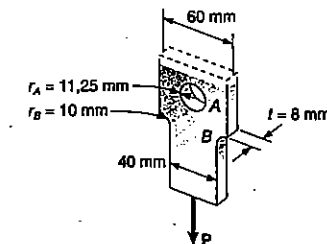


Fig. P2.92 e Fig. P2.93

2.94 Uma força axial e centrada, de intensidade $P = 270$ kN é aplicada à barra de aço mostrada. Determine o máximo valor da tensão normal na barra, sabendo-se que: (a) $d = 120$ mm e $r = 15$ mm; (b) $d = 100$ mm e $r = 25$ mm; (c) $d = 75$ mm e $r = 40$ mm.

2.95 A tensão normal admissível para o aço da barra mostrada vale 125 MPa. Determinar a máxima força P admissível, axial e centrada, que pode ser aplicada à barra, sabendo-se que $d = 100$ mm e: (a) $r = 15$ mm; (b) $r = 25$ mm.

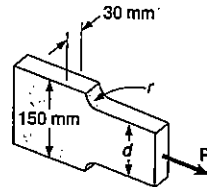


Fig. 2.94 e Fig. 2.95

2.96 O corpo de prova de alumínio mostrado é submetido a duas forças centradas e axiais iguais e opostas, de intensidade P . Pede-se: (a) Sabendo-se que $E = 70$ GPa e $\sigma_{adm} = 200$ MPa, determinar o máximo valor admissível de P e o correspondente alongamento para a amostra total; (b) resolver o item a, considerando que o corpo de prova foi substituído por uma barra de alumínio de mesmo comprimento, mas de seção transversal retangular uniforme de 60×15 mm.

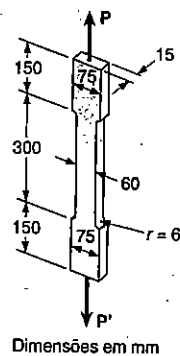


Fig. 2.96

2.97 Para o corpo de prova do Prob. 2.96, determinar o máximo valor da tensão normal correspondente ao alongamento total de 0,75 mm.

2.98 Uma força axial e centrada P é aplicada à barra de aço mostrada. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 165$ MPa e $b = 75$ mm, determinar: (a) o maior valor admissível para P ; (b) o menor valor permissível de r_f para que no arredondamento a tensão normal admissível não seja excedida com a aplicação da carga P encontrada no item a.

2.99 Uma força axial centrada P , de intensidade $P = 90$ kN, é aplicada à barra de aço mostrada. Sabendo-se que $b = 90$ mm, determine: (a) a máxima tensão normal no furo; (b) o menor valor permissível de r_f , se a máxima tensão normal no arredondamento não deve exceder a máxima tensão normal no furo.

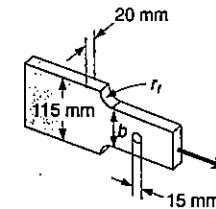


Fig. P2.98 e Fig. P2.99

2.100 Uma barra cilíndrica AB tem um comprimento L de 1,83 m e um diâmetro de 32 mm. Ela é feita de um aço doce, que é assumido ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. Uma força P é aplicada na barra até a sua extremidade A descer de um valor δ_m . Determinar o máximo valor da força P e deformação permanente da barra, depois que a força for removida, sabendo-se que: (a) $\delta_m = 3,2$ mm; (b) $\delta_m = 6,35$ mm.

2.101 Uma barra cilíndrica AB tem um comprimento L de 1,50 m e um diâmetro de 20 mm. Ela é feita de um aço doce, que é assumido ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. Uma força P é aplicada à barra e depois removida, dando a ela uma deformação permanente δ_p . Determinar o máximo valor da força P e da deformação δ_m , para que a barra seja alongada, produzindo um valor δ_p desejado de: (a) 2,5 mm; (b) 5,0 mm.

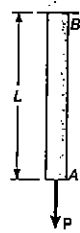


Fig. P2.100 e Fig. P2.101

2.102 A barra ABC consiste em duas porções cilíndricas AB e BC; ela é feita de um aço doce, que é assumido ser elastoplástico com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$. Uma força P é aplicada à barra e depois removida, dando a ela uma deformação permanente $\delta_p = 2 \text{ mm}$. Determinar o máximo valor da força P e o máximo valor δ_m , para que a barra seja alongada, produzindo a deformação permanente desejada.

2.103 A barra ABC consiste em duas porções cilíndricas AD e BC. Ela é feita de um aço doce que é assumido se elastoplástico com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$. Uma força P é aplicada à barra até que sua extremidade A se mova para baixo, de um valor igual a $\delta_m = 5 \text{ mm}$. Determinar o máximo valor da força P e a deformação permanente na barra depois da força ser removida.

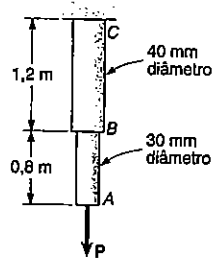


Fig. P2.102 e Fig. P2.103

2.104 A barra AB consiste em duas porções, AC e CB, cada uma com 200 mm de comprimento e 1935 mm^2 de área da seção transversal. A porção AC é feita de um aço doce com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$, a porção CB, de um aço rápido com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_c = 350 \text{ MPa}$. Uma carga P é aplicada em C, como indicado. Pedese: (a) Assumindo que ambos os aços são elastoplásticos, desenhe o diagrama carga-deflexão para o ponto C; (b) Se P cresce gradualmente desde zero, determinar a máxima deflexão em C, a máxima tensão em cada porção da barra e a deflexão permanente do ponto C.

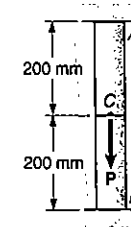


Fig. P2.104

2.105 Para a barra composta do Prob. 2.104, se P cresce gradualmente desde zero até a deflexão do ponto C atingir um valor máximo δ_m e, depois, retorna a zero, pede-se determinar o máximo valor de P , a máxima tensão em cada porção da barra, e a deflexão permanente em C, quando: (a) $\delta_m = 0,28 \text{ mm}$; (b) $\delta_m = 0,38 \text{ mm}$.

2.106 Uma barra de 300 mm de comprimento e seção transversal retangular de $20 \times 50 \text{ mm}$ consiste em duas lâminas de aço doce, cada uma com 6 mm de espessura coladas a uma lâmina central de 8 mm de espessura, de aço temperado. Esta barra composta é submetida a uma carga axial central de intensidade P . Assume-se que ambos os aços são elastoplásticos com $E = 200 \text{ GPa}$ e com tensão de escoamento de 250 MPa e 690 MPa, respectivamente para o aço doce e para o aço temperado. Desenhe o diagrama carga-deflexão para a barra composta. Usando este diagrama, determinar o máximo valor de P , a máxima tensão em cada lâmina, e a deformação permanente na barra quando P cresce gradualmente desde zero até a deformação da barra atingir um valor máximo δ_m e então retornar a zero, considerando: (a) $\delta_m = 0,621 \text{ mm}$; (b) $\delta_m = 1,242 \text{ mm}$.

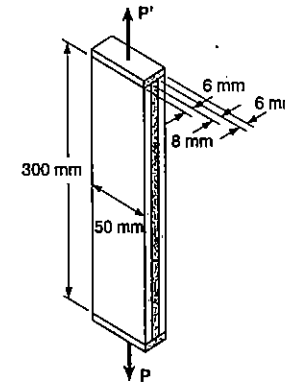


Fig. P2.106

***2.107** Para a barra composta do Prob. 2.106, se P cresce gradualmente desde zero até 357 kN e, depois retorna a zero, pede-se determinar a máxima deformação na barra, a máxima tensão em cada lâmina e, a deformação permanente na barra.

***2.108** Para a barra composta do Prob. 2.104, determinar a tensão residual em cada porção da barra, se P cresce gradualmente desde zero até 1080 kN e então decresce até zero.

***2.109** Para a barra composta do Prob. 2.104, determinar a tensão residual em cada porção da barra, se P cresce gradualmente desde zero até a deflexão do ponto C atingir um valor máximo δ_m e então decresce até zero, quando: (a) $\delta_m = 0,28$ mm; (b) $\delta_m = 0,381$ mm.

***2.110** Para a barra composta do prob. 2.106, determinar a tensão residual em cada lâmina, se P cresce gradualmente desde zero até a deformação da barra atingir um valor máximo δ_m e então decresce até zero, quando (a) $\delta_m = 0,621$ mm; (b) $\delta_m = 1,242$ mm.

***2.111** Para a barra composta do Prob. 2.106, determinar a tensão residual em cada lâmina, se P cresce gradualmente desde zero até 357 kN e então, decresce até zero.

***2.112** A barra rígida ABC é suportada por duas hastes de ligação AD e BE , de seção transversal retangular uniforme de $6,35 \times 38,1$ mm e é feita de um aço doce, que é assumido ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. A intensidade Q de uma força aplicada em B , decresce até zero. Sabendo-se que $a = 610$ mm, determinar: (a) a máxima deflexão do ponto B e o correspondente valor da tensão normal em cada haste; (b) a deflexão final do ponto B e a tensão residual em cada haste. Assume-se que as hastes são conectadas de maneira que possam receber forças de compressão, sem no entanto flambar.

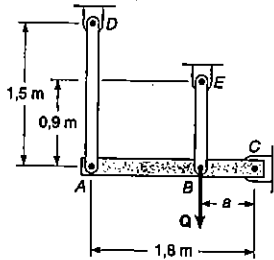


Fig. P2.112

***2.113** Resolver o Prob. 2.112, se $a = 1,2$ m e se Q cresce gradualmente desde zero até 150 kN e então decresce até zero.

***2.114** A barra rígida ABC é suportada por duas hastes de ligação BD e CE , de seção transversal retangular uniforme de 40×8 mm e é feita de um aço doce, que é assumido ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. A intensidade Q de uma força aplicada em B cresce gradualmente desde zero até a deflexão em B atingir 0,840 mm e então decresce até zero. Sabendo-se que $a = 0,9$ m, determinar: (a) o máximo valor de Q e o correspondente valor da tensão normal em cada haste; (b) a deflexão final do ponto B e a tensão residual em cada haste. Assume-se que as hastes são conectadas de maneira que possam receber forças de compressão, sem no entanto flambar.

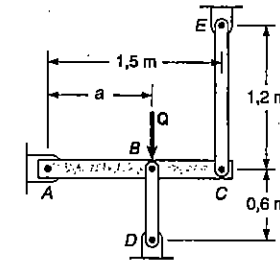


Fig. P2.114

***2.115** Resolver o Prob. 2.114 se $a = 0,6$ m e se Q cresce gradualmente desde zero até a deflexão em B atingir 0,720 mm e então decresce até zero.

***2.116** Uma barra de aço de comprimento L e seção transversal uniforme de área A , está fixada na extremidades a dois suportes rígidos e ausente de tensões a uma temperatura de 20°C . O aço é assumido ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. Sabendo-se que $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, determinar: (a) a tensão na barra, quando a temperatura for aumentada para 150°C ; (b) a tensão residual, depois que a temperatura retornar a 20°C .

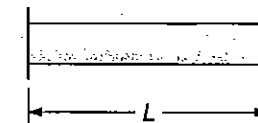


Fig. P2.116

***2.117** Resolver o Prob. 2.116, considerando que *por uma segunda vez*, a temperatura da barra é aumentada e depois diminuída.

2.118 A barra ACB é engastada aos suportes rígidos e está ausente de tensões a uma temperatura de 25°C. O aço é assumido elastoplástico com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$. A temperatura de ambas as porções da barra é então elevada para 150°C. Sabendo-se que $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, determinar: (a) a tensão em ambas as porções da barra; (b) o deslocamento do ponto C.

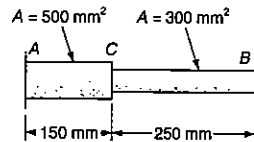


Fig. P2.118

*2.119 Resolver o Prob. 2.118, considerando que a temperatura da barra é elevada para 150°C e então retorna para 25°C.

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado para a introdução do conceito de *deformação específica*, no sentido de discutir a relação entre tensão e a deformação específica, em vários tipos de materiais, e para a determinação de deformações de componentes estruturais sob carregamento axial.

Considerando uma barra de comprimento L e seção transversal uniforme, e chamando-se de δ sua deformação sob uma carga axial P (Fig. 2.1), nós definimos a *deformação específica normal* ϵ da barra como sendo a *deformação por unidade de comprimento* (Sec. 2.2):

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2.1)$$

No caso de uma barra de seção transversal *variável*, a deformação específica normal foi definida, em um dado ponto Q , considerando-se um pequeno elemento da barra em torno de Q . Expressando-se por Δx o comprimento do elemento e por $\Delta \delta$ sua deformação devida a um do carregamento, escrevemos:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (2.2)$$

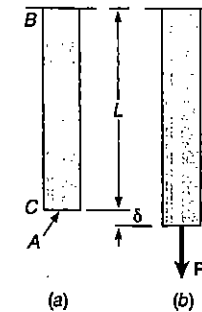


Fig. 2.1

Plotando-se a tensão σ versus a deformação específica ϵ , enquanto a carga cresce gradualmente, obtemos o *diagrama tensão-deformação* do material estudado (Sec. 2.3). De tal diagrama, somos capazes de distinguir materiais *frágeis* de materiais *dúcteis*. Um corpo de prova feito de material frágil rompe-se sem qualquer aviso prévio de variação da taxa de alongamento (Fig. 2.11); enquanto que, um *CDP* feito de

material dútil *escoa* depois de uma tensão crítica σ_e , chamada *tensão de escoamento*, ser alcançada, isto é, a *CDP* sofre uma grande deformação antes da ruptura, com um acréscimo relativamente pequeno da carga aplicada (Fig. 2.9).

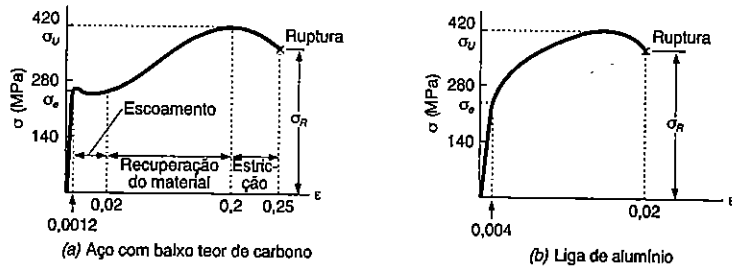


Fig. 2.9 Diagramas tensão-deformação para dois materiais dúteis típicos.

Notamos na Sec. 2.5 que a porção inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta. Isto significa que para pequenas deformações a tensão é diretamente proporcional à deformação:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.4)$$

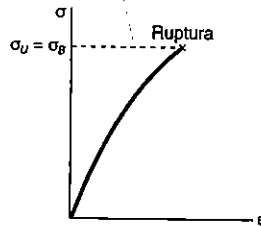


Fig. 2.11 Diagrama tensão-deformação para um material frágil típico.

Esta relação é conhecida como a *Lei de Hooke* e o coeficiente E como *módulo de elasticidade longitudinal* do material. A maior tensão para qual a Equação (2.4) se aplica é a *tensão de proporcionalidade* do material.

Se as deformações específicas causadas no *CDP*, pela aplicação de uma dada carga, desaparecem quando a carga é removida, o material é dito ter *comportamento elástico*, e a maior tensão para a qual isto ocorre é chamada *limite elástico* do material

(Sec. 2.6). Se o limite elástico é excedido, a tensão e a deformação específica decrescem linearmente quando a carga é removida e a deformação específica não mais retorna a zero (Fig. 2.16), indicando que uma *modificação permanente* ou *deformação plástica* do material ocorreu.

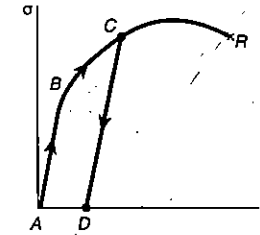


Fig. 2.16

Na Sec. 2.7 discutimos o fenômeno da *fadiga*, que causa a falha em componentes estruturais ou de máquinas, após um grande número de carregamentos repetidos, apesar da tensão permanecer na faixa elástica.

Um ensaio de fadiga consiste em determinar o número n de sucessivos ciclos de carregamentos e descarregamentos necessários para causar a falha da amostra do material, para uma dada tensão máxima σ , e assim plotando-se o resultado de $\sigma \cdot n$ numa curva. O valor de σ para o qual a falha não ocorre, mesmo para um número grande de indefinidos ciclos, é conhecido como a *tensão-limite de fadiga* do material usado no teste.

A Sec. 2.8 é voltada para a determinação da deformação elástica, para vários tipos de componentes estruturais ou de máquinas, sob condições diversas de carregamento axial. Nós vemos que se uma barra de comprimento L e seção transversal uniforme de área A é submetida a uma carga P , axial e centrada, em sua extremidade (Fig. 2.20), a correspondente deformação é

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (2.7)$$

Se a barra é carregada em vários pontos ou consiste em várias partes com seções transversais diferentes, e ainda, possivelmente, de diferentes materiais, a deformação δ da barra deve ser expressa como o somatório das deformações nas várias partes (Exemplo 2.1):

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (2.8)$$

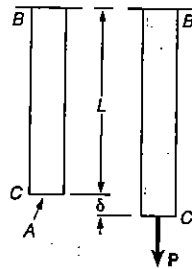


Fig. 2.20

A Sec. 2.9 é voltada para a solução de *problemas estaticamente indeterminados*, isto é, problemas nos quais as reações e as forças internas *não podem* ser determinadas simplesmente pela Estática. As equações de equilíbrio tiradas do diagrama de corpo livre do membro em estudo são complementadas por relações envolvendo deformações, obtidas da geometria do problema. As forças na barra e no tubo da Fig. 2.23a, por exemplo, são obtidas por simples observação; isto significa que a soma delas é igual a P, e que estas causam as mesmas deformações na barra e no tubo (Exemplo 2.2). De maneira semelhante, as reações nos suportes da barra da Fig. 2.24 não poderiam ser obtidas diretamente do diagrama de corpo livre da barra (Exemplo 2.3); no entanto, seriam possíveis, se considerarmos que o alongamento total da barra deve ser nulo.

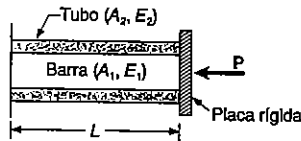


Fig. 2.23a

Na Sec. 2.10, problemas envolvendo *variação de temperatura* foram apresentados. Primeiro observamos que se a temperatura aumentou de um ΔT , em uma barra AB bi-engastada e de comprimento L, seu alongamento, é

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (2.21)$$

onde α é o *coeficiente de dilatação térmica* do material. Notamos que a deformação específica correspondente, chamada *deformação térmica específica*, é

$$\epsilon_T = \alpha\Delta T \quad (2.22)$$

e que *não existem tensões* relacionadas com esta deformação.

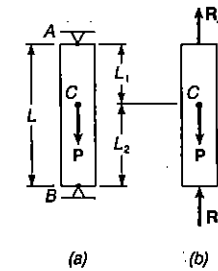


Fig. 2.24

Entretanto, se a barra AB está engastada em suas extremidades (Fig. 2.33a), tensões se desenvolvem na barra com o aumento da temperatura, devido às reações dos apoios. Para determinar a intensidade P das reações, removemos o apoio B (Fig. 2.34) e consideramos separadamente a deformação da barra δ_T , quando ela se expande livremente devido à variação de temperatura e à deformação δ_P causada pela força P necessária para retornar ao seu comprimento original, de tal maneira que possa ser novamente fixado ao apoio B. Escrevendo que a deformação $\delta = \delta_T + \delta_P$ é igual a zero, obtemos uma equação como função de P. Ainda que a deformação específica total na barra AB seja obviamente nula, isto não quer dizer que, em barras e vigas que possuam porções de diferentes seções transversais ou diferentes materiais, as deformações em suas várias porções sejam nulas (Exemplo 2.6).

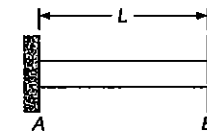


Fig. 2.33a

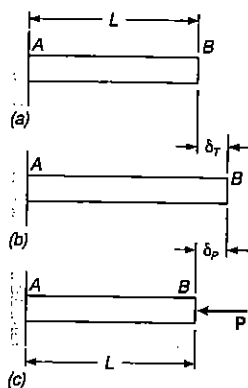


Fig. 2.34

Quando uma força axial P é aplicada a uma barra em balanço, homogênea (Fig. 2.37a), esta causa uma deformação específica, não *somente ao longo* do eixo longitudinal da viga, mas também em todas as direções transversais (Sec. 2.11). Esta deformação específica é chamada *deformação específica transversal*, e a relação entre a deformação específica transversal e a longitudinal é chamada *coeficiente de Poisson*, que é expresso por ν (letra grega nu). Escrevemos

$$\nu = \left| \frac{\text{deformação específica transversal}}{\text{deformação específica axial}} \right| \quad (2.25)$$

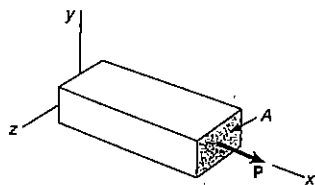


Fig. 2.37a

Lembrando que a deformação específica axial na barra é $\epsilon_x = \sigma_x/E$, podemos expressar, como se mostra a seguir, a condição de deformação específica sob um carregamento axial na direção x :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (2.27)$$

Este resultado foi mostrado na Sec. 2.12 para o caso de um carregamento multiaxial, causado pelo estado de tensões mostrado na Fig. 2.40. A condição de deformação específica resultante foi descrita pelas seguintes relações, denominadas como *Lei de Hooke generalizada* para um carregamento multiaxial:

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \quad (2.28)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

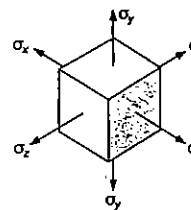


Fig. 2.40

Se um elemento do material é submetido às tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, ele se deformará, resultando numa variação de seu volume (Sec. 2.13). A *variação no volume por unidade de volume* é dita como *dilatação volumétrica específica* ou *dilatação cúbica específica* do material e é expressa por e . Foi mostrado que

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.31)$$

Quando um material está submetido a uma pressão hidrostática p , temos:

$$e = -\frac{p}{k} \quad (2.34)$$

onde k é chamado *módulo de elasticidade de volume* do material

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.33)$$

Como vimos no Capítulo 1, o estudo de tensões em um material sob condições mais gerais de carregamento envolve tanto tensões de cisalhamento, como tensões normais (Fig. 2.43). As tensões de cisalhamento tendem a deformar um elemento cúbico do material, em um paralelepípedo oblíquo (Sec. 2.14). Considerando, por exemplo, as tensões τ_{xy} e τ_{yx} mostradas na Fig. 2.45 (que são iguais em intensidade), notamos que causam um aumento ou redução dos ângulos entre as faces onde ambas atuam, de um pequeno ângulo γ_{xy} ; ângulo este que é expresso em radianos e define a *deformação específica de cisalhamento* correspondente às direções x e y . Definindo de maneira semelhante, γ_{yz} e γ_{zx} escrevemos as relações

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (2.36,37)$$

as quais são válidas para qualquer material isotrópico e homogêneo, dentro de seus limites de proporcionalidade no cisalhamento. A constante G , que é denominada *módulo de elasticidade transversal* do material, e as relações obtidas, expressam a *Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento*.

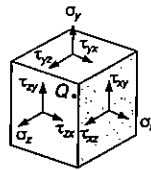


Fig. 2.43

Juntamente com as Equações (2.28), elas formam um grupo de equações que representam a *Lei de Hooke generalizada* para um material isotrópico e homogêneo, sujeito às condições mais gerais de carregamento.

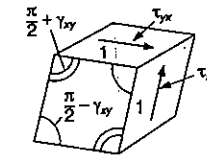


Fig. 2.45

Nós observamos na Sec. 2.15 que, enquanto uma força axial aplicada a uma barra em balanço produz somente deformações específicas normais, nas direções axial e transversal, tomando-se um elemento do material orientado ao longo do eixo da barra, esta produzirá, num elemento girado de 45° (Fig. 2.51), deformações específicas normais axial e de cisalhamento. Também notamos que três constantes, E , ν e G , não são independentes; elas satisfazem a relação

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \quad (2.43)$$

a qual pode ser usada para determinar qualquer das três constantes, em termos das outras duas.

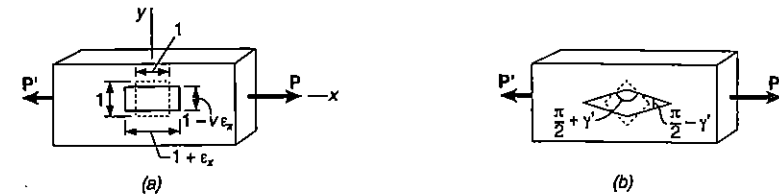


Fig. 2.51

Na Sec. 2.16, discutimos o *princípio de Saint-Venant*, o qual mostra que, com exceção das vizinhança dos pontos de aplicação das cargas, a distribuição de tensões para um dado membro é independente do modo real de como se aplicam as cargas. Este princípio faz com que seja possível assumir uma distribuição uniforme de tensões, em um membro submetido a cargas axiais concentradas, exceto próximo aos pontos de aplicação das cargas, onde ocorrerão concentração de tensões.

A concentração de tensões também ocorrerá próximo às descontinuidades de membros estruturais, tanto num furo, como numa mudança brusca de seção (Sec. 2.17). A relação entre o máximo valor da tensão, ocorrendo próximo da descontinuidade, e a tensão média calculada na seção crítica da descontinuidade é denominada *coeficiente de concentração de tensões* para a descontinuidade e expressa por K :

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{méd}}} \quad (2.44)$$

Valores de K para furos circulares e adoçamentos em barras chatas são dados na Fig. 2.59.

Na Sec. 2.18, discutimos as *deformações plásticas* que ocorrem em membros estruturais feitos de material dúctil, quando as tensões em alguma parte do membro excede a tensão de escoamento do material. Nossa análise considerou um *material elastoplástico* ideal, caracterizado pelo diagrama tensão-deformação mostrado na Fig. 2.60 (Exemplos 2.12, 2.13 e 2.14). Finalmente, na Sec. 2.19, observamos que quando uma estrutura qualquer é submetida a deformações plásticas, de maneira geral, as tensões não mais voltam a zero, depois de o carregamento ser removido. As tensões permanentes, localizadas em várias partes da estrutura, são chamadas *tensões residuais* e podem ser determinadas pela adição das tensões máximas atingidas durante a fase de carregamento, com as correspondentes tensões inversas devidas à fase de descarregamento (Exemplo 2.15).

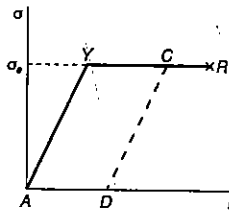


Fig. 2.60

PROBLEMAS DE REVISÃO

2.120 Uma barra de latão de 9,5 mm de diâmetro é fixada à base de um vaso cilíndrico de latão CD , cuja área da seção transversal é de 325 mm^2 . O vaso CD é fixado a um suporte fixo em C , e um tampão E é fixado na extremidade A da barra. Sabendo-se que o módulo de elasticidade longitudinal do latão é 105 GPa , determinar a intensidade da carga P , para que o tampão se desloque $1,27 \text{ mm}$ para baixo.

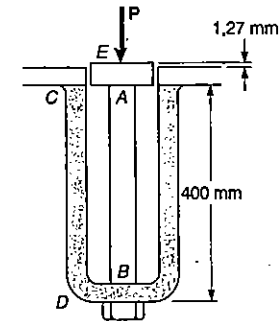


Fig. P2.120

2.121 Um arame de aço CD de 2 mm de diâmetro tem seu comprimento ajustado de forma que, se nenhum carregamento atuar, existe uma distância de $1,5 \text{ mm}$ entre a extremidade B , da viga rígida ABC , e um ponto de contato E . Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar em que ponto da viga uma carga de 220 N pode ser aplicada de modo a causar o contato entre B e E .

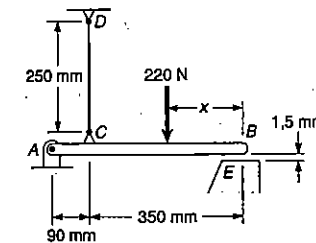


Fig. P2.121

2.122 Os parafusos de aço ($E = 200$ GPa), com 15 mm de diâmetro, são rosqueados nas extremidades com rosca de passo igual a 2,25 mm. Após ser perfeitamente ajustada, a rosca em C é apertada de uma volta completa. Determinar: (a) a tensão no parafuso CD ; (b) o deslocamento do ponto C da barra rígida ABC .

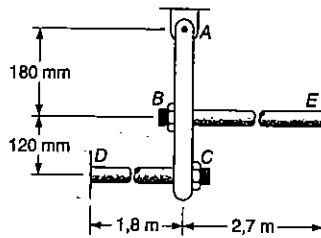


Fig. P2.122

2.123 Resolver o Prob. 2.122, considerando que depois de ser perfeitamente ajustada, a porca em B é apertada de uma volta completa.

2.124 Uma barra AB tem uma seção transversal de área 1250 mm² e é feita de um aço-doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 280$ MPa. Sabendo-se que a força F cresce gradualmente desde zero até 600 kN, quando então, decresce até zero. Determinar: (a) a deflexão permanente do ponto C ; (b) a tensão residual na barra.

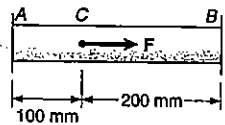


Fig. P2.124

2.125 A variação no diâmetro de um parafuso longo de aço, é medida cuidadosamente enquanto o parafuso é apertado. Usando a tabela do Apêndice B, para aço estrutural, determine o esforço interno no parafuso, uma vez que é observado o diâmetro diminuir de 12 μ m.

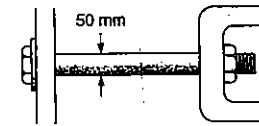


Fig. P2.125

2.126 A barra de aço ACB é fixada em suas extremidades a suportes rígidos e está ausente de tensões a uma temperatura de 20°C . Considerando o aço ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa e sabendo-se que $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, determinar a tensão na porção AC e a deflexão do ponto C , se a temperatura em ambas as porções da barra é aumentada para: (a) 87°C ; (b) 120°C .

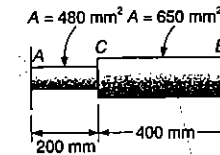


Fig. P2.126

2.127 Resolver o Prob. 2.126, considerando que a temperatura na barra retorne a 20°C , depois de ser aumentada para: (a) 87°C ; (b) 120°C .

2.128 Fios de aço de 3,25 mm de diâmetro são usados em A e B , enquanto um fio de alumínio de 2 mm de diâmetro é usado em C . Sabendo-se que cada fio está inicialmente esticado, determinar a tensão adicional em cada fio quando uma força P de 900 N é aplicada no ponto médio da borda inferior da placa. Assumir que os módulos de elasticidade para o aço e para o alumínio valem 200 GPa e 70 GPa, respectivamente.

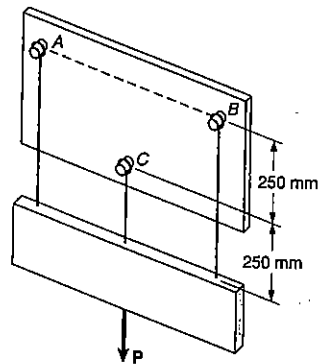


Fig. P2.128

2.129 Pede-se: (a) Determinar o raio r do adocamento para o qual a mesma tensão máxima ocorre tanto no furo A como nos adocamentos; (b) se a tensão admissível é de 140 MPa, qual a correspondente carga P admissível.

2.130 Pede-se: (a) Para $P = 45$ kN, determinar a máxima tensão na placa mostrada; (b) resolver o item a, considerando que o furo em A não existe.

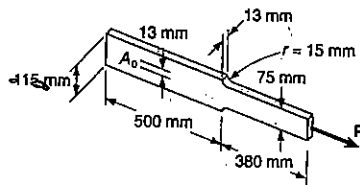


Fig. P2.129 e Fig. P2.130

2.131 A barra BC tem seção transversal de área A , e é feita de aço doce que pode ser considerado como elastoplástico, com módulo de elasticidade E e tensão de escoamento σ_e . Usando o sistema massa-mola indicado, deseja-se simular o deslocamento do ponto C da barra quando a força axial P é aplicada e depois removida; quer dizer, os deslocamentos dos pontos C e C' devem ser os mesmos para qualquer valor de P . Expressando por μ o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície horizontal, deduzir uma expressão para: (a) a massa necessária do bloco; (b) a constante k de mola necessária.

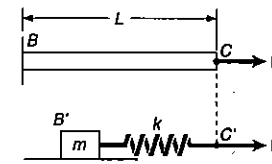


Fig. P2.131

Os problemas que se seguem são para ser resolvidos com auxílio de um computador.

2.C1 Uma barra constituída de n elementos, cada qual homogêneo e de seção transversal uniforme, está sujeita ao carregamento mostrado. O comprimento do elemento i é expresso por L_i , sua área da seção transversal por A_i , seu módulo de elasticidade por E_i e a carga aplicada em sua extremidade direita por P_i ; a intensidade P_i desta carga é considerada positiva, se P_i está dirigida para a direita e negativa, no caso contrário. Pede-se: (a) Escreva um programa de computador que possa ser usado para determinar a tensão normal média e a deformação em cada elemento e a deformação total da barra; (b) aplique este programa para resolver os Probs. 2.9, 2.10, 2.14 e 2.15.

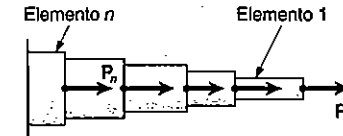


Fig. P2.C1

2.C2 A barra AB é horizontal com ambas as extremidades fixas; é constituída de n elementos, cada qual homogêneo e de seção transversal uniforme, e está sujeita ao carregamento mostrado. O comprimento do elemento i é expresso por L_i , sua área da seção transversal por A_i , seu módulo de elasticidade por E_i e a carga aplicada em sua extremidade direita por P_i ; a intensidade P_i desta carga é considerada positiva se P_i está dirigida para a direita e negativa, caso contrário. (Notar que $P_1 = 0$.) Pede-se: (a) Escreva um programa de computador que possa ser usado para determinar as reações de apoio em A e B , a tensão normal média e a deformação em cada elemento; (b) aplique este programa para resolver os Probs. 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40.

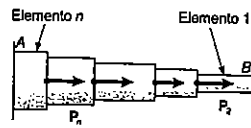


Fig. P2.C2

2.C3 A barra AB é constituída de n elementos, cada qual homogêneo e de seção transversal uniforme. A extremidade A é fixa, e inicialmente existe uma fenda δ_0 entre a extremidade B e o anteparo vertical, à direita. O comprimento do elemento i é expresso por L_i , sua área da seção transversal por A_i , seu módulo de elasticidade por E_i e seu coeficiente de dilatação térmica por α_i . Após a temperatura da barra ter sido aumentada de ΔT , a fenda em B é fechada e o anteparo vertical passa a exercer uma força, igual e oposta, sobre a barra. Pede-se: (a) Escreva um programa de computador que possa ser usado para determinar a intensidade das reações de apoio em A e B , a tensão normal e a deformação em cada elemento; (b) aplique este programa para resolver os Probs. 2.58, 2.60, 2.62 e 2.63.

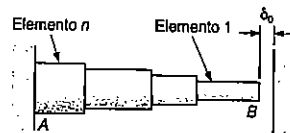


Fig. P2.C3

2.C4 Uma barra AB tem um comprimento L e é feita de dois materiais diferentes, de seção transversal, módulo de elasticidade e limite de escoamento, como indicado. A barra está sujeita a uma carga P que cresce gradualmente, desde zero até que a deformação da barra venha a atingir o valor máximo δ_m , quando, então, retorna a zero. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador o qual, para cada 25 valores de δ_m , igualmente espaçados num intervalo desde zero até um valor igual a 120% da deformação que causa o escoamento em ambos os materiais, possa ser usado para determinar o máximo valor da carga P_m , a máxima tensão normal em cada material, a deformação permanente δ_p da barra e, a tensão residual em cada material; (b) Aplique este programa para resolver os Probs. 2.104 e 2.108, 2.106 e 2.110, e 2.107 e 2.111.

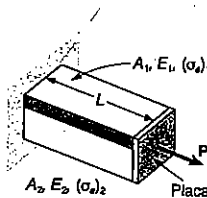


Fig. P2.C4

Capítulo 3

TORÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

Nos dois capítulos precedentes, foram discutidos os membros de estruturas submetidos a forças axiais, aplicadas na direção do eixo das barras analisadas. Este capítulo vai estudar peças submetidas a efeito de **torção**. Especificamente, estudaremos as tensões e deformações produzidas em peças de seção transversal circular, sujeitas à ação de conjugados que tendem a torcer essas peças. Tais conjugados são chamados **momentos de torção, momentos torcionais** ou **torque, T e T'** (Fig. 3.1). Esses conjugados têm a mesma intensidade T e sentidos opostos. São então grandezas vetoriais e podem ser representadas de duas maneiras: setas curvas, como na Fig. 3.1a ou vetores conjugados, como na Fig. 3.1b.

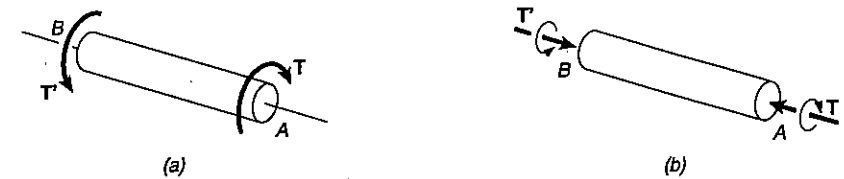


Fig. 3.1

Peças submetidas a torção são encontradas em muitas aplicações da prática de engenharia. O caso mais comum de aplicação é o de eixos de transmissão, utilizados para transmitir potência de um ponto a outro, como no caso de uma turbina

a vapor ligada a um gerador de eletricidade, ou de motores acoplados a máquinas e ferramentas, bem como no caso da transmissão de potência do motor de um carro ao eixo traseiro.

Os eixos de transmissão podem ser maciços ou ocos. Tomando como exemplo o esquema da Fig. 3.2a, vemos a turbina A conectada ao gerador B por meio do eixo de transmissão AB. Dividindo o conjunto nas três partes componentes (Fig. 3.2b), vemos que a turbina exerce sobre o eixo o momento torcional ou torque T, e o eixo exerce sobre o gerador um torque de mesma intensidade. O gerador reage, exercendo sobre o eixo o momento torcional contrário T', da mesma maneira que a reação do eixo à ação do eixo à ação da turbina é também o momento torcional T'.

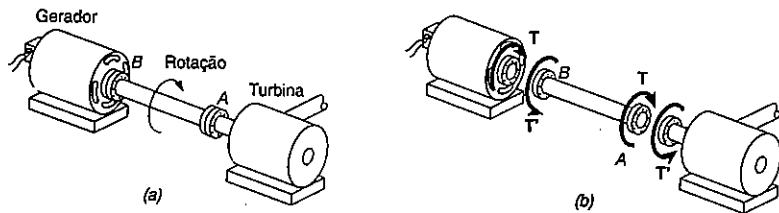


Fig. 3.2

Inicialmente analisaremos as tensões e deformações que aparecem em eixos circulares. Na Sec. 3.3, demonstramos uma importante propriedade dos eixos circulares: quando um eixo circular é submetido a torção, *todas as seções transversais permanecem planas e sem distorção*. Em outras palavras, enquanto várias seções ao longo do eixo giram de diferentes ângulos, cada seção gira como um disco fino sólido e rígido. Esta propriedade nos permite determinar a *distribuição de deformações específicas de cisalhamento* em um eixo circular e concluir que estas deformações *variam linearmente* com a distância ao centro do eixo.

Considerando as deformações no *regime elástico* e usando a Lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, determinaremos a *distribuição de tensões de cisalhamento* em um eixo circular e desenvolveremos as *fórmulas de torção elástica* (Sec. 3.4).

Na Sec. 3.5, determinaremos o *ângulo de torção* de um eixo circular submetido a um dado torque, assumindo novamente deformações elásticas. A Sec. 3.6 será voltada para a solução de problemas envolvendo *eixos estaticamente indeterminados*.

Na Sec. 3.7, discutiremos o *projeto de eixos de transmissão* e aprenderemos a determinar as características físicas necessárias de um eixo, em termos de sua velocidade de rotação e da potência a ser transmitida.

As fórmulas de torção não podem ser usadas para determinar tensões próximas às seções onde o momento de torção está aplicado, nem mesmo próximo de uma seção do eixo onde ocorre uma variação abrupta de diâmetros. Ainda mais, essas fórmulas aplicam-se apenas dentro do regime elástico do material.

Na Sec. 3.8, iremos considerar a *concentração de tensões* em eixos circulares; e nas Secs. 3.9 à 3.11, serão discutidas as tensões e deformações em eixos circulares, feitos de um material dútil, quando o ponto de escoamento do material é excedido. Como veremos, *deformações plásticas permanentes e tensões residuais* resultam destas semelhantes condições de carregamento.

Finalmente, discutiremos a torção de *barras de seção não-circulares* (Sec. 3.12) e analisaremos a distribuição de tensões em *eixos de seção não-circular vazada de parede fina* (Sec. 3.13).

3.2 ANÁLISE PRELIMINAR DAS TENSÕES EM UM EIXO

Consideremos o eixo AB sujeito à ação dos momentos de torção T e T', iguais e de sentidos opostos, nos pontos A e B. Cortamos o eixo por uma seção perpendicular ao eixo longitudinal em um ponto qualquer C (Fig. 3.3). O diagrama de corpo livre da parte BC deve incluir as forças elementares de cisalhamento dF, perpendiculares ao raio do eixo, que a parte AC exerce sobre a parte BC quando o eixo é torcido (Fig. 3.4a). Para ocorrer o equilíbrio da parte BC, o conjunto de forças elementares deve produzir um momento de torção interno T, igual e contrário a T' (Fig. 3.4b). Vamos denominar de ρ a distância de cada força elementar dF ao centro da seção circular. Para expressar que a soma dos momentos das forças dF em relação ao centro tem a mesma intensidade do torque T, escrevemos

$$\int \rho dF = T$$

ou, lembrando que $dF = \tau dA$, onde τ é a tensão de cisalhamento da área dA ,

$$\int \rho (\tau \cdot dA) = T \quad (3.1)$$

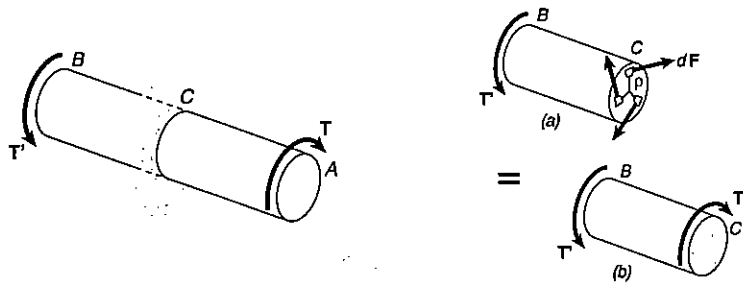


Fig. 3.3

Fig. 3.4

Essa relação expressa uma condição importante que deve ser satisfeita pelas tensões de cisalhamento em qualquer seção transversal ao eixo. Ela não indica, no entanto, de que modo as tensões se distribuem na seção transversal. Observamos aqui, como já fizemos na Sec. 1.3, que a distribuição real de tensões devida a certo carregamento é estaticamente indeterminada, **não podendo ser determinada pelos métodos da estática** somente. De qualquer modo, na Sec. 1.3 assumimos que a distribuição de tensões na seção transversal era uniformemente distribuída, o que ficou confirmado na Sec. 2.16, exceto para pontos próximos àqueles de aplicação de forças. Lembramos que essas conclusões valem para o caso de carregamento axial. Adotar para as tensões de cisalhamento em eixos elásticos as mesmas conclusões estaria errado. Devemos evitar qualquer hipótese sobre a distribuição das tensões de cisalhamento, até que tenhamos estudado as **deformações** produzidas nos eixos por efeito da torção. Essa análise será feita na Seção seguinte.

Neste ponto, uma observação se faz importante. Como já foi visto na Sec. 1.8, tensões de cisalhamento não ocorrem em um só plano. Tomemos um pequeno elemento da barra circular, como mostra a Fig. 3.5. Sabemos que o momento de torção produz tensões de cisalhamento τ nas faces perpendiculares ao eixo da barra circular. No entanto, as condições de equilíbrio vistas na Sec. 1.7, para serem satisfeitas, exigem a existência de tensões τ nas duas faces formadas pelos planos que passam pelo eixo da barra circular. A existência dessas tensões pode ser demonstrada ao analisarmos um "eixo" constituído de lâminas finas, ligadas às extremidades do eixo por pinos presos a discos (Fig. 3.6a). Podemos fazer várias marcas em duas lâminas contíguas, e aplicar momentos de torção de mesma intensidade e sentidos contrários nas extremidades da peça. Quando isso é feito, observa-se nitidamente que uma lâmina escorrega em relação a outra (Fig. 3.6b). Nos materiais coesivos e homogêneos esse deslizamento não ocorre realmente, mas a tendência ao deslizamento vai existir, provando a existência de tensões de cisalhamento em planos perpendiculares ao eixo da barra circular e em planos longitudinais, simultaneamente¹.

¹ Podemos demonstrar a existência das tensões de cisalhamento em planos longitudinais em um eixo, aplicando uma torção a um tubo de papelão que tenha sido cortado longitudinalmente.

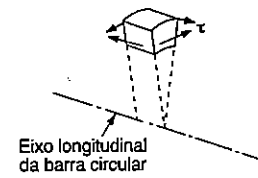


Fig. 3.5

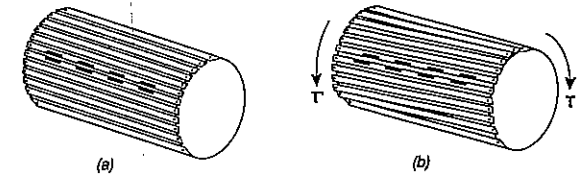


Fig. 3.6

3.3 DEFORMAÇÕES NOS EIXOS CIRCULARES

Um eixo circular está fixado a um suporte indeslocável, por uma de suas pontas (Fig. 3.7a). Aplicando-se à extremidade livre o momento de torção T , o eixo gira, e a seção transversal da extremidade apresenta uma rotação representada pelo ângulo ϕ , chamado **ângulo de torção** (Fig. 3.7b). A experiência mostra que para uma certa faixa de variação do valor T , o ângulo de torção é proporcional a T . Mostra também que ϕ é proporcional ao comprimento L do eixo. Isto quer dizer que para um eixo de mesma seção e mesmo material, mas com o dobro do comprimento, o ângulo de torção será duas vezes maior, para o mesmo momento T . Um dos objetivos de nossa análise será determinar a relação existente entre ϕ , L e T ; outro objetivo será descobrir a real distribuição das tensões na seção transversal do eixo, que não pudemos determinar na Seção anterior, com os recursos da estática.

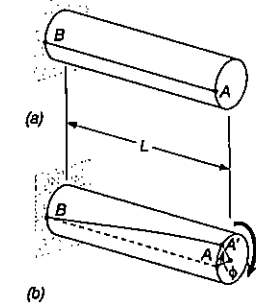


Fig. 3.7

Neste ponto, devemos mostrar uma propriedade importante dos eixos circulares: quando um eixo circular fica submetido à torção, **todas as seções transversais se mantêm planas e conservam sua forma**. Em outras palavras, enquanto as várias seções transversais, ao longo do eixo, apresentam ângulos de torção diferentes, cada seção gira como uma placa rígida. Esse fato é ilustrado pela Fig. 3.8a, que mostra a deformação de um modelo de borracha submetido à torção. Essa propriedade é característica de eixos circulares, maciços ou vazados; ela não se apresenta em peças que têm seção transversal diferente da circular. Por exemplo, quando uma barra de seção quadrada é submetida a momento de torção, suas várias seções transversais não se mantêm planas, perdendo a forma inicial (Fig. 3.8b).

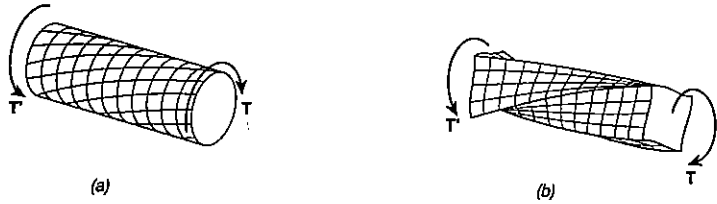


Fig. 3.8

O fato de as seções transversais de um eixo circular permanecerem planas e indeformadas ocorre porque o eixo circular é **axissimétrico**, isto é, sua aparência se mantém a mesma quando o eixo é observado de algum ponto fixo e é rodado de certo ângulo arbitrário. (Por outro lado, barras quadradas só apresentam a mesma aparência quando giradas de 90° ou 180° .) Vamos ver agora como a axissimetria de um eixo circular pode ser usada para demonstrar que as seções se mantêm planas e indeformadas.

Consideremos os pontos C e D situados na circunferência do contorno de uma seção transversal do eixo, e sejam C' e D' as posições que esses pontos irão ocupar quando o eixo for girado (Fig. 3.9a). A axissimetria do eixo e do carregamento requer que uma certa rotação que leve D a ficar na posição de C leve D' a ocupar a posição de C' . Assim D' e C' devem estar situados em uma circunferência, e o arco $C'D'$ deve ser igual ao arco CD (Fig. 3.9b).

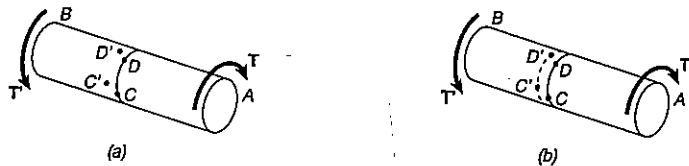


Fig. 3.9

A mesma situação ocorre para qualquer outra seção, uma vez que todas as seções da peça estão sujeitas ao mesmo momento interno T . Um observador que estiver olhando para o eixo circular do ponto A concluirá que a torção faz as seções transversais se afastarem dele. Um observador colocado em B , para o qual o momento torçor é o mesmo daquele observado em A (um momento de sentido igual ao dos ponteiros do relógio em A , e um momento contrário ao sentido dos ponteiros do relógio em B), chegará a uma conclusão oposta, afirmando que qualquer seção transversal se move em sua direção. Esses resultados contraditórios provam que nossa suposição está errada e que C' e D' estão na mesma circunferência dos pontos C e D . Desse modo, quando o eixo é torcido, uma circunferência simplesmente roda em seu próprio plano. Como esse comportamento se dá em qualquer circunferência concêntrica com a primeira, deduzimos que toda a seção transversal se mantém plana (Fig. 3.10).

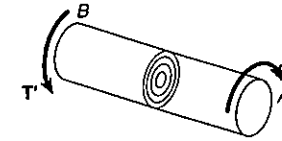


Fig. 3.10

A argumentação acima não inclui a possibilidade das várias circunferências concêntricas rodarem de ângulos diferentes quando o eixo é torcido. Se isso acontecesse, um certo diâmetro da seção transversal se transformaria em uma curva, como a mostrada na Fig. 3.11a. Um observador olhando esse curva do ponto A chegaria à conclusão de que as seções externas do eixo giraram mais que aquelas do seu interior, enquanto um observador que olhasse a curva do ponto B concluiria exatamente o contrário. Essa contradição nos leva a concluir que um certo diâmetro de qualquer seção transversal se mantém reto (Fig. 3.11c) e, portanto, a seção transversal se mantém plana e indeformada.

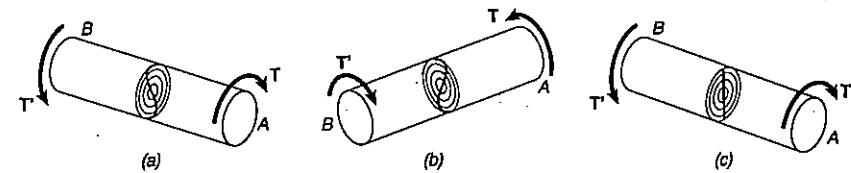


Fig. 3.11

Na análise feita até este ponto não se levou em conta a maneira como são aplicados os momentos de torção T e T' . Como todas as seções transversais do eixo devem permanecer planas e indeformadas, precisamos assegurar que os momentos

sejam aplicados de tal forma que as extremidades do eixo também permaneçam planas e indeformadas. Isso pode ser conseguido se aplicarmos os momentos de torção T e T' a placas rígidas, firmemente presas às extremidades do eixo (Fig. 3.12a). Podemos então estar certos de que todas as seções se manterão planas e indeformadas quando o carregamento for aplicado, e que as deformações resultantes acontecerão de maneira uniforme ao longo de todo o comprimento do eixo. As circunferências igualmente espaçadas, mostradas na Fig. 3.21a, vão girar de um mesmo ângulo em relação às seções vizinhas, e cada uma das linhas retas mostradas se transformará em uma curva (hélice), que intercepta as circunferências sempre sob o mesmo ângulo (Fig. 3.21b).



Fig. 3.12

Todas as deduções feitas nesta seção e seguintes vão se basear na suposição de extremidades rígidas do eixo. As condições de carregamento encontradas na prática podem ser bem diferentes daquelas mostradas no modelo da Fig. 3.12. O principal mérito desse modelo é ajudar-nos a definir um problema de torção para o qual podemos encontrar uma solução exata, do mesmo modo que na Sec. 2.16 a adoção de placas rígidas nas extremidades de uma barra submetida à força axial nos permitiu definir um problema de carregamento que pode ser resolvido facilmente de modo preciso. Em razão do princípio de Saint-Venant, os resultados obtidos para o modelo idealizado poderão ser estendidos a muitas aplicações da prática. Devemos, no entanto, manter esses resultados associados ao modelo ideal.

Tomando agora um eixo circular de comprimento L e raio c , que foi torcido em um ângulo de torção ϕ , passamos à determinação da distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal (Fig. 3.13a). Retiramos do interior do eixo um cilindro de raio ρ , marcando na superfície deste um elemento de área formado por dois círculos adjacentes e duas geratrizes muito próximas. Antes da atuação de qualquer esforço de torção, o elemento se apresenta como indica a Fig. 3.13b. Após a aplicação de um momento de torção o elemento se transforma em um losango (Fig. 3.13c). Sabemos da Sec. 2.14 que a deformação de cisalhamento γ em um certo elemento é medida pela variação do ângulo formado pelos lados do elemento. No problema que analisamos aqui, dois lados do elemento são formados por círculos, que permanecem inalterados. Assim, a deformação de cisalhamento γ deve ser igual ao ângulo formado pelas linhas AB e $A'B$. (γ deve ser expresso em radianos.)

A Fig. 3.13c nos mostra que quando γ é pequeno, podemos expressar o comprimento do arco AA' por $AA' = L \cdot \gamma$. Ao mesmo tempo, na seção transversal extrema temos $AA' = \rho \cdot \phi$. Desse modo, $L \cdot \gamma = \rho \cdot \phi$, ou

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \quad (3.2)$$

onde γ e ϕ são expressos em radianos. A equação acima mostra, como era de se esperar, que a deformação de cisalhamento γ em um certo ponto do eixo sujeito à torção é proporcional ao ângulo de giro ϕ . Ela mostra também que γ é proporcional à distância ρ do centro do eixo circular ao ponto considerado. Dessas observações concluímos que a deformação de cisalhamento em uma barra circular varia linearmente com a distância ao eixo da barra.

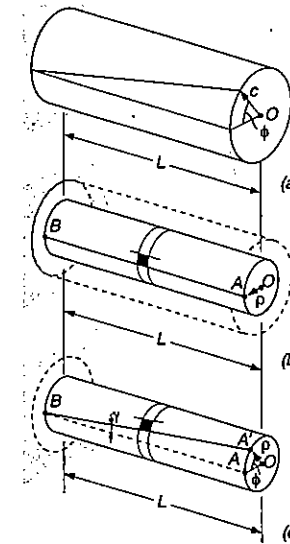


Fig. 3.13

Segue-se então, da Equação 3.2, que a deformação de cisalhamento é máxima na superfície da barra circular, onde $\rho = c$. Temos

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c \phi}{L} \quad (3.3)$$

Eliminando ϕ nas Equações 3.2 e 3.3 podemos expressar a deformação de cisalhamento γ a uma distância ρ do eixo da barra por

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{m\acute{a}x} \quad (3.4)$$

3.4 TENSÕES NO REGIME ELÁSTICO

Nesta discussão sobre torção de eixos circulares, não adotamos até agora nenhuma relação particular entre tensões e deformações. Vamos considerar agora o caso em que o momento de torção T tem um valor tal que as tensões no material se mantêm abaixo da tensão de cisalhamento de escoamento τ_e . Sabemos através do Capítulo 2 que, nesse caso, as tensões no material permanecem abaixo do limite de proporcionalidade e do limite de elasticidade. Podemos aplicar a Lei de Hooke e sabemos que não haverá deformação permanente.

Aplicando a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento, temos:

$$\tau = G\gamma \quad (3.5)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material. Tomando a Equação 3.4 e multiplicando por G escrevemos

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{m\acute{a}x}$$

ou usando a Equação 3.5,

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{m\acute{a}x} \quad (3.6)$$

A equação obtida mostra que enquanto a tensão de escoamento (ou limite de proporcionalidade) não for atingida, a tensão de cisalhamento na barra circular varia linearmente com a distância ρ do eixo da barra. A Fig. 3.14a mostra a distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal de um eixo circular maciço. Na Fig. 3.14b é mostrada a distribuição das tensões de cisalhamento em um eixo circular vazado, de raio interno c_1 , e raio externo c_2 . Da Equação 3.6 vemos que, no segundo caso,

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{m\acute{a}x} \quad (3.7)$$

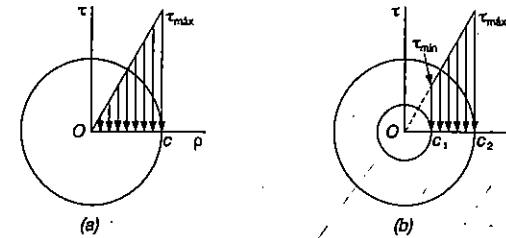


Fig. 3.14

Recordamos agora que a Sec. 3.2 mostrou que a soma dos momentos das forças elementares que atuam na seção do eixo circular deve ser igual à intensidade do momento T aplicado ao eixo:

$$\int \rho (\tau dA) = T \quad (3.1)$$

Substituindo o valor de τ dado em (3.6) escrevemos,

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{c} \int \rho^2 dA$$

A integral no segundo membro da expressão representa o momento de inércia polar J da seção transversal em relação ao seu centro O . Temos então

$$T = \frac{\tau_{m\acute{a}x} J}{c}$$

ou, calculando para $\tau_{m\acute{a}x}$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} \quad (3.8)$$

Substituindo esse valor em (3.6), temos a expressão da tensão de cisalhamento a uma distância ρ do eixo da barra circular, que é

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (3.9)$$

As Equações 3.8 e 3.9 são conhecidas como as fórmulas da torção em regime elástico. Recordamos da estática a fórmula do momento de inércia polar de um círculo de raio c , que é $J = 1/2 \pi c^4$. No caso de um eixo circular de seção vazada, com raio interno c_1 e raio externo c_2 , o momento polar de inércia será dado por

$$J = \frac{1}{2} \pi c_2^4 - \frac{1}{2} \pi c_1^4 = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) \quad (3.10)$$

Nas Equações 3.8 ou 3.9, T será expresso em $N \cdot m$, c ou ρ em metros, e J em m^4 ; verificamos que a tensão de cisalhamento será expressa em N/m^2 , isto é, em pascal (Pa).

EXEMPLO 3.1

Um eixo circular vazado de aço tem comprimento $L = 1,5$ m e diâmetros interno e externo respectivamente de 40 a 60 mm (Fig. 3.15). (a) Qual é o maior momento de torção que pode ser aplicado ao eixo, para que as tensões de cisalhamento não excedam 120 MPa? (b) Qual é o valor mínimo da tensão de cisalhamento para esse caso?

a) **Maior momento de torção.** O maior momento T que pode ser aplicado ao eixo é aquele que leva à tensão máxima $\tau_{m\acute{a}x} = 120$ MPa. Como esse valor está abaixo da tensão de escoamento para o aço, podemos usar a Equação 3.8. Resolvendo a equação em T , temos

$$T = \frac{J \tau_{m\acute{a}x}}{c} \quad (3.11)$$

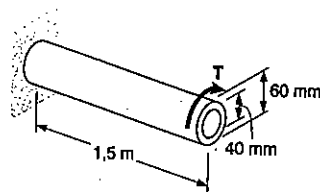


Fig. ex.3.15

Calculamos o momento de inércia polar pela Equação 3.10, com $c_1 = 1/2 (40 \text{ mm}) = 0,02$ m e $c_2 = 1/2 (60 \text{ mm}) = 0,03$ m, escrevendo

$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2} \pi (0,03^4 - 0,02^4) = 1,021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Levando os valores de J e $\tau_{m\acute{a}x}$ em 3.11, e fazendo $c = c_2 = 0,03$ m, temos

$$T = \frac{J \tau_{m\acute{a}x}}{c} = \frac{(1,021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0,03 \text{ m}} = 4,08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

b) **Tensão de cisalhamento mínima.** O menor valor da tensão de cisalhamento ocorre na face interna do eixo circular. Ela pode ser obtida da Equação 3.7, que relaciona $\tau_{m\acute{a}n}$ e $\tau_{m\acute{a}x}$ que são respectivamente proporcionais a c_1 e c_2 :

$$\tau_{m\acute{a}n} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{m\acute{a}x} = \frac{0,02 \text{ m}}{0,03 \text{ m}} (120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$

As Fórmulas 3.8 e 3.9 foram deduzidas tomando-se um eixo circular de seção transversal uniforme com momentos aplicados às extremidades do eixo. Essas fórmulas também podem ser utilizadas para o caso de seções transversais variáveis, ou no caso em que os momentos de torção são aplicados em qualquer ponto do eixo (Fig. 3.16a). A distribuição das tensões em uma certa seção S do eixo circular é obtida pela Equação 3.8, onde J representa o momento de inércia polar dessa seção, enquanto T representa o esforço interno de torção na seção. O valor de T é obtido estudando-se o diagrama de corpo livre da parte do eixo localizada para um dos lados da seção (Fig. 3.16b), quando se somam os momentos de torção aplicados a essa parte, com o momento interno T , igualando a zero a expressão obtida (v. Problema Resolvido 3.1).

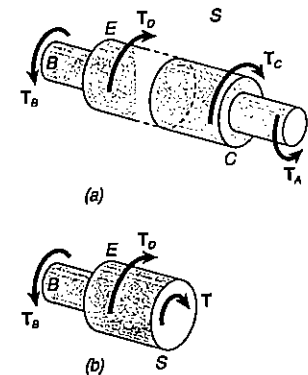


Fig. 3.16

Até aqui, conduzimos nossa análise dos eixos circulares limitando-nos a calcular as tensões de cisalhamento, pois o elemento escolhido para estudo estava com as faces paralelas ou perpendiculares ao eixo da barra circular (Fig. 3.5). Já vimos

nas Secs. 1.6 e 1.7 que, sob as mesmas condições de carregamento, podem ser obtidas tensões normais, tensões de cisalhamento ou uma combinação das duas, dependendo da orientação que se dá ao elemento em estudo.

Consideremos uma barra circular submetida a torção, onde destacamos os elementos *a* e *b* (Fig. 3.17). Como o elemento *a* tem suas faces respectivamente paralelas e perpendiculares ao eixo da barra, as únicas tensões no elemento serão de cisalhamento, definidas pela Fórmula 3.8, sendo $\tau_{m\acute{a}x} = Tc/J$. Por outro lado, as faces do elemento *b*, que formam um ângulo arbitrário com o eixo da barra, estarão sujeitas a uma combinação de tensões normais e tensões de cisalhamento.

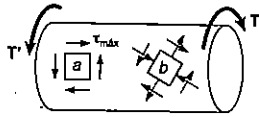


Fig. 3.17

Vamos considerar o caso particular de um elemento *c* (não indicado) que forme um ângulo de 45° com o eixo da barra. Para determinarmos as tensões nas faces desse elemento, vamos considerar os dois triângulos elementares mostrados na Fig. 3.18 e desenhar os diagramas de corpo livre. Para o elemento da Fig. 3.18a, sabemos que as tensões nas faces *BC* e *BD* são de cisalhamento, com valor $\tau_{m\acute{a}x} = Tc/J$. O esforço cortante interno provocado por essa tensão tem intensidade $\tau_{m\acute{a}x}A_0$, onde A_0 representa a área da face do elemento. A figura mostra que as componentes dos esforços cortantes ao longo de *DC* são iguais e opostas, donde podemos concluir que a força *F* que se exerce em *DC* deve ser perpendicular a essa face. Ela é uma força de tração, e sua intensidade deve ser

$$F = 2(\tau_{m\acute{a}x}A_0) \cos 45^\circ = \tau_{m\acute{a}x}A_0\sqrt{2} \quad (3.12)$$

A tensão correspondente é obtida dividindo-se a força *F* pela área *A* da face *UD*. Sendo $A = A_0\sqrt{2}$, temos

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}A_0\sqrt{2}}{A_0\sqrt{2}} = \tau_{m\acute{a}x} \quad (3.13)$$

A mesma análise, levada a efeito para o elemento da Fig. 3.18b, nos leva à tensão na face *BE*, $\sigma = -\tau_{m\acute{a}x}$. Retomando a Equação 3.8, vemos que as tensões atuantes em uma face do elemento *c* a 45° com o eixo da barra circular são tensões normais de valor

$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J} \quad (3.14)$$

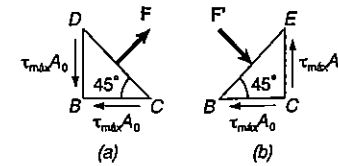


Fig. 3.18

Assim, enquanto o elemento *a* na Fig. 3.19 está sob cisalhamento puro, o elemento *c* da mesma figura está sujeito a tensões de tração em duas de suas faces e a tensão de compressão nas outras duas. Além disso, todas as tensões atuantes têm a mesma intensidade, Tc/J^2 .

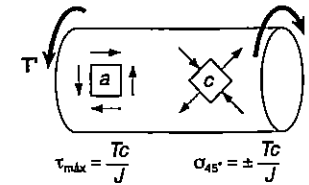


Fig. 3.19

Como foi visto na Sec. 2.3, os materiais dúteis geralmente se rompem por cisalhamento. Desse modo, um corpo de prova feito de material dútil, quando sujeito a torção, se quebra em um plano perpendicular ao eixo longitudinal (Fig. 3.20a).

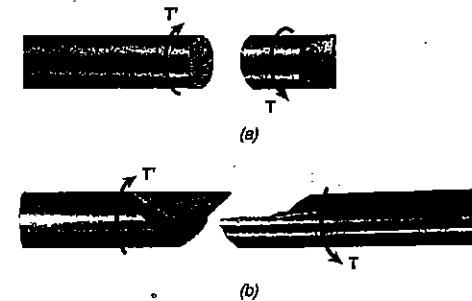


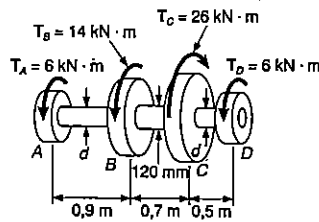
Fig. 3.20

2 As tensões que ocorrem em elementos de orientação qualquer, como o elemento *b* da Fig. 3.17, serão estudadas no Capítulo 6.

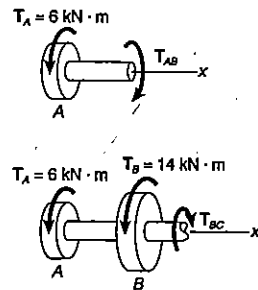
Por outro lado, materiais frágeis são menos resistentes à tração que ao cisalhamento. Desse modo, se um corpo de prova feito de material frágil for submetido à torção, a ruptura tende a ocorrer ao longo de superfícies perpendiculares à direção das tensões de tração; rompem-se então em superfícies que formam 45° com o eixo longitudinal do corpo de prova (Fig. 3.20b).

PROBLEMA RESOLVIDO 3.1

O eixo circular BC é vazado, e tem diâmetros de 90 mm e 120 mm, respectivamente interno e externo. Os eixos AB e CD são maciços, com diâmetro d. Determinar, para o carregamento indicado: (a) o valor máximo e o valor mínimo da tensão de cisalhamento no eixo BC; (b) qual o diâmetro necessário nos eixos AB e CD se a tensão admissível no material é 65 MPa.



Condições da Estática. Passamos uma seção transversal no trecho AB, calculamos o valor no momento TAB por meio do diagrama de corpo livre mostrado,



$$\Sigma M_x = 0; \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Passando uma seção transversal no eixo BC, pelo diagrama de corpo livre, vamos ter:

$$\Sigma M_x = 0; \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

a) Eixo BC. Para este eixo vazado temos

$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0,060)^4 - (0,045)^4] = 13,92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Máxima tensão de cisalhamento. Na superfície externa, temos

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,060 \text{ m})}{13,92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\text{máx}} = 86,2 \text{ MPa}$$

Tensão de cisalhamento mínima. As tensões são proporcionais à distância do eixo geométrico da barra.

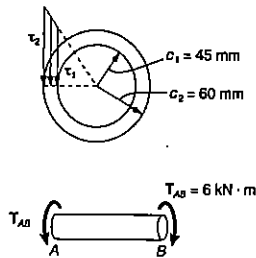
$$\frac{\tau_{\text{mín}}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\text{mín}}}{86,2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\text{mín}} = 64,7 \text{ MPa}$$

b) Eixos AB e CD. Nessas duas partes podemos ver que o torque é $T = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ e $\tau_{\text{adm}} = 65 \text{ MPa}$. Sendo c o raio do eixo circular, escrevemos

$$\tau = \frac{Tc}{J} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN} \cdot \text{m})c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

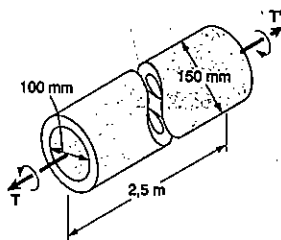
$$c_3 = 58,8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad c = 38,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38,9 \text{ mm}) \quad d = 77,8 \text{ mm}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.2

O projeto preliminar de um eixo de transmissão levou à escolha de uma barra de seção vazada, com diâmetro interno de 100 mm e diâmetro externo de 150 mm. Pedese determinar o máximo torque que poderá ser transmitido, sendo a tensão admissível do material 83 MPa, nas seguintes situações: (a) do projeto preliminar; (b) supondo um eixo sólido maciço de mesmo peso daquele do anteprojetado; (c) supondo um eixo de seção vazada com 200 mm de diâmetro e de mesmo peso do eixo do anteprojetado.



a) **Eixo vazado do anteprojetado.** Para a seção vazada temos

$$J = \pi/2(c_2^4 - c_1^4) = \pi/2[(75 \times 10^{-3})^4 - (50 \times 10^{-3})^4] = 39,8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Usando a Equação 3.8, escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = Tc_2/J \quad 83 \text{ MPa} = \frac{T(75 \times 10^{-3})}{39,8 \times 10^{-6}}$$

$$T = 44 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

b) **Eixo maciço de mesmo peso.** Para ocorrer o mesmo peso nos dois eixos, com o mesmo comprimento, eles devem ter a mesma área de seção transversal $A_{(a)} = A_{(b)}$

$$\pi[(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi c_3^2 \quad c_3 = 56 \text{ mm}$$

Sendo $\tau_{\text{adm}} = 83 \text{ MPa}$, temos

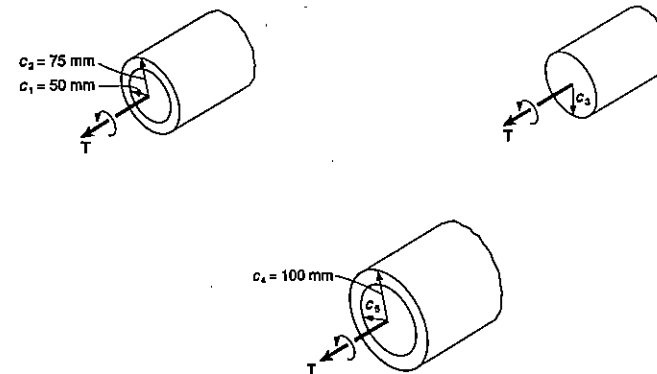
$$\tau_{\text{máx}} = Tc_3/J \quad 83 \text{ MPa} = \frac{T(56 \times 10^{-3})}{\pi/2 (56 \times 10^{-3})^4} \quad T = 22,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

c) **Eixo de seção vazada com 200 mm de diâmetro.** Para o mesmo peso, as áreas devem ser iguais. Determinamos o diâmetro interno do eixo escrevendo $A_{(a)} = A_{(c)}$

$$\pi[(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi[(100 \text{ mm})^2 - c_5^2] \quad c_5 = 82,9 \text{ mm}$$

$$J = \pi/2[(100 \times 10^{-3})^4 - (82,9 \times 10^{-3})^4]$$

$$J = 83 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Para $\tau_{\text{máx}} = 83 \text{ MPa}$ e $c_4 = 100 \text{ mm}$

$$83 \text{ MPa} = \frac{T(100 \times 10^{-3})}{83 \times 10^{-6}}$$

$$T = 68,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PROBLEMAS

3.1 Determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento provocada por um torque T de $4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ em um eixo maciço de alumínio e 75 mm de diâmetro, como indicado; (b) idem ao item a, considerando que o eixo maciço deve ser substituído por um eixo vazado de mesmo diâmetro externo e de $25,4 \text{ mm}$ de diâmetro interno.

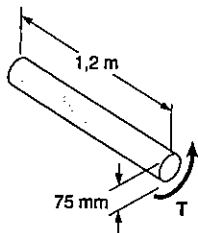


Fig. P3.1

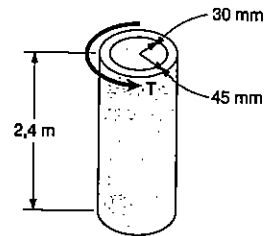


Fig. P3.2

3.2 Determinar: (a) o torque T que causará uma tensão de cisalhamento máxima de 45 MPa no cilindro vazado de aço, como indicado; (b) a máxima tensão de cisalhamento causada pelo mesmo torque T , em um eixo cilíndrico maciço de mesma área e seção transversal.

3.3 Um torque de $1,75 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado ao cilindro maciço mostrado. Determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento; (b) o percentual de torque absorvido pelo núcleo de diâmetro 25 mm .

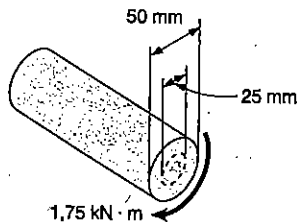


Fig. P3.3

3.4 Determine: (a) o torque que pode ser aplicado a um eixo maciço de 75 mm de diâmetro sem que seja excedida a tensão admissível de cisalhamento de 83 MPa ; (b) idem ao item a, considerando que o eixo maciço deve ser substituído por um eixo vazado de mesma área da seção transversal e com um diâmetro interno igual à metade do diâmetro externo.

3.5 Os torques são exercidos nas polias A, B e C. Sabendo-se que ambos os eixos são maciços, determinar a máxima tensão de cisalhamento: (a) no eixo AB; (b) no eixo BC.

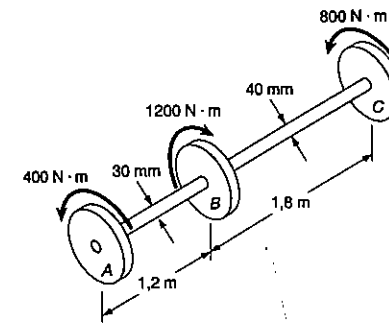


Fig. P3.5

3.6 Sob condições normais de operação, um motor elétrico exerce um torque de $1350 \text{ N} \cdot \text{m}$, em E. Sabendo-se que todo o eixo é maciço, determine a máxima tensão de cisalhamento: (a) no eixo BC; (b) no eixo CD; (c) no eixo DE.

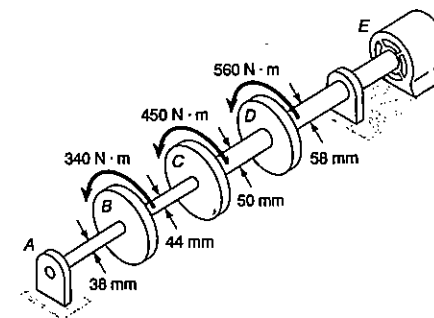


Fig. P3.6

3.7 Resolver o Prob. 3.6, considerando que um furo de diâmetro igual a $25,4 \text{ mm}$ foi broqueado ao longo de todo o eixo.

3.8 Os torques mostrados são aplicados às polias A, B, C e D. Sabendo-se que todo o eixo é maciço, determine: (a) em qual trecho do eixo ocorre a maior tensão de cisalhamento; (b) a intensidade dessa tensão.

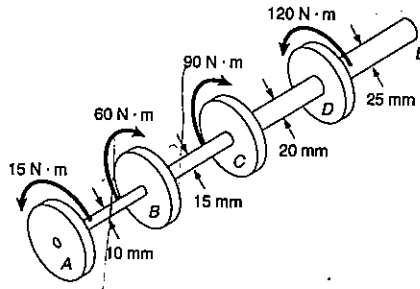


Fig. P3.8

3.9 O eixo AB é feito de um aço com tensão admissível ao cisalhamento de 90 MPa, e o eixo BC é feito de uma liga de alumínio com tensão admissível de cisalhamento de 60 MPa. Sabendo-se que o diâmetro do eixo BC é de 50 mm, e desprezando-se o efeito da concentração de tensões, determine: (a) o maior torque T que pode ser aplicado em A, se a tensão admissível não pode ser excedida ao eixo BC; (b) o correspondente diâmetro necessário para o eixo AB.

3.10 O eixo AB tem diâmetro de 30 mm e é feito de um aço, com tensão admissível ao cisalhamento de 90 MPa, enquanto que o eixo BC tem diâmetro de 50 mm e é feito de uma liga de alumínio, com tensão admissível ao cisalhamento de 60 MPa. Desprezando-se o efeito da concentração de tensões, determine o maior torque T que pode ser aplicado em A.

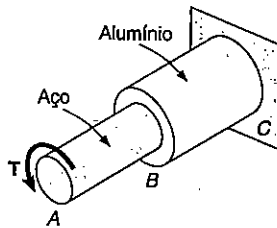


Fig. P3.9 e Fig. P3.10

3.11 O eixo maciço AB tem um diâmetro $d_s = 38$ mm e é feito de aço, com uma tensão admissível ao cisalhamento de 80 MPa, enquanto que o tubo CD é feito de latão, com uma tensão admissível ao cisalhamento de 50 MPa. Determinar o maior torque T que pode ser aplicado em A.

3.12 O eixo maciço AB é feito de um aço, com uma tensão admissível ao cisalhamento de 80 MPa e o tubo CD é feito de latão, com uma tensão admissível ao cisalhamento de 50 MPa. Determinar: (a) o maior torque T que pode ser aplicado em A, se a tensão admissível não pode exceder a do tubo CD; (b) o correspondente valor do diâmetro d_s necessário ao eixo AB.

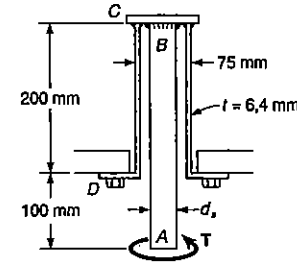


Fig. P3.11 e P3.12

3.13 Dois eixos de aço são acoplados pelas engrenagens mostradas. Determinar a máxima tensão de cisalhamento em cada eixo, quando um torque T de 4 kN·m é aplicado em D.

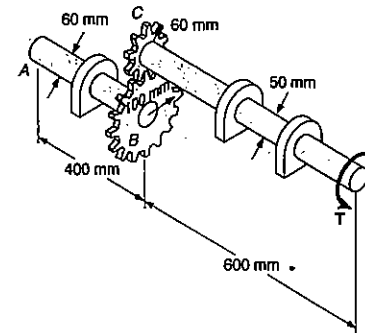


Fig. P3.13

3.14 Dois eixos de aço são acoplados pelas engrenagens mostradas. Determinar a máxima tensão de cisalhamento em cada eixo, quando um torque T de $600 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado em A .

3.15 Dois eixos de aço são acoplados pelas engrenagens mostradas. Determine o maior torque T que pode ser aplicado em A , se a tensão admissível de cisalhamento é de 50 MPa , para ambos os eixos.

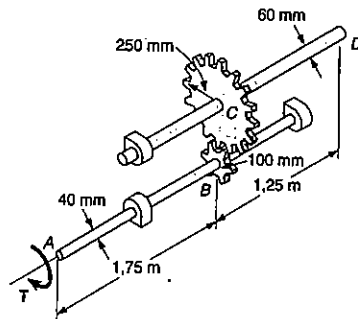


Fig. P3.14 e P3.15

3.16 Para os eixos do Prob. 3.13, determinar o maior torque T que pode ser aplicado em D , se a tensão admissível de cisalhamento é de 50 MPa para ambos os eixos.

3.17 Um torque de intensidade $T = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado ao eixo AB do trem de engrenagens mostrado. Sabendo-se que a tensão admissível de cisalhamento é de 75 MPa , nos três eixos maciços, determinar o diâmetro necessário para o: (a) eixo AB ; (b) eixo CD ; (c) eixo EF .

3.18 Um torque de intensidade $T = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado ao eixo AB do trem de engrenagens mostrado. Sabendo-se que os diâmetros dos três eixos maciços são, respectivamente, $d_{AB} = 21 \text{ mm}$, $d_{CD} = 30 \text{ mm}$ e $d_{EF} = 40 \text{ mm}$, determinar a máxima tensão de cisalhamento no: (a) eixo AB ; (b) eixo CD ; (c) eixo EF .

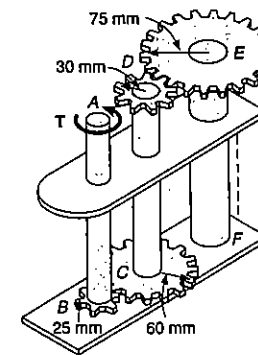


Fig. P3.17 e P3.18

3.19 Um tubo de aço de diâmetro interno de 300 mm é fabricado a partir de uma placa de $6,4 \text{ mm}$ de espessura, soldada ao longo de uma linha helicoidal, que forma um ângulo de 45° com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo-se que a máxima tensão admissível de tração na solda é 80 MPa , determinar o maior torque que pode ser aplicado ao tubo.

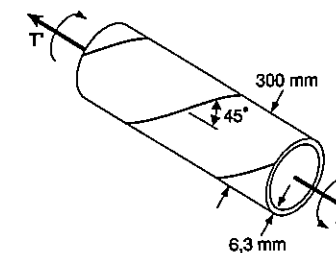


Fig. P3.19

3.20 Uma amostra cilíndrica de 25 mm de diâmetro está submetida a um torque T . Determinar o valor do torque T , para que a amostra falhe e que tipo de falha (tração ou cisalhamento), se esta amostra for de: (a) latão-amarelo laminado a frio ($\sigma_U = 510 \text{ MPa}$; $\tau_U = 300 \text{ MPa}$); (b) ferro fundido cinzento ($\sigma_U = 170 \text{ MPa}$; $\tau_U = 240 \text{ MPa}$).

3.21 Enquanto a distribuição exata de tensões de cisalhamento em um eixo cilíndrico vazado é como mostrado na Fig. (a), um valor aproximado pode ser obtido para $\tau_{\text{máx}}$ considerando-se uma distribuição uniforme de tensões ao longo da espessura, como mostrado em (b), e assumindo ainda que todas as forças elementares de cisalha-

mento atuam a uma distância de O , igual ao raio médio $r_m = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ da seção transversal. O valor aproximado será então igual a $\tau_0 = T/A \cdot r_m$, onde T é o torque aplicado. Pede-se: (a) Expressar a relação $\tau_{m\acute{a}x}/\tau_0$, tomando-se o valor exato da tensão máxima de cisalhamento e o valor aproximado para τ_0 , em termos da relação c_1/c_2 ; (b) Determinar o maior e menor valor de $\tau_{m\acute{a}x}/\tau_0$ e os correspondentes valores de c_1/c_2 .

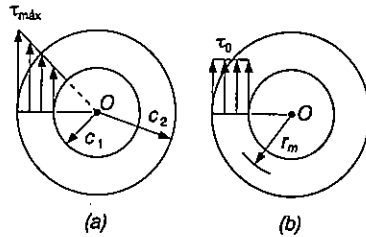


Fig. P3.21

3.22 Pede-se: (a) Para o eixo vazado mostrado e uma dada tensão admissível, determinar a relação T/w , sendo T o máximo torque admissível e w o peso por unidade de comprimento do eixo; (b) chamando de $(T/w)_0$ o valor da relação calculada para um eixo maciço de mesmo raio c_2 , expressar a relação T/w para o eixo vazado, em termos de $(T/w)_0$ e c_1/c_2 .

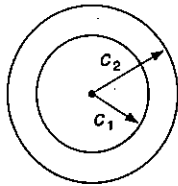


Fig. P3.22

3.5 ÂNGULO DE TORÇÃO NO REGIME ELÁSTICO

Nesta seção desenvolveremos uma relação entre o ângulo de torção ϕ de um eixo circular e o momento torçor T que se aplica ao eixo. Vamos admitir que qualquer porção do eixo vai permanecer elástica. Consideremos inicialmente o caso de um eixo circular de comprimento L que tem seção uniforme de raio c . O eixo está sujeito à ação do momento torçor T em uma das extremidades, sendo a outra extremidade fixa (Fig. 3.21). Sabemos, pela Sec. 3.2, que o ângulo de torção ϕ e a deformação de cisalhamento máxima $\gamma_{m\acute{a}x}$ estão relacionadas pela expressão

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{c\phi}{L} \quad (3.3)$$

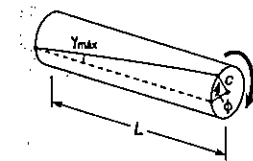


Fig. 3.21

Como em regime elástico a tensão de escoamento não é excedida em nenhum ponto do eixo, podemos aplicar a Lei de Hooke, escrevendo $\gamma_{m\acute{a}x} = \tau_{m\acute{a}x}/G$. Usando a Equação 3.8 vem:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{G} = \frac{Tc}{JG} \quad (3.15)$$

Igualando (3.3) e (3.15), e resolvendo para ϕ , escrevemos

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (3.16)$$

onde ϕ é expresso em radianos. A relação obtida mostra que, dentro do regime elástico, o ângulo de torção ϕ é proporcional ao momento de torção T aplicado ao eixo circular. Essa conclusão está de acordo com os resultados experimentais citados no começo da Sec. 3.3.

A Equação 3.16 nos dá um método conveniente para a determinação do módulo de elasticidade transversal G de um certo material. Um corpo de prova do material, em forma de barra cilíndrica, com comprimento e diâmetro conhecidos, é levado a uma máquina de testes de torção (Fig. 3.22). O valor do momento de torção aplicado pela máquina é aumentado gradativamente, e os correspondentes ângulos de torção são medidos em certo comprimento L do corpo de prova. Enquanto o início de escoamento não ocorre, os valores de ϕ e T serão tais que, se levados a um gráfico $\phi \times T$, resultarão em uma linha reta. A declividade da reta representa a quantidade JG/L , de onde podemos calcular o módulo de elasticidade transversal G .

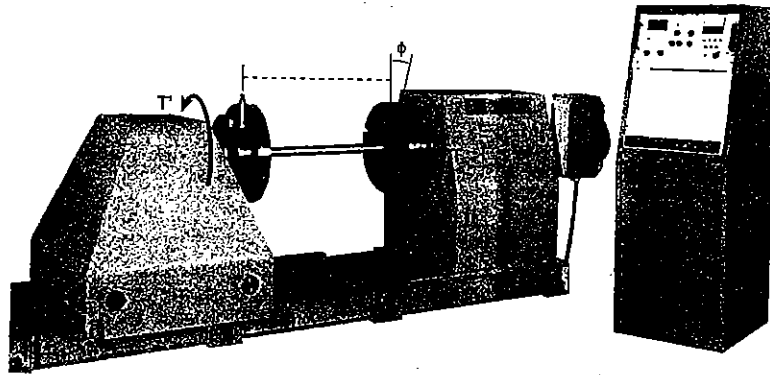
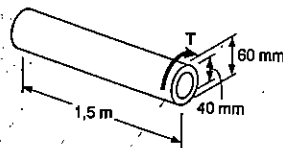


Fig. 3.22 Máquina de testes de torção. (Cortesia Acco Industries, Inc.)

EXEMPLO 3.2

Que valor de momento de torção deve ser aplicado à extremidade do eixo circular do Ex. 3.1, de modo que o ângulo de torção produzido seja de 2° ? Adotar para o módulo de elasticidade G o valor 80 GPa , para o aço.



Calculando T da Equação 3.16, temos

$$T = \frac{JG}{L} \phi$$

Substituindo os valores dados

$$G = 80 \times 10^9 \text{ Pa} \quad L = 1,5 \text{ m}$$

$$\phi = 2^\circ \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 34,9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

e recordando do Ex. 3.1 que, para a seção transversal dada

$$J = 1,021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

temos

$$T = \frac{JG}{L} \phi = \frac{(1,021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(80 \times 10^9 \text{ Pa})}{1,5 \text{ m}} (34,9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1,900 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1,900 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EXEMPLO 3.3

Calcular, para o eixo de seção vazada do Ex. 3.1, o valor do ângulo de torção que provoca uma tensão de cisalhamento de 70 MPa na face interna do eixo.

O método de resolução deste problema que primeiro vem à mente é utilizar a Equação 3.9 para determinar o momento de torção T correspondente ao valor de τ dado, e a Equação 3.16 para determinar o ângulo de torção correspondente ao valor de T encontrado.

Podemos usar, no entanto, uma solução mais direta. Pela Lei de Hooke, calculamos inicialmente a deformação de cisalhamento na face interna do eixo:

$$\gamma_{\text{mfn}} = \frac{\tau_{\text{mfn}}}{G} = \frac{70 \times 10^6 \text{ Pa}}{80 \times 10^9 \text{ Pa}} = 875 \times 10^{-6}$$

Recordando da Equação 3.2, que foi obtida expressando o comprimento de arco AA' (Fig. 3.13c) em função de γ e ϕ , temos

$$\phi = \frac{L\gamma_{\text{mfn}}}{c_1} = \frac{1500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} (875 \times 10^{-6}) = 65,6 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para obter o ângulo de torção em graus, escrevemos

$$\phi = (65,6 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 3,76^\circ$$

A Fórmula 3.16 para o cálculo do ângulo de torção só pode ser usado no caso de material homogêneo (G constante), para eixos de seção transversal constante e momentos aplicados nas extremidades da barra. Se o eixo estiver submetido a momentos de torção aplicados em outros pontos, e se tiver várias seções transversais, compostas de materiais diferentes, devemos dividi-lo em várias partes, onde cada uma delas, individualmente, satisfaça às condições de utilização da Fórmula 3.16. No caso do eixo AB , mostrado como exemplo na Fig. 3.23, devemos considerar quatro partes diferentes; AC , CD , DE e EB . O ângulo de torção total do eixo, isto é, o ângulo segundo o qual a seção A gira em relação à seção B , será obtido se somarmos algebricamente os ângulos de torção de cada parte componente. Chamando respectivamente de T_i , L_i , J_i e G_i o momento de torção interno, o comprimento, o momento de inércia polar da seção e o módulo de elasticidade transversal correspondente à parte i , o ângulo de torção total será expresso por

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad (3.17)$$

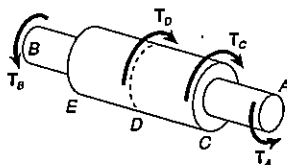


Fig. 3.23

O esforço interno de torção T_i em qualquer parte do eixo é obtido passando uma seção por essa parte e desenhando o diagrama de corpo livre da porção do eixo localizada em um dos lados da seção. Este procedimento, que já foi explicado na Sec. 3.4 e ilustrado na Fig. 3.16, será aplicado no Problema Resolvido 3.3.

No caso de um eixo circular com seção transversal variável, como indica a Fig. 3.24, a Fórmula 3.16 deve ser aplicada a um disco de espessura dx . O ângulo, segundo o qual uma face do disco gira em relação à outra, é dado por:

$$d\phi = \frac{T dx}{JG}$$

onde J é uma função de x a ser determinada. Integrando em relação a x , desde 0 até L , obtemos o ângulo de torção total do eixo:

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG} \quad (3.18)$$

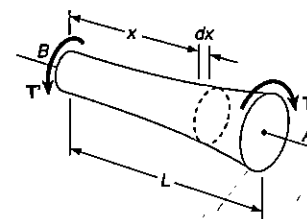


Fig. 3.24

Os eixos mostrados nas Figs. 3.15 e 3.21, para os Exs. 3.2 e 3.3 e para a dedução da Fórmula 3.16, tinham ambos uma extremidade engastada a um suporte fixo. Nos dois casos, o ângulo de torção ϕ do eixo circular é igual ao ângulo de rotação da extremidade livre. No entanto, quando as duas extremidades do eixo giram, o ângulo de torção do eixo é igual ao ângulo segundo o qual uma extremidade girou em relação à outra. Consideremos, por exemplo, o conjunto mostrado na Fig. 3.25a, que consiste em dois eixos elásticos AD e BE , ambos de comprimento L e raio c , com módulo de elasticidade transversal G , ligados em C pelas rodas dentadas indicadas. Quando um torque T é aplicado em E (Fig. 3.25b), os dois eixos ficarão submetidos à torção. Como a barra circular AD tem extremidade D fixa, o ângulo de torção de AD é medido pelo ângulo de rotação ϕ_A da extremidade A . Para o eixo BE , que tem as extremidades livres, o ângulo de torção é igual à diferença entre os ângulos de rotação ϕ_B e ϕ_E , quer dizer, o ângulo segundo o qual a extremidade E gira em relação à extremidade B . Chamando esse ângulo relativo de $\phi_{E/B}$, escrevemos

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

EXEMPLO 3.4

No conjunto da Fig. 3.25, sabe-se que $r_A = 2r_B$. Determinar o ângulo de rotação da extremidade E do eixo BE , quando o momento torçor T é aplicado em E .

Vamos inicialmente determinar o momento de torção T_{AD} , que atua no eixo AD . No ponto de contato das duas rodas dentadas (Fig. 3.26) ocorrem as duas forças iguais e de sentido contrário, F e F' . Lembrando que $r_A = 2r_B$, concluímos que o momento torçor do eixo AD é o dobro do momento torçor no eixo BE ; dessa forma, $T_{AD} = 2T$.

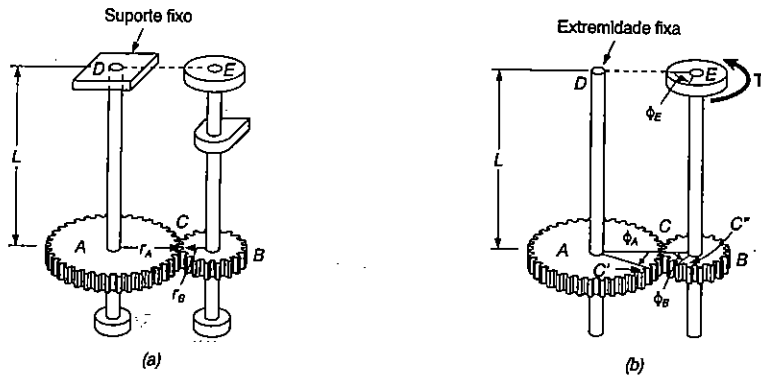


Fig. ex.3.25

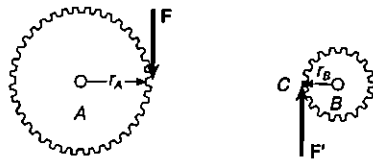


Fig. ex.3.26

A extremidade D do eixo AD é fixa e o ângulo de rotação da seção A , ϕ_A pode ser igualado ao ângulo de torção do eixo, que se obtém por

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{2TL}{JG}$$

Na Fig. 3.25b, observamos que os arcos CC' e CC'' devem ser iguais. Temos então que $r_A\phi_A = r_B\phi_B$ e obtemos o valor $\phi_B = (r_A/r_B)\phi_A = 2\phi_A$. Desse modo,

$$\phi_B = 2\phi_A = \frac{4TL}{JG}$$

Analisando agora o eixo BE , sabemos que o ângulo de torção é igual ao ângulo $\phi_{E/B}$, segundo o qual a seção E gira em relação à seção B . Temos

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE}L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

O ângulo de rotação da extremidade E é obtido fazendo

$$\begin{aligned} \phi_E &= \phi_B + \phi_{E/B} \\ &= \frac{4TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5TL}{JG} \end{aligned}$$

3.6 EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

Vimos na Sec. 3.4 que, para se calcular as tensões em um eixo, era necessário primeiro calcularmos os momentos de torção internos nas várias partes do eixo. Esses momentos eram obtidos com o auxílio do diagrama de corpo livre da parte do eixo localizada à esquerda ou à direita de uma determinada seção, quando então fazíamos a soma dos momentos aplicados a essa parte do eixo ficar igual a zero.

Existem situações em que não se consegue determinar os esforços internos de torção apenas com o uso da estática. Nesses casos, mesmo os esforços externos de torção provenientes dos apoios se tornam impossíveis de calcular com as equações da estática. As equações de equilíbrio devem ser complementadas por outras relações, que levam em conta as deformações do eixo e as restrições da geometria do problema. Eixos nessa situação são chamados *estaticamente indeterminados*, pela impossibilidade de serem resolvidos pela estática. O próximo exemplo e o problema resolvido 3.5 mostram como analisar eixos estaticamente indeterminados.

EXEMPLO 3.5

Um eixo AB tem 250 mm de comprimento e 20 mm de diâmetro, tendo seção transversal circular. O eixo tem seção vazada, com diâmetro interno de 16 mm, no trecho de 125 mm a partir da extremidade B . O eixo é de aço, sendo engastado nas extremidades. Determinar o momento torçor que se exerce no eixo devido a cada apoio, quando um torque de 120 N · m é aplicado no ponto médio de AB (Fig. 3.27).

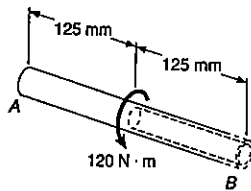


Fig. ex.3.27

Desenhando o diagrama de corpo livre do eixo todo, e chamando de T_A e T_B os momentos torçores exercidos pelos apoios (Fig. 3.28a), obtemos a equação de equilíbrio

$$T_A + T_B = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Esta equação não é suficiente para a determinação das duas incógnitas T_A e T_B , e o eixo é estaticamente indeterminado.

No entanto, podemos encontrar outras condições que nos levam a determinar T_A e T_B , se observarmos que o ângulo de torção total de AB é zero, uma vez que as suas extremidades são fixas e engastadas. Chamando de ϕ_1 e ϕ_2 aos ângulos de torção das partes AC e CB , respectivamente, escrevemos

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

Tomando uma pequena parte do eixo, que inclua a extremidade A (Fig. 3.28b), e analisando o diagrama de corpo livre, vemos que o torque T_1 em AC é igual a T_A ; do mesmo modo, para o diagrama de corpo livre de uma pequena parte do eixo que inclua a seção B , vemos que o esforço interno de torção T_2 é igual a T_B . Tomando agora a Equação 3.16, e observando que as partes AC e BC do eixo giram em sentidos opostos, escrevemos

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

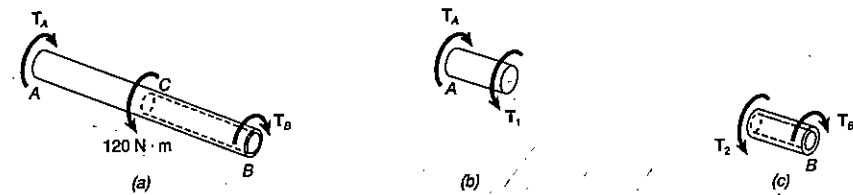


Fig. ex.3.28

Dessa expressão, calculamos T_B

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

Substituindo os valores numéricos:

$$L_1 = L_2 = 125 \text{ mm}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \pi (10 \text{ mm})^4 = 15,71 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \pi [(10 \text{ mm})^4 - (8 \text{ mm})^4] = 9,27 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

escrevemos, então,

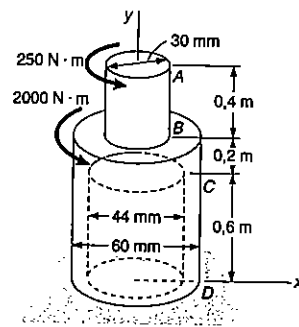
$$T_B = 0,590 T_A$$

Substituindo essa expressão na equação de equilíbrio inicial, obtemos

$$T_A = 75,5 \text{ N} \cdot \text{m} \quad T_B = 44,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 3.3

Um eixo vertical AD é engastado a uma base fixa D , e fica submetido ao momento torçor indicado. A porção CD do eixo tem seção transversal vazada de 44 mm de diâmetro interno. Sabendo-se que o eixo é feito de aço, com módulo de elasticidade transversal $G = 80 \text{ MPa}$, calcular o ângulo de torção no ponto A .



Solução. O eixo é constituído de três partes, onde cada uma delas tem seção transversal uniforme e resiste a um momento torçor constante. Podemos usar a Equação 3.17.

Condições da estática. Cortando o eixo por uma seção entre A e B, o diagrama de corpo livre mostra que

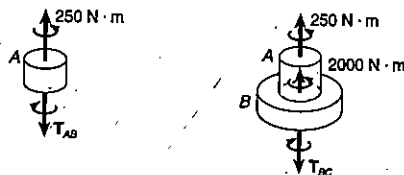
$$\Sigma M_y = 0; \quad (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Passando agora uma seção entre os pontos B e C, temos

$$\Sigma M_y = 0; \quad (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como não existe momento torçor aplicado em C,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

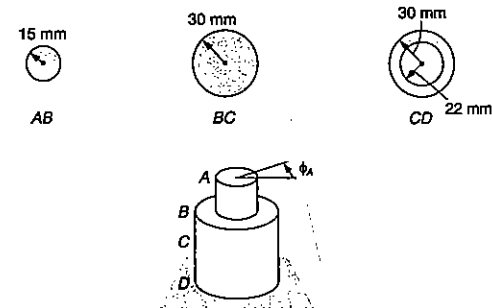


Momentos de inércia polares

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0,015 \text{ m})^4 = 0,0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0,030 \text{ m})^4 = 1,272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0,030 \text{ m})^4 - (0,022 \text{ m})^4] = 0,904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Ângulo de torção. Usando a Equação 3.17 e lembrando que $G = 80 \text{ MPa}$, temos

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right)$$

$$\phi_A = \frac{1}{80 \text{ GPa}} \left[\frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0,4 \text{ m})}{0,0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2250)(0,2)}{1,272 \times 10^{-6}} + \frac{(2250)(0,6)}{0,904 \times 10^{-6}} \right]$$

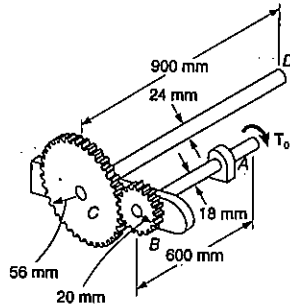
$$= 0,01572 + 0,00442 + 0,01867$$

$$\phi_A = 0,0388 \text{ radianos}$$

$$\phi_A = (0,0388) \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \quad \phi_A = 2,22^\circ$$

PROBLEMA RESOLVIDO 3.4

Dois eixos maciços são ligados por engrenagens, como mostra a figura. Sabe-se que o material de cada eixo tem $G = 80 \text{ MPa}$ e tensão de cisalhamento admissível de 55 MPa . Determinar: (a) o maior valor do torque T_0 que poderá ser aplicado à extremidade A do eixo; (b) o ângulo de rotação da extremidade A do eixo AB, correspondente a T_0 .



Condições de estática. Chamando de F à força tangencial entre os dentes da engrenagem, temos

Engrenagem B:

$$\sum M_B = 0; \quad F(20 \text{ mm}) - T_0 = 0$$

Engrenagem C:

$$\sum M_C = 0; \quad F(56 \text{ mm}) - T_{CD} = 0 \quad T_{CD} = 2,8T_0 \quad (1)$$

Condições da cinemática. Notamos que o movimento no encontro das engrenagens é igual para as duas peças, e escrevemos

$$r_B \phi_B = r_C \phi_C \quad \phi_B = \phi_C \frac{r_C}{r_B} = \phi_C \frac{56 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 2,8 \phi_C \quad (2)$$



a) **Momento torçor T_0 .**

Eixo AB. Temos $T_{AB} = T_0$ e $c = 0,009 \text{ m}$. Com a tensão admissível de 55 MPa , escrevemos

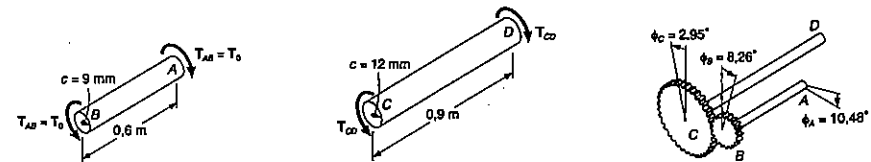
$$\tau = \frac{T_{AB}c}{J} \quad 55 \text{ MPa} = \frac{T_0(0,009 \text{ m})}{\frac{\pi}{2}(0,009 \text{ m})^4} \quad T_0 = 63,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Eixo CD. De (1) temos $T_{CD} = 2,8 T_0$. Sendo $c = 0,012 \text{ m}$ e $\tau_{adm} = 55 \text{ MPa}$, temos

$$\tau = \frac{T_{CD}c}{J} \quad 55 \text{ MPa} = \frac{2,8T_0(0,012 \text{ m})}{\frac{\pi}{2}(0,012 \text{ m})^4} \quad T_0 = 53,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Máximo momento torçor. Escolhemos o menor valor encontrado para T_0

$$T_0 = 53,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$



b) **Ângulo de rotação da extremidade A.** Inicialmente calculamos o ângulo de torção de cada eixo.

Eixo AB. Para $T_{AB} = T_0 = 53,3 \text{ N} \cdot \text{m}$, temos

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{GJ} = \frac{(53,3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,6 \text{ m})}{(80 \text{ GPa}) \frac{\pi}{2}(0,009 \text{ m})^4} = 0,0388 \text{ rad} = 2,22^\circ$$

Eixo CD. $T_{CD} = 2,8 T_0 = 2,8(53,3 \text{ N} \cdot \text{m})$

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L}{GJ} = \frac{2,8(53,3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,9 \text{ m})}{(80 \text{ GPa}) \frac{\pi}{2} (0,012 \text{ m})^4} = 0,0515 \text{ rad} = 2,95^\circ$$

Como o eixo CD tem extremidade fixa D, temos $\phi_C = \phi_{CD} = 2,95^\circ$. Da expressão (2), determinamos a rotação da engrenagem B:

$$\phi_B = 2,8\phi_C = 2,8(2,95^\circ) = 8,26^\circ$$

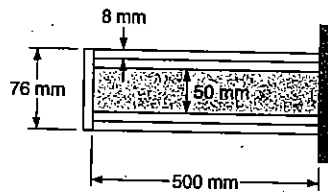
Para a extremidade A temos

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{AB} = 8,26^\circ + 2,22^\circ$$

$$\phi_A = 10,48^\circ$$

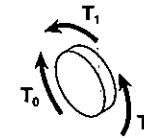
PROBLEMA RESOLVIDO 3.5

Um eixo circular de aço e um tubo de alumínio estão ligados a um apoio fixo e a um disco rígido, como mostra a seção longitudinal da figura. Sabendo-se que as tensões iniciais são nulas, determinar o máximo torque T_0 que pode ser aplicado ao disco, sendo a tensão admissível a cisalhamento de 70 MPa para o alumínio e 120 MPa para o aço. Adotar $G = 80 \text{ MPa}$ para o aço e $G = 27 \text{ MPa}$ para o alumínio.



Condições da estática. Diagrama de corpo livre para o disco. Chamando de T_1 o momento torçor que o tubo exerce sobre o disco, e de T_2 o momento torçor que o eixo exerce sobre o mesmo disco, encontramos

$$T_0 = T_1 + T_2 \tag{1}$$



Deformações. Como o eixo e o tubo estão ligados ao disco rígido, temos

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} = \frac{T_2 L_2}{G_2 J_2}$$

$$\frac{T_1(0,5 \text{ m})}{(27 \text{ GPa})(2,003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = \frac{T_2(0,5 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})(0,614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}$$

$$T_2 = 0,908 T_1 \tag{2}$$

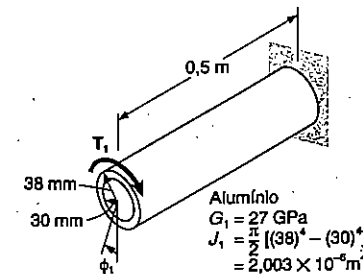
Tensões de cisalhamento. Vamos inicialmente supor que a restrição $\tau_{\text{alum}} \leq 70 \text{ MPa}$ é crítica. Para o tubo de alumínio temos

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} \sqrt{x} J_1}{c_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2,003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(0,038 \text{ m})} = 3690 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Usando a Equação 2, calculamos o correspondente valor T_2 e encontramos o máximo valor da tensão de cisalhamento para o eixo de aço.

$$T_2 = 0,908 T_1 = 0,908(3690) = 3350 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\text{aço}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3350 \text{ N} \cdot \text{m})(0,025 \text{ m})}{(0,614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 136,4 \text{ MPa}$$

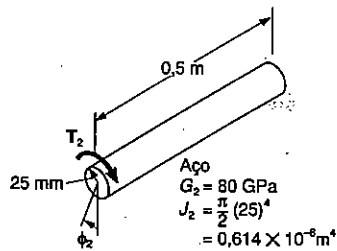


Vemos que a tensão admissível do aço é excedida; nossa suposição estava errada. Desse modo, o máximo torque T_0 será obtido fazendo-se $\tau_{aço} = 120 \text{ MPa}$. Inicialmente, determinamos o torque T_2

$$T_2 = \frac{\tau_{aço} J_2}{c_2} = \frac{(120 \text{ MPa})(0,614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(0,025 \text{ m})} = 2950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Da Equação 2, temos:

$$2950 \text{ N} \cdot \text{m} = 0,908 T_1 \quad T_1 = 3250 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Usando a Equação 1, obtemos o máximo momento admissível

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3250 \text{ N} \cdot \text{m} + 2950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6,20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PROBLEMAS

3.23 Pede-se determinar: (a) o torque T que causa um ângulo de torção de 3° no eixo cilíndrico vazado de aço ($G = 77 \text{ GPa}$); (b) o ângulo de torção causado pelo mesmo torque T , num eixo cilíndrico maciço de mesma área de seção transversal.

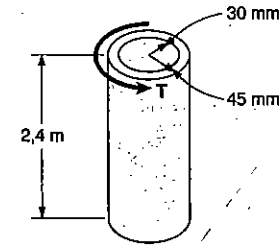


Fig. P3.23

3.24 Pede-se determinar: (a) o ângulo de torção causado por um torque T de $4500 \text{ N} \cdot \text{m}$, em um eixo de alumínio maciço e de diâmetro 75 mm ($G = 25,5 \text{ GPa}$); (b) idem à parte a, assumindo que o eixo maciço tenha sido substituído por um eixo vazado, com mesmo diâmetro externo e com $25,4 \text{ mm}$ de diâmetro interno.

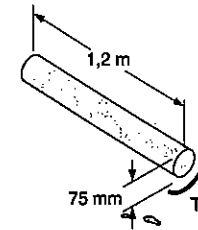


Fig. P3.24

3.25 Determinar o maior diâmetro admissível de uma barra de aço de 3 m de comprimento ($G = 77 \text{ GPa}$), se a barra é torcida de 90° , sem exceder a uma tensão de cisalhamento de 100 MPa .

3.26 Ao mesmo tempo em que um poço de petróleo está sendo furado a uma profundidade de 2500 m , no topo dele é observado que o tubo de perfuração, de aço de 200 mm de diâmetro ($G = 77 \text{ GPa}$), encontra-se com $2,5$ rotações, antes de se iniciar a operação. Determinar a máxima tensão de cisalhamento provocada no tubo, por essa torção.

3.27 Os torques mostrados são aplicados às polias A , B e C . Sabendo-se que todo o eixo é maciço e feito de latão ($G = 39 \text{ GPa}$), determinar o ângulo de torção entre: (a) A e B ; (b) A e C .

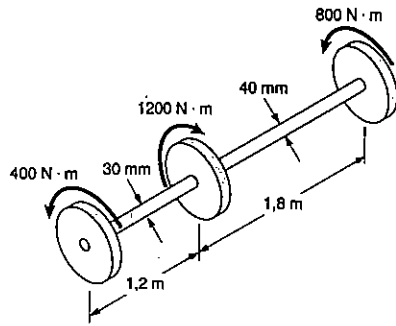


Fig. P3.27

3.28 O motor elétrico exerce um torque de $675 \text{ N} \cdot \text{m}$ sobre o eixo de alumínio $ABCD$, quando está girando com uma velocidade constante. Sabendo-se que $G = 26 \text{ GPa}$ e os torques aplicados sobre as polias B e C são tal como mostrado, determinar o ângulo de torção entre: (a) B e C ; (b) B e D .

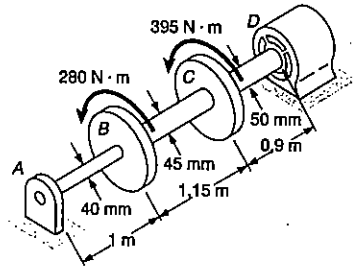


Fig. P3.28

3.29 Resolver o Prob. 3.28, considerando que um furo de $25,4 \text{ mm}$ foi broqueado ao longo do eixo.

3.30 Os torques mostrados são aplicados às polias A, B, C e D . Sabendo-se que todo o eixo é maciço, tem 120 mm de comprimento e é feito de aço ($G = 77 \text{ GPa}$), determinar o ângulo de torção entre: (a) A e C ; (b) A e E .

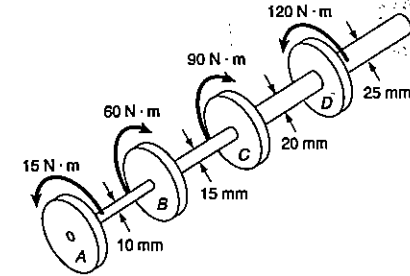


Fig. P3.30

3.31 A barra cilíndrica AB tem um diâmetro $d_s = 38 \text{ mm}$ e é feito de um aço com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 83 \text{ MPa}$, enquanto que o tubo CD é feito de um latão com $G = 39 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 48,5 \text{ MPa}$. Determinar o maior ângulo de torção permissível na extremidade A .

3.32 A barra cilíndrica AB tem um diâmetro $d_s = 44,5 \text{ mm}$ e é feita de um aço com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 83 \text{ MPa}$, enquanto que o tubo CD é feito de um latão com $G = 39 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 48,5 \text{ MPa}$. Determinar: (a) o maior torque T que pode ser aplicado em A , se as tensões admissíveis dadas não podem ser excedidas e o ângulo de torção no tubo não pode exceder a $0,375^\circ$; (b) o correspondente ângulo que a extremidade A poderá girar.

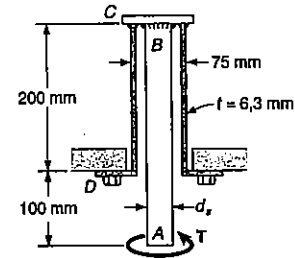


Fig. P3.31 e Fig. P3.32

3.33 Dois eixos maciços de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) são conectados pelas engrenagens mostradas. Determinar o ângulo de torção da extremidade A , quando nesse ponto um torque T de $600 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado.

3.34 Dois eixos maciços de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) são conectados pelas engrenagens mostradas. Determinar o ângulo de torção da extremidade A , quando nesse ponto um torque T de $340 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado.

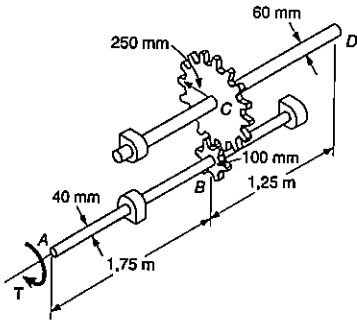


Fig. P3.33

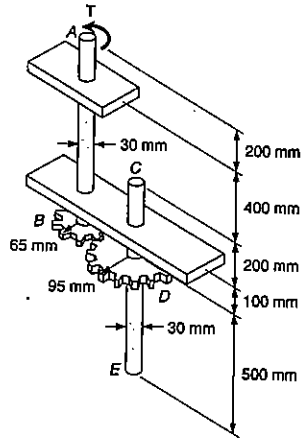


Fig. P3.34

3.35 Para o sistema eixo-engrenagem do Prob. 3.34, determinar: (a) o máximo valor permissível de T , se o ângulo de torção entre D e E não pode ser excedido de $2,5^\circ$; (b) o correspondente valor do ângulo de torção, com que gira a extremidade A .

3.36 Para o sistema eixo-engrenagem do Prob. 3.33, determinar: (a) o máximo valor permissível de T , se o ângulo de torção entre C e D não deve exceder a $0,75^\circ$; (b) o correspondente valor do ângulo de torção, com que gira a extremidade A .

3.37 Um eixo circular maciço de transmissão, de $1,5 \text{ m}$ de comprimento, está sujeito a um torque de $12 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Determinar o diâmetro necessário do eixo, sabendo-se que o ângulo de torção não deve exceder a $1,5^\circ$ e que o eixo é feito de: (a) um aço com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 80 \text{ MPa}$; (b) um brônze com $G = 42 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 30 \text{ MPa}$.

3.38 As especificações de projeto para o sistema eixo-engrenagem mostrado requerem que os mesmos diâmetros sejam usados para ambos os eixos e que o ângulo de torção da polia A , quando ela está sujeita a um torque T_A de $226 \text{ kN} \cdot \text{m}$, não deve exceder a $7,5^\circ$, mantida fixa a polia D . Determinar o diâmetro necessário dos eixos, se ambos são de um aço com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 83 \text{ MPa}$.

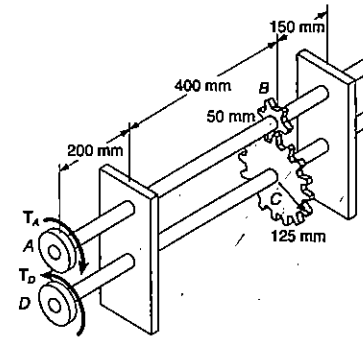


Fig. P3.38

3.39 Resolver o Prob. 3.38, considerando que ambos são feitos de um latão com $G = 39 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 55 \text{ MPa}$.

3.40 Um furo é puncionado em A , numa chapa plástica, por uma força P de 600 N aplicada na extremidade D da alavanca CD , que está rigidamente fixada a um eixo cilíndrico maciço BC . As especificações de projeto estabelecem que o deslocamento em D não poderá exceder a 15 mm , desde o instante em que o punção toca a chapa plástica, até o instante em que ele a penetra totalmente. Determinar o diâmetro necessário do eixo BC , quando o eixo é feito de: (a) um aço com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 80 \text{ MPa}$; (b) um alumínio com $G = 26 \text{ GPa}$ e $\tau_{adm} = 70 \text{ MPa}$.

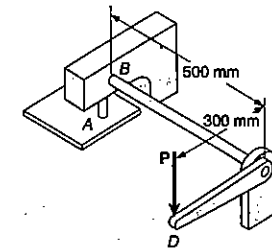


Fig. P3.40

3.41 O eixo composto mostrado consiste em uma camisa de aço ($G_a = 77 \text{ GPa}$) com $1,6 \text{ mm}$ de espessura, colada a um núcleo de alumínio ($G_{al} = 26 \text{ GPa}$) com diâmetro de 60 mm . Sabendo-se que um torque T de $900 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado em B , determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento na camisa de aço; (b) a máxima tensão de cisalhamento no núcleo de alumínio; (c) o ângulo de torção em B .

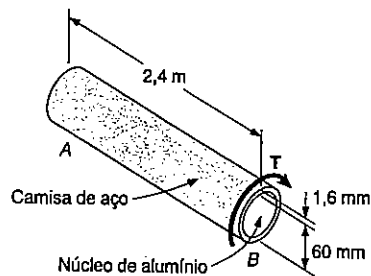


Fig. P3.41

3.42 O eixo composto mostrado consiste em uma camisa de latão ($G_l = 39 \text{ GPa}$) com 5,5 mm de espessura, colado a um núcleo de aço ($G_a = 77 \text{ GPa}$) com diâmetro de 40 mm. Sabendo-se que o eixo é submetido a um torque de $600 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento na camisa de latão; (b) a máxima tensão de cisalhamento no núcleo de aço; (c) o ângulo de torção de B, relativo a A.

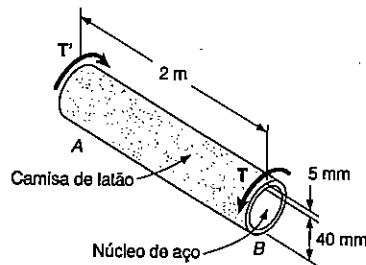


Fig. P3.42

3.43 Para o eixo composto do Prob. 3.42, as tensões de cisalhamento admissíveis são conhecidas como sendo 20 MPa na camisa de latão e 45 MPa no núcleo de aço. Determinar: (a) o maior torque que pode ser aplicado ao eixo; (b) o correspondente ângulo de torção em B, relativo a A.

3.44 Para o eixo composto do Prob. 3.41, as tensões de cisalhamento admissíveis são conhecidas como sendo 40 MPa na camisa de aço e 20 MPa no núcleo de alumínio. Determinar: (a) o maior torque que pode ser aplicado ao eixo; (b) o correspondente ângulo de torção em B.

3.45 Dois eixos maciços de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) são acoplados por um disco B e engastados nas extremidades em A e C. Para o carregamento indicado, determinar: (a) a reação em cada extremidade fixa; (b) a máxima tensão de cisalhamento no eixo AB; (c) a máxima tensão de cisalhamento no eixo BC.

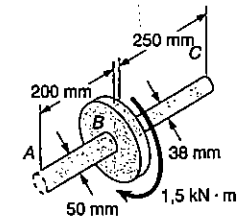


Fig. P3.45

3.46 Resolver o Prob. 3.45, considerando que o eixo AB é substituído por um eixo vazado de mesmo diâmetro externo e com 25,4 mm de diâmetro interno.

3.47 Os cilindros maciços AB e BC estão unidos em B e engastados em A e C. Sabendo-se que AB é de alumínio ($G_{al} = 26 \text{ GPa}$) e BC é de latão ($G_l = 39 \text{ GPa}$), determinar para o carregamento mostrado: (a) a reação em cada extremidade fixa; (b) a máxima tensão de cisalhamento em AB; (c) a máxima tensão de cisalhamento em BC.

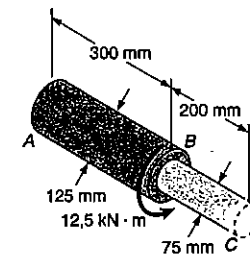


Fig. P3.47

3.48 Resolver o Prob. 3.47, considerando que AB é feito de aço ($G = 77 \text{ GPa}$), ao invés de alumínio.

3.49 A barra cilíndrica maciça AB e o tubo CD são ambos unidos por um pequeno cilindro E . A barra cilíndrica AB é de aço, com $G_a = 77$ GPa e $(\tau_{adm})_a = 83$ MPa; enquanto que o tubo CD é de latão, com $G_l = 39$ GPa e $(\tau_{adm})_l = 48$ MPa. Determinar o maior torque T que pode ser aplicado ao cilindro E .

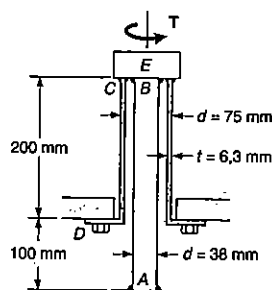


Fig. P3.49

3.50 Sabendo-se que um torque T de $2,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado ao cilindro E do Prob. 3.49, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento na barra cilíndrica AB ; (b) a máxima tensão de cisalhamento no tubo CD .

3.51 As extremidades A e D de dois eixos maciços de aço, AB e CD , estão engastadas, enquanto que as extremidades B e C são conectadas por engrenagens, como indicado. Sabendo-se que um torque T de $4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado na engrenagem B , determinar a máxima tensão de cisalhamento: (a) no eixo AB ; (b) no eixo CD .

3.52 As extremidades A e D de dois eixos maciços de aço, AB e CD , estão engastadas, enquanto que as extremidades B e C são conectadas por engrenagens, como indicado. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é 50 MPa para cada eixo, determinar o maior torque T que pode ser aplicado na engrenagem B .

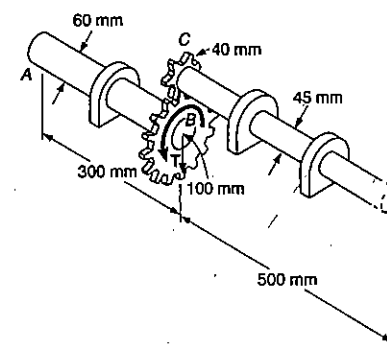


Fig. P3.51 e Fig. P3.52

3.53 Uma placa anelar de espessura t e módulo de elasticidade transversal G é usada para conectar o eixo AB de raio r_1 ao tubo CD de raio interno r_2 . Sabendo-se que o torque T é aplicado à extremidade A do eixo AB e que a extremidade D do eixo CD é engastada: (a) determinar a intensidade e a localização da máxima tensão de cisalhamento na placa anelar; (b) mostrar que o ângulo de rotação da extremidade B do eixo, em relação à extremidade C do tubo é:

$$\phi_{B/C} = \frac{T}{4\pi G t} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

3.54 Uma placa anelar de latão ($G = 39$ GPa), de espessura $t = 6,35$ mm, é usada para conectar o eixo de latão AB , de comprimento $L_1 = 50$ mm e raio $r_1 = 30$ mm, ao tubo de latão CD , de comprimento $L_2 = 250$ mm, raio interno $r_2 = 75$ mm e espessura de $3,2$ mm. Sabendo-se que um torque T de $2,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado à extremidade A do eixo AB , e que a extremidade D do tubo CD é engastada, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento no sistema placa-tubo; (b) o ângulo de rotação da extremidade A . (Sugestão: Usar a fórmula desenvolvida no Prob. 3.53 e resolver a parte b.)

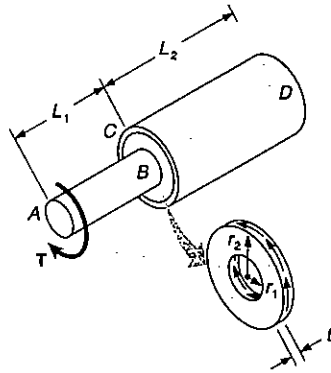


Fig. P3.53 e Fig. P3.54

3.55 Um eixo maciço e um eixo vazado são feitos de mesmo material e têm o mesmo peso e o mesmo comprimento. Expressando por n a relação c_1/c_2 , mostrar que a relação T_m/T_v , entre o torque T_m do eixo maciço e T_v do eixo vazado, é: (a) $\sqrt{1 - n^2/(1 + n^2)}$ se a máxima tensão for a mesma em ambos os eixos; (b) $(1 - n^2)/(1 + n^2)$ se o ângulo de torção for o mesmo em ambos os eixos.

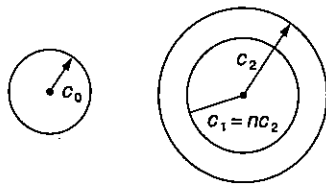


Fig. P3.55

3.56 Um torque T é aplicado como mostrado a um tronco de cone maciço AB . Mostrar por integração que o ângulo de torção em A é:

$$\phi_A = \frac{7TL}{12\pi G \cdot c^4}$$

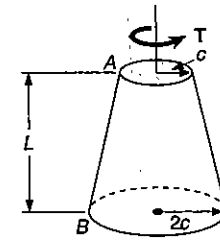


Fig. P3.56

3.57 Desenvolver uma expressão aproximada para o ângulo de torção de um eixo, de forma de tronco de cone no Prob. 3.56, substituindo o eixo tronco de cone por n eixos cilíndricos de iguais comprimentos e raios $r_i = (n + i - \frac{1}{2})/(cn)$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Qual é a resposta do Prob. 3.56 e a porcentagem de erro nesta resposta, se a expressão obtida for usada com: (a) $n = 4$; (b) $n = 8$; (c) $n = 20$; (d) $n = 100$. [Nota: Resolver as partes c e d , somente se tiver à mão um computador ou uma calculadora programável].

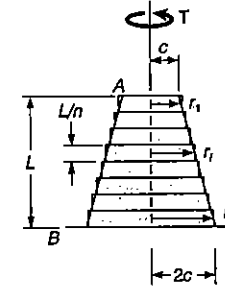


Fig. P3.57

3.7 PROJETO DE EIXOS DE TRANSMISSÃO

As principais especificações a serem consideradas no projeto de eixos de transmissão são a *potência* a ser transmitida e a *velocidade de rotação* do eixo. O projetista deverá

escolher materiais e dimensões adequadas, de modo que a máxima tensão de cisalhamento admissível não seja excedida quando o eixo transmitir a potência requerida na velocidade especificada.

Para determinar o torque no eixo de transmissão, recordamos da dinâmica elementar que a potência P associada à rotação de um corpo rígido sujeito a um torque T é

$$P = T\omega \quad (3.19)$$

onde ω é a velocidade angular do corpo, expressa em radianos por segundo.

Mas $\omega = 2\pi f$, onde f é a frequência do movimento de rotação, isto é, o número de revoluções por segundo. A unidade de frequência é $1s^{-1}$, chamada *hertz*. Substituindo em (3.19), escrevemos ($1s^{-1} = 1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz}$)

$$P = 2\pi f T \quad (3.20)$$

Expressando a frequência em Hz e T em $N \cdot m$, a potência será expressa em $N \cdot m/s$, isto é, em *watts* (W). Calculando o valor de T em (3.20), obtemos o torque exercido em um eixo que transmite a potência P a uma frequência de rotação f ,

$$T = \frac{P}{2\pi f} \quad (3.21)$$

onde P , f e T são expressos nas unidades indicadas acima.

Uma vez tendo determinado o valor do torque T que será aplicado ao eixo e escolhido o material a ser usado, o projetista levará os valores de T e da máxima tensão de cisalhamento admissível às fórmulas de torção em regime elástico (3.8). Resolvendo para J/c , ele encontrará

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{m\acute{a}x}} \quad (3.22)$$

obtendo desta relação o menor valor admissível para o parâmetro J/c . Verificamos que, ao usarmos τ em Pa (N/m^2) e T em $N \cdot m$, vamos obter J/c em m^3 . No caso de um eixo circular de seção maciça, $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ e $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$; levando esse valor de J/c na Equação 3.22, determinamos o mínimo valor admissível para o raio c do eixo circular. No caso de seção vazada, o parâmetro crítico é J/c_2 , onde c_2 é o raio externo do eixo; esse valor pode ser calculado da Equação 3.10 da Sec. 3.4, para determinarmos se uma certa seção é aceitável.

É usual nas aplicações práticas encontrar a frequência expressa em rotações por minuto, rpm, e a potência em cavalos-vapor (CV), ou na unidade inglesa *horsepower* (hp). Antes de aplicarmos a Fórmula 3.21 é necessário converter a frequência em revoluções por segundo (*hertz*) e a potência em $N \cdot m/s$, através das relações seguintes:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} s^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$$

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

EXEMPLO 3.6

Que diâmetro deve ser usado para o eixo do rotor de uma máquina de 5 hp, operando a 3600 rpm, se a tensão de cisalhamento não pode exceder 59 MPa?

Inicialmente vamos expressar a potência do motor em $N \cdot m/s$ e sua frequência em Hz, ou ciclos por segundo:

$$P = (5 \text{ hp}) \left(\frac{746 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{1 \text{ hp}} \right) = 3730 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 3730 \text{ W}$$

$$f = (3600 \text{ rpm}) \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 s^{-1}$$

O torque que vai atuar sobre o eixo é dado pela Equação 3.21

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{3730 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{2\pi(60 s^{-1})} = 9,89 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Substituindo os valores de T e $\tau_{m\acute{a}x}$ na Equação 3.22, temos

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{9,89 \text{ N} \cdot \text{m}}{59 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 0,167 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Mas $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$, para um eixo maciço. Temos, então,

$$\frac{1}{2}\pi c^3 = 0,167 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$c = 0,47 \times 10^{-2} \text{ m} = 4,75 \text{ mm}$$

$$d = 9,5 \text{ mm.}$$

Deve ser usado um eixo de 9,5 mm de diâmetro.

EXEMPLO 3.7

Um eixo é constituído por um tubo de aço de 50 mm de diâmetro externo e deve transmitir 100 kW de potência a uma frequência de 20 Hz. Determinar a espessura do tubo para que a tensão máxima de cisalhamento não exceda a 60 MPa.

O torque exercido sobre o eixo é dado pela Equação 3.21

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi(20 \text{ Hz})} = 795,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Da Equação 3.22 calculamos o valor do parâmetro J/c_2 , que deve ser no mínimo igual a

$$\frac{J}{c_2} = \frac{T}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{795,8 \text{ N} \cdot \text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13,26 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad (3.23)$$

Da Equação 3.10 temos

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{0,050} [(0,025)^4 - c_1^4] \quad (3.24)$$

Igualando o segundo membro das Equações 3.23 e 3.24:

$$(0,025)^4 - c_1^4 = \frac{0,050}{\pi} (13,26 \times 10^{-6})$$

$$c_1^4 = 390,6 \times 10^{-9} - 211,0 \times 10^{-9} = 179,6 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$c_1 = 20,6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20,6 \text{ mm}$$

A espessura correspondente do tubo é

$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20,6 \text{ mm} = 4,4 \text{ mm}$$

Devemos usar um tubo de parede de 5 mm.

3.8 CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM EIXOS CIRCULARES

A fórmula $\tau_{m\acute{a}x} = Tc/J$ foi deduzida na Sec. 3.4 para o caso de um eixo de seção transversal circular uniforme. Antes disso, na Sec. 3.2, já havíamos adotado que os momentos torçores eram aplicados ao eixo através de placas rígidas nas extremidades, firmemente ligadas ao eixo. Na prática, porém, para se aplicar um momento torçor a um eixo usam-se acoplamentos de flanges (Fig. 3.29a) ou engrenagens ligadas ao eixo por chavetas colocadas dentro de rasgos feitos nas superfícies de contato (Fig. 3.29b). Nos dois casos, as tensões se distribuem, nas proximidades do ponto de aplicação do torque, de maneira bem diferente daquela dada pela fórmula da torção. Assim, nas proximidades da guia da Fig. 3.29b, ocorrerão grandes concentrações de tensões. A determinação dessas tensões localizadas pode ser conseguida por meio de métodos de análise experimental, ou através da teoria da elasticidade.

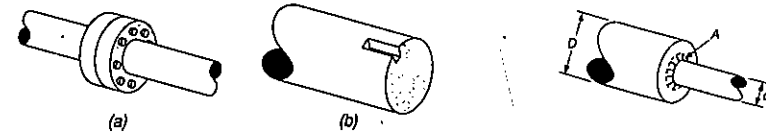


Fig. 3.29

Fig. 3.30

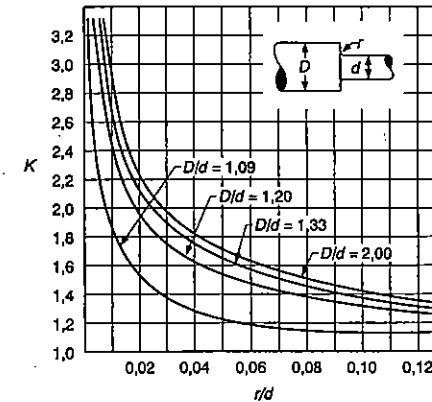


Fig. 3.31 Coeficientes de concentração de tensões para adoçamentos em eixos de seção circular³.

³ L. S. Jacobsen, "Concentração de tensões de torção em eixos de seção circular e diâmetro variável", A.S.M.E., 1925, vol. 47, pp. 619-638.

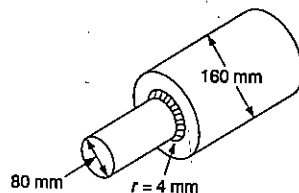
Como havíamos dito na Sec. 3.4, as fórmulas de torção poderiam também ser usadas para eixos com seção circular variável. Quando a variação da seção transversal ocorre de forma brusca, haverá concentração de tensões perto da descontinuidade, com valores máximos de tensão acontecendo em A (Fig. 3.30). Essas tensões podem ter seu valor reduzido pela utilização de um arredondamento ou adoçamento e o valor máximo da tensão de cisalhamento no arredondamento ou adoçamento pode ser calculado por

$$\tau_{\text{máx}} = K \frac{Tc}{J} \quad (3.25)$$

onde a tensão Tc/J é a tensão calculada para o menor diâmetro, e onde K é o coeficiente de concentração de tensões. O coeficiente K depende apenas das relações entre os dois diâmetros e entre o raio do adoçamento e o diâmetro menor. Então K pode ser determinado uma única vez, e seus valores serão marcados em gráficos ou tabelas, como indica a Fig. 3.31. Devemos salientar que esse procedimento para a determinação das tensões localizadas de cisalhamento só é válido para valores de $\tau_{\text{máx}}$ (dados pela Equação 3.25), que não excedam o limite de proporcionalidade do material, uma vez que os valores de K foram obtidos com a suposição de uma relação linear entre tensões e deformações de cisalhamento. Se ocorrerem deformações plásticas, os valores da tensão máxima resultarão abaixo daqueles dados pela Equação 3.25.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.6

O eixo de seção transversal variável da figura transmite a potência de uma turbina para um gerador, girando a 900 rpm. O tipo de aço especificado no projeto tem tensão admissível de cisalhamento de 55 MPa. (a) As dimensões indicadas são as de um projeto preliminar. Determinar, para esses valores, a máxima potência que pode ser transmitida. (b) Se o projeto final especifica o valor de 10 mm para o raio do adoçamento, qual o aumento percentual, na potência transmitida, em relação ao caso a?

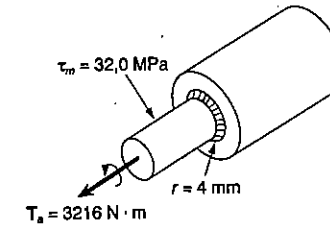


a) Projeto preliminar. Usando a notação da Fig. 3.31, temos:

$$D = 160 \text{ mm}, \quad d = 80 \text{ mm}, \quad r = 4 \text{ mm}$$

$$\frac{D}{d} = \frac{160 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 2 \quad \frac{r}{d} = \frac{4 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 0,05$$

Encontramos da Fig. 3.31 $K = 1,72$



Torque. Lembrando a Equação 3.25, temos:

$$\tau_{\text{máx}} = K \frac{Tc}{J} \quad T = \frac{J}{c} \frac{\tau_{\text{máx}}}{K} \quad (1)$$

onde J/c se refere ao diâmetro menor do eixo:

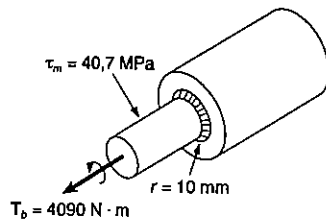
$$\frac{J}{c} = \frac{1}{2} \pi c^3 = \frac{\pi}{2} (0,040 \text{ m})^3 = 100,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

e onde

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1,72} = 32,0 \text{ MPa}$$

Substituindo na Equação 1

$$T = (100,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(32,0 \text{ MPa}) = 3216 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Potência. Como $f = (900 \text{ rpm}) \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz}$, escrevemos,

$$P_{(a)} = 2\pi f T = 2\pi(15 \text{ Hz})(3216 \text{ N} \cdot \text{m}) = 303\,000 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$P_{(a)} = 303 \text{ kW}$$

b) **Projeto final.** Para $r = 10 \text{ mm}$

$$\frac{D}{d} = 2 \quad \frac{r}{d} = \frac{10 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 0,125 \quad K = 1,35$$

Adotando a mesma seqüência vista acima, temos

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1,35} = 40,7 \text{ MPa}$$

$$T = \frac{J}{c} \frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = (100,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(40,7 \text{ MPa}) = 4090 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$P_{(b)} = 2\pi f T = 2\pi(15 \text{ Hz})(4090 \text{ N} \cdot \text{m}) = 385\,000 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$P_{(b)} = 385 \text{ kW}$$

Variação percentual na potência a ser transmitida

$$\text{Porcentagem de aumento} = (100) \frac{P_{(b)} - P_{(a)}}{P_{(a)}} = 100 \frac{385 - 303}{303}$$

$$\text{Porcentagem de aumento} = 27\%$$

PROBLEMAS

3.58 Determinar a máxima tensão de cisalhamento em um eixo maciço de 38 mm de diâmetro, que transmite 75 hp a uma velocidade de: (a) 750 rpm; (b) 1500 rpm.

3.59 Determinar a máxima tensão de cisalhamento em um eixo maciço de 12 mm de diâmetro, que transmite 2,5 kW a uma freqüência de: (a) 25 Hz; (b) 50 Hz.

3.60 Usando uma tensão de cisalhamento admissível de 50 MPa, projetar um eixo maciço de aço para transmitir 15 kW, a uma freqüência de: (a) 30 Hz; (b) 60 Hz.

3.61 Usando uma tensão de cisalhamento admissível de 30 MPa, projetar um eixo maciço de aço que transmita 12 hp, a uma velocidade de: (a) 1200 rpm; (b) 2400 rpm.

3.62 Uma vez que o eixo vazado de aço mostrado gira a 180 rpm, uma luz estroboscópica para medições indica que o ângulo de torção do eixo é 3°. Sabendo-se que $G = 77 \text{ GPa}$, determinar: (a) a potência que está sendo transmitida; (b) a máxima tensão de cisalhamento no eixo.

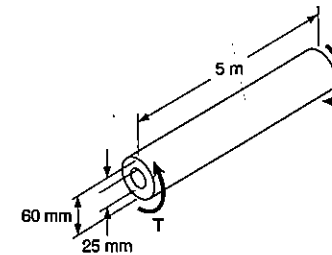


Fig. P3.62 e Fig. P3.63

3.63 O eixo vazado de aço mostrado ($G = 77 \text{ GPa}$, $\tau_{\text{adm}} = 50 \text{ MPa}$) gira a 240 rpm. Determinar: (a) a máxima potência que pode ser transmitida; (b) o correspondente ângulo de torção do eixo.

3.64 Um eixo de acionamento de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) tem 2,4 m de comprimento e seus diâmetros externo e interno são, respectivamente, iguais a 63,5 mm e 57 mm. Sabendo-se que o eixo transmite 200 hp, a uma rotação de 1500 rpm, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento; (b) o ângulo de torção do eixo.

3.65 Sabendo-se que ($G = 77 \text{ GPa}$) e $\tau_{\text{adm}} = 40 \text{ MPa}$ para o aço a ser usado, determinar: (a) o menor diâmetro permissível de um eixo maciço, que deve transmitir 18 hp, a uma rotação de 2400 rpm; (b) o correspondente ângulo de torção em um eixo de 1,85 m de comprimento.

3.66 Dois eixos maciços e as engrenagens mostradas são usadas para transmitir 12 kW de um motor em *A*, que gira a uma frequência de 20 Hz, a uma máquina-ferramenta em *D*. Sabendo-se que cada eixo tem um diâmetro de 25 mm, determine a máxima tensão de cisalhamento: (a) no eixo *AB*; (b) no eixo *CD*.

3.67 Os dois eixos maciços e as engrenagens mostradas são usadas para transmitir 12 kW do motor em *A*, que gira a uma frequência de 20 Hz, a uma máquina-ferramenta em *D*. Sabendo-se que a máxima tensão de cisalhamento admissível é de 60 MPa em todo o eixo determinar o diâmetro necessário: (a) para o eixo *AB*; (b) para o eixo *CD*.

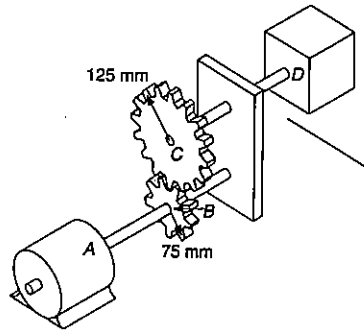


Fig. P3.66 e Fig. P3.67

3.68 Um eixo maciço de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) de 2,3 m de comprimento transmite 15 hp a uma velocidade de 1500 rpm. Determinar o diâmetro necessário para o eixo, sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é de 30 MPa e o ângulo de torção não deve exceder a 4° .

3.69 Um eixo maciço de aço ($G = 77 \text{ GPa}$), de 3 m de comprimento, transmite 12 kW a uma frequência de 25 Hz. Determinar o diâmetro necessário do eixo, sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e o ângulo de torção não deve exceder a 10° .

3.70 Um eixo maciço de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) de 30 mm de diâmetro, gira com uma frequência de 30 Hz. Determinar a máxima potência que o eixo pode transmitir, sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder a $7,5^\circ$.

3.71 Um eixo maciço de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) de 1,5 m de comprimento, com 22 mm de diâmetro, transmite 18 hp. Determinar a mínima velocidade com a qual o eixo pode girar, sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é de 30 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder a $3,5^\circ$.

3.72 Sabendo-se que o eixo escalonado mostrado transmite um torque de intensidade $T = 280 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar a máxima tensão de cisalhamento no eixo, quando o raio de adoçamento é: (a) $r = 0,8 \text{ mm}$; (b) $r = 4,8 \text{ mm}$.

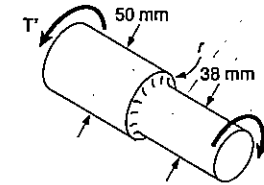


Fig. P3.72 e Fig. P3.73

3.73 Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é de 55 MPa para o eixo escalonado mostrado, determinar a intensidade T do maior torque que pode ser transmitido pelo eixo, quando o raio de adoçamento é: (a) $r = 1,6 \text{ mm}$; (b) $r = 3,2 \text{ mm}$.

3.74 O eixo escalonado mostrado deve transmitir 120 kW a uma velocidade de 480 rpm. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível no eixo é de 55 MPa, determinar o menor raio r permissível para o adoçamento.

3.75 O eixo escalonado mostrado deve transmitir 150 kW. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível do eixo é de 55 MPa e que o raio de adoçamento é $r = 6 \text{ mm}$, determinar a menor frequência permissível.

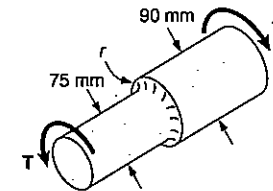


Fig. P3.74 e Fig. P3.75

*3.9 DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS EM EIXOS DE SEÇÃO CIRCULAR

Quando deduzimos as Equações 3.9 e 3.16, que definem a distribuição de tensões e o ângulo de torção para eixos de seção circular, assumimos que a Lei de Hooke poderia ser aplicada para qualquer ponto do eixo. No entanto, se a tensão de escoamento é atingida em algum ponto do eixo, ou se o material que o compõe é um material frágil, que tem diagrama tensão-deformação não-linear, essas equações deixam de ter validade. O objetivo da análise que se segue é desenvolver um método mais geral para a determinação das tensões e ângulos de torção, bem como calcular o torque que produz esses valores, mesmo que não possa ser aplicada a Lei de Hooke.

Inicialmente, devemos nos lembrar que, na Sec. 3.3, não foi adotada nenhuma relação especial para as tensões e deformações, quando foi demonstrado que a deformação de cisalhamento γ varia linearmente com a distância ρ ao centro da seção transversal do eixo circular (Fig. 3.32). Podemos então continuar usando essa propriedade nesta análise, e escrever

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\text{máx}} \quad (3.4)$$

onde c é o raio do eixo.

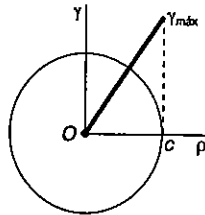


Fig. 3.32

Uma vez especificado o máximo valor $\tau_{\text{máx}}$ da tensão de cisalhamento τ , podemos determinar uma curva da variação de τ com ρ , como se segue. Inicialmente determinamos, do diagrama tensão-deformação de cisalhamento, o valor de $\gamma_{\text{máx}}$ que corresponde a $\tau_{\text{máx}}$ (Fig. 3.33). O valor encontrado é levado à equação (3.4), que permite encontrar, para cada valor de ρ , o correspondente valor de γ . Podemos usar também o gráfico da Fig. 3.32, para a determinação de γ . Uma vez determinado γ para cada valor de ρ , passamos a utilizar o diagrama tensão-deformação da Fig. 3.33, onde cada valor de γ tem o seu correspondente valor de τ . Com os valores de τ assim obtidos, em função de ρ , desenhamos a curva que exprime a variação de τ com ρ , mostrada na Fig. 3.34. Essa é a distribuição de tensões de cisalhamento procurada.

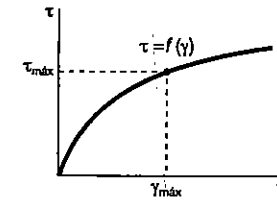


Fig. 3.33

Devemos nos lembrar também que na dedução da Equação 3.1 não foi adotada nenhuma relação especial entre as tensões e deformações, o que nos permite agora usar essa equação para a determinação do torque correspondente à distribuição de tensões de cisalhamento obtida na Fig. 3.34. Tomando um elemento de área, expresso na Equação 3.1, como um anel de raio ρ e espessura $d\rho$, temos $dA = 2\pi\rho d\rho$, e escrevemos

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho d\rho) \quad (3.26)$$

ou

$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2\tau d\rho$$

onde τ é função de ρ , segundo a curva da Fig. 3.34.

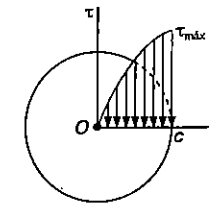


Fig. 3.34

Se conhecermos a expressão da função entre τ e γ , a Equação 3.4 pode ser usada para expressar τ em função de ρ , e desse modo a integral 3.26 pode ser determinada analiticamente. Por outro lado, o torque T pode ser obtido também por integração numérica. O valor da integral se torna mais significativo, se notarmos que a expressão a ser integrada é o momento de inércia, em relação ao eixo vertical, da área limitada pela curva e pelo eixo horizontal, na Fig. 3.34.

Um valor importante a ser conhecido é o momento de torção último T_U , que leva o eixo à ruptura. Podemos determinar T_U adotando $\tau_{\text{máx}} = \tau_U$ e efetuando os cálculos indicados acima. Na prática, é mais conveniente determinar T_U experimentalmente, submetendo um corpo de prova à torção até a ruptura. Uma vez conhecido T_U experimentalmente, determinamos o correspondente valor máximo de tensão de cisalhamento, pela Equação 3.8 Para isso, estamos assumindo uma distribuição linear de tensões, que é fictícia. O valor máximo da tensão, que expressaremos por R_T , é chamado *módulo de ruptura à torção* do material. Temos, então:

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \quad (3.27)$$

O módulo de ruptura a torção pode ser usado na determinação do momento torçor máximo de eixos que sejam feitos do mesmo material do corpo de prova ensaiado. Assim, a Equação 3.27 dá o valor do momento último T_U , uma vez escolhidas as dimensões do eixo. Na Fig. 3.35 vemos a distribuição real de tensões e a distribuição de tensões fictícia. Uma vez que as duas distribuições devem levar ao mesmo valor para T_U , as áreas que elas definem devem ter o mesmo momento de inércia em relação ao eixo vertical. Fica claro então que o módulo de ruptura à torção será sempre maior que a real tensão última de cisalhamento τ_U .

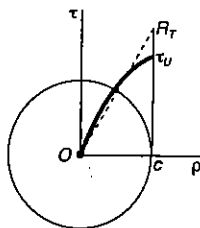


Fig. 3.35

Em alguns casos, pode ser necessária a determinação da distribuição de tensões e do momento torçor T , que correspondem a um certo ângulo de torção ϕ . Para esse fim, podemos usar a expressão que dá a deformação de cisalhamento γ em função de ϕ , ρ e L , obtida na Sec. 3.3:

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \quad (3.2)$$

Uma vez dados ϕ e L , a Equação 3.2 calcula o valor de γ correspondente a qualquer valor de ρ . Usando então o diagrama tensão-deformação de cisalhamento do material, encontramos o valor da tensão de cisalhamento τ , que será levado a um gráfico junto com o valor de ρ que lhe corresponde. Com isso, fica construída a curva representativa da distribuição de tensões, e o valor do momento T pode ser determinado analítica ou numericamente, como explicado antes.

*3.10 EIXOS DE SEÇÃO CIRCULAR FEITOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

Uma visão mais ampla do comportamento de um eixo submetido à torção no regime plástico pode ser conseguida, considerando o caso de um eixo circular maciço, construído com um *material elastoplástico* idealizado. O diagrama tensão-deformação de cisalhamento desse material é mostrado na Fig. 3.36. Por meio desse diagrama, procedendo como fizemos anteriormente, podemos encontrar a distribuição de tensões em uma seção transversal do eixo para qualquer valor de T .

Enquanto a tensão de cisalhamento não exceder a tensão de escoamento τ_e , é válida a Lei de Hooke, e a distribuição das tensões na seção transversal é linear (Fig. 3.37a). $\tau_{\text{máx}}$ é dada pela Equação 3.8

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \quad (3.8)$$

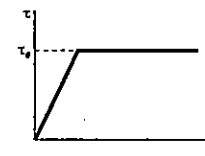


Fig. 3.36

Aumentando o valor do momento torçor, a tensão $\tau_{\text{máx}}$ pode, eventualmente, atingir o valor τ_e (Fig. 3.37b). Substituindo esse valor de tensão na Equação 3.8, encontramos o torque T_e , que leva ao início do escoamento:

$$T_e = \frac{J}{c} \tau_e \quad (3.28)$$

O momento torçor T_e , é chamado momento máximo em regime elástico, uma vez que ele é o maior momento para o qual as deformações ainda são elásticas.

Para eixos de seção circular, maciços, $J/c = \frac{1}{2} \pi c^3$, e escrevemos

$$T_e = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_e \quad (3.29)$$

Continuando a aumentar o valor do momento T , forma-se uma região de material plasticificado na parte externa do eixo, envolvendo um núcleo de material em estado elástico, de raio ρ_e (Fig. 3.37c). Na região plasticificada, a tensão tem distribuição constante, de valor τ_e enquanto no núcleo em regime elástico as tensões variam linearmente com o valor ρ , e podem ser expressas por

$$\tau = \frac{\tau_e}{\rho_e} \rho \quad (3.30)$$

Se T continuar a aumentar, a região plasticificada se expande, até que todas as deformações sejam plásticas (Fig. 3.37d).

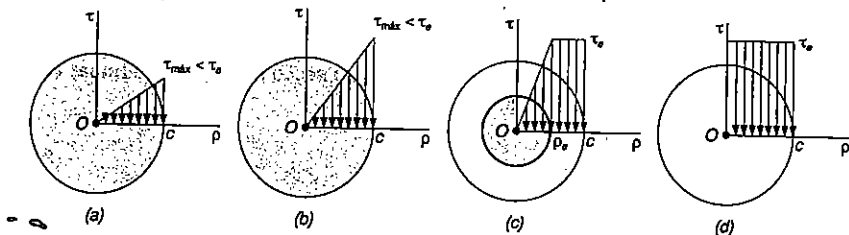


Fig. 3.37

Vamos usar a Equação 3.26 para determinar o valor do momento torçor T que corresponde a um certo valor de raio ρ_e do núcleo em regime elástico. Lembrando que para $\rho \leq \rho_e$ o valor de τ é dado pela Equação 3.30, e que para $\rho_e \leq \rho \leq c$ o valor de τ é igual a τ_e , temos

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_e} \rho^2 \left(\frac{\tau_e}{\rho_e} \rho \right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_e}^c \rho^2 \tau_e d\rho \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho_e^3 \tau_e + \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_e - \frac{2}{3} \pi \rho_e^3 \tau_e \\ T &= \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_e \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_e^3}{c^3} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

ou, tendo em vista a Equação 3.29

$$T = \frac{4}{3} T_e \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_e^3}{c^3} \right) \quad (3.32)$$

onde T_e é o momento máximo em regime elástico. Podemos ver que, quando ρ_e tende a zero, o torque se aproxima do valor limite

$$T_p = \frac{4}{3} T_e \quad (3.33)$$

Este valor do momento de torção, que corresponde a uma deformação plástica total da seção transversal (Fig. 3.37d), é chamado *torque em regime plástico* do eixo considerado. Lembramos que a Equação 3.33 só é aplicável a um eixo circular maciço, de material elastoplástico.

A distribuição de *deformações* ao longo da seção permanece linear após o início do escoamento, o que nos permite usar a Equação 3.2 para expressar o raio ρ_e do núcleo em termos do ângulo de torção ϕ . Se a grandeza de ϕ é suficiente para causar uma deformação plástica, o raio ρ_e do núcleo elástico é obtido da Equação 3.2 fazendo γ igual à deformação de escoamento γ_e . Temos

$$\rho_e = \frac{L \gamma_e}{\phi} \quad (3.34)$$

Vamos chamar de ϕ_e ao valor do ângulo de torção que corresponde ao início do escoamento, quando $\rho_e = c$. Na Equação 3.34, fazendo $\phi = \phi_e$ e $\rho_e = c$, temos:

$$c = \frac{L \gamma_e}{\phi_e} \quad (3.35)$$

Dividindo agora, membro a membro, a Equação 3.34 pela Equação 3.35, obtemos a seguinte relação⁴:

$$\frac{\rho_e}{c} = \frac{\phi_e}{\phi} \quad (3.36)$$

Levando essa expressão de ρ_e/c à Equação 3.32, obtemos o torque T como uma função do ângulo de torção ϕ ,

$$T = \frac{4}{3} T_e \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\phi_e^3}{\phi^3} \right) \quad (3.37)$$

⁴ A Equação 3.36 se aplica a qualquer material dútil com início de escoamento bem definido, uma vez que sua dedução independe da forma do diagrama tensão-deformação depois do ponto de escoamento.

onde T_e e ϕ_e representam o momento torçor e o ângulo de torção no início do escoamento da seção.

É importante notarmos que a Equação 3.37 deve ser usada somente para valores de ϕ maiores que ϕ_e . Para $\phi < \phi_e$, a relação entre T e ϕ é linear, e dada pela Equação 3.16. Combinando os dois casos, encontramos um gráfico da Fig. 3.38, de T em relação a ϕ . Verificamos aí que, enquanto ϕ cresce indefinidamente, T se aproxima do valor limite $T_p = \frac{4}{3} T_e$, que corresponde ao caso de seção totalmente plastificada (Fig. 3.37d). O valor T_p não pode realmente ser alcançado, mas a Equação 3.37 nos mostra que rapidamente os valores de T se aproximam de T_p , enquanto ϕ aumenta de valor. Para $\phi = 2\phi_e$, T está cerca de 3% abaixo de T_p , e para $\phi = 3\phi_e$, a cerca de 1% abaixo de T_p .

Podemos ver que o diagrama de T em relação a ϕ , obtido a partir de um material elastoplástico (Fig. 3.38), difere bem do diagrama tensão-deformação do material (Fig. 3.36). Isso quer dizer que a obtenção do diagrama tensão-deformação de um material real não pode ser feita diretamente de um teste de torção levado a efeito em uma barra circular maciça desse material. No entanto, um diagrama mais preciso pode ser obtido, se o corpo de prova tiver um trecho consistindo em um tubo de parede fina⁵. Podemos admitir que as tensões de cisalhamento terão um valor constante nessa porção do corpo de prova.

A Equação 3.1 se reduz então a

$$T = \rho A \tau$$

onde ρ é o raio médio do tubo e A a área da sua seção transversal. A tensão de cisalhamento é então proporcional ao torque, e valores sucessivos de τ podem ser obtidos de valores correspondentes de T . Por outro lado, os valores da deformação de cisalhamento γ podem ser calculados pela Equação 3.2, com os valores de ϕ e L medidos da porção tubular do corpo de prova.

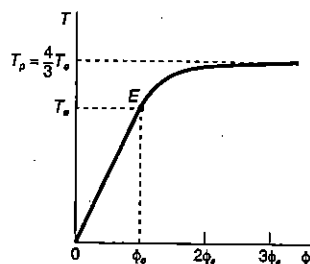


Fig. 3.38

⁵ Para minimizar a possibilidade de ruptura por instabilidade (ou flambagem), o corpo de prova deve ser feito de modo que a porção tubular tenha comprimento da mesma ordem de grandeza do diâmetro.

EXEMPLO 3.8

Um eixo circular maciço, de 50 mm de diâmetro e 1,20 m de comprimento é submetido à ação de um momento torçor de 4,6 kN · m em cada extremidade (Fig. 3.39). Considerando que o eixo é feito de um material elastoplástico com tensão de escoamento ao cisalhamento de 150 MPa e módulo de elasticidade transversal de 80 GPa, determinar: (a) o raio do núcleo elástico; (b) o ângulo de torção do eixo.

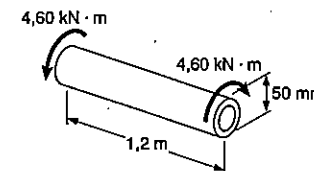


Fig. ex.3.39

a) **Raio do núcleo elástico.** Inicialmente determinamos o momento T_e correspondente ao início do escoamento. Da Equação 3.28, com $\tau_e = 150$ MPa, $c = 25$ mm e

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi (25 \times 10^{-3} \text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

escrevemos

$$T_e = \frac{J \tau_e}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(150 \times 10^6 \text{ Pa})}{25 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3,68 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Determinando na Equação 3.32 o parâmetro $\left(\frac{\rho_e}{c}\right)^3$, e substituindo os valores de T e T_e , temos

$$\left(\frac{\rho_e}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_e} = 4 - \frac{3(4,60 \text{ kN} \cdot \text{m})}{3,68 \text{ kN} \cdot \text{m}} = 0,250$$

$$\frac{\rho_e}{c} = 0,630 \quad \rho_e = 0,630(25 \text{ mm}) = 15,8 \text{ mm}$$

b) **Ângulo de torção.** Inicialmente determinamos o ângulo de torção ϕ_e correspondente ao início do escoamento, da Equação 3.16:

$$\phi_e = \frac{T_e L}{JG} = \frac{(3,68 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1,2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(80 \times 10^9 \text{ Pa})} = 89,9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Em seguida, determinando na Equação 3.36 o parâmetro ϕ e substituindo os valores obtidos para ϕ_e e ρ_e/c , escrevemos

$$\phi = \frac{\phi_e}{\rho_e/c} = \frac{89,9 \times 10^{-3} \text{ rad}}{0,630} = 142,7 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

ou

$$\phi = (142,7 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 8,18^\circ$$

*3.11 TENSÕES RESIDUAIS EM EIXOS DE SEÇÃO CIRCULAR

Vimos, nas duas seções precedentes, que um momento de torção suficientemente grande pode provocar o aparecimento de uma região plastificada, em eixos de seção circular. Vimos também que a tensão de cisalhamento τ em qualquer ponto da região plastificada pode ser obtida do diagrama tensão-deformação de cisalhamento da Fig. 3.33. Se o momento torçor é retirado, verifica-se uma redução nas tensões e deformações ao longo de uma linha reta (Fig. 3.40). Como será mostrado mais adiante, o valor final das tensões, em geral, não é zero. Muitos pontos terão uma tensão residual, que poderá ser positiva ou negativa. Notamos que a relação linear entre τ e γ se mantém abaixo do eixo horizontal, enquanto o decréscimo de tensões não exceder duas vezes a tensão de escoamento. O mesmo ocorria no caso de tensões normais.

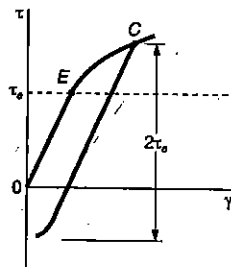


Fig. 3.40

Durante a fase de descarregamento, a relação entre tensão e deformação é linear, para todos os pontos do eixo. Podemos então aplicar a Equação 3.16 para determinar o ângulo de torção em sentido contrário, que aparece enquanto o momento torçor diminui. Como resultado, a fase de descarregamento é representada por uma linha reta, no diagrama $T - \phi$. A Fig. 3.41 mostra esse fato para um material elasto-plástico. Podemos notar que o ângulo de torção não volta a zero quando o torçor é retirado. Na verdade, o carregamento e posterior descarregamento do eixo resulta em uma deformação permanente, caracterizada pelo ângulo.

$$\phi_p = \phi - \phi' \tag{3.38}$$

onde ϕ corresponde à fase de carregamento, sendo calculado pela Equação 3.37, conhecido o valor de T ; e onde ϕ' corresponde à fase de descarregamento, podendo ser obtido da Equação 3.16.

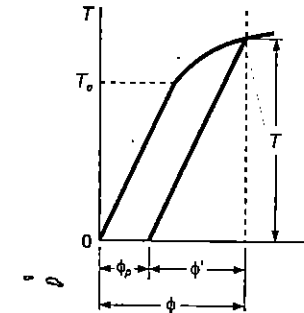


Fig. 3.41

As tensões residuais em um material elasto-plástico podem ser calculadas aplicando o princípio da superposição, de maneira semelhante ao processo descrito no item 2.19, para o caso de cargas axiais. Tomamos, por um lado, as tensões devidas à aplicação do torque T e, por outro lado, as tensões devidas ao torque igual, mas de sentido contrário, que se aplica para descarregar o eixo. Para a fase de carregamento, as tensões refletem o comportamento elasto-plástico do material, enquanto na fase de descarregamento as tensões refletem um comportamento linear do mesmo material (Fig. 3.42a e 3.42b).

Superpondo os dois grupos de tensões, obtemos a distribuição de tensões residuais no eixo (Fig. 3.42c).

Podemos ver na Fig. 3.42c que algumas tensões residuais têm o mesmo sentido das tensões originais, enquanto outras têm o sentido oposto. Era de se esperar esse resultado, uma vez que a relação

$$\int \rho (\tau dA) = 0 \quad (3.39)$$

deve-se verificar após a retirada do momento torçor.

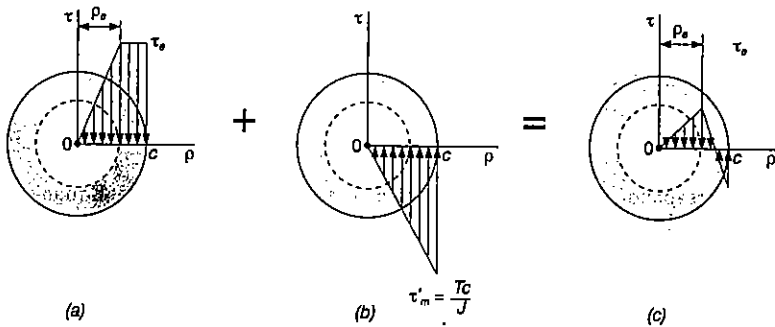


Fig. 3.42

EXEMPLO 3.9

Determinar, para o eixo do Ex. 3.8: (a) o ângulo de torção permanente; (b) a distribuição das tensões residuais, após a retirada de um momento de torção de 4,60 kN·m.

a) **Ângulo de torção permanente.** No Ex. 3.8, foi obtido um ângulo de torção, correspondente ao momento dado, de valor $\phi = 8,18^\circ$. O ângulo de torção ϕ' , segundo o qual gira o eixo no descarregamento, é obtido da Equação 3.16. Substituindo os dados

$$T = 4,60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \quad L = 1,2 \text{ m} \quad G = 80 \times 10^9 \text{ Pa}$$

e o valor de J encontrado no Ex. 3.8, temos

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4,60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1,2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(80 \times 10^9 \text{ Pa})} = 112,4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

ou

$$\phi' = (112,4 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 6,44^\circ$$

O ângulo de torção permanente é, então,

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8,18^\circ - 6,44^\circ = 1,74^\circ$$

b) **Tensões residuais.** Sabemos pelo Ex. 3.8 que a tensão de escoamento é $\tau_e = 150 \text{ MPa}$ e que o raio do núcleo elástico correspondente ao momento dado é $\rho_e = 15,8 \text{ mm}$. A distribuição de tensões no eixo carregado é aquela mostrada na Fig. 3.43a.

Para descarregar o eixo, aplicamos o momento torçor de sentido oposto, de valor 4,6 kN·m, para o qual a distribuição de tensões é linear (Fig. 3.43b). A máxima tensão na distribuição obtida no descarregamento é dada pela Equação 3.8:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4,60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 187,3 \text{ MPa}$$

Superpondo as duas distribuições de tensões, obtemos as tensões residuais, indicadas na Fig. 3.43c. Verificamos aí que, embora a máxima tensão na fase de descarregamento tenha excedido a tensão de escoamento τ_e , a hipótese de distribuição linear das tensões nessa fase é válida, pois não foi ultrapassado o valor $2\tau_e$.

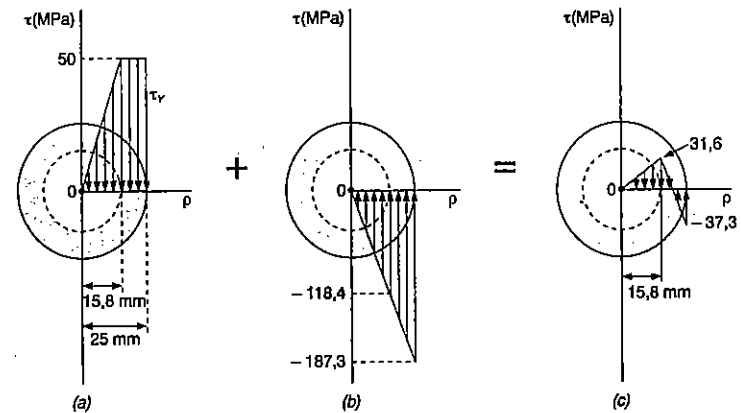
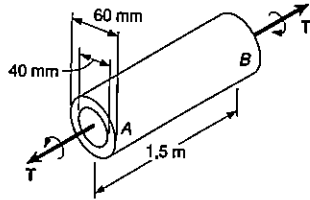


Fig. ex.3.43

PROBLEMA RESOLVIDO 3.7

O eixo AB é feito de aço doce, que é adotado como sendo elastoplástico, com $G = 80 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 150 \text{ MPa}$. Um momento de torção T é aplicado ao eixo, e sua intensi-

dade é aumentada gradualmente. Determinar a intensidade T do momento torçor e o correspondente ângulo de torção: (a) quando inicia o escoamento; (b) quando toda a seção se encontrar plastificada.



a) Início do escoamento. Para $\tau_{m\acute{a}x} = \tau_e = 150 \text{ MPa}$, teremos

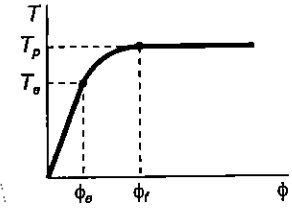
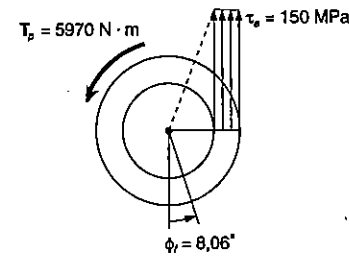
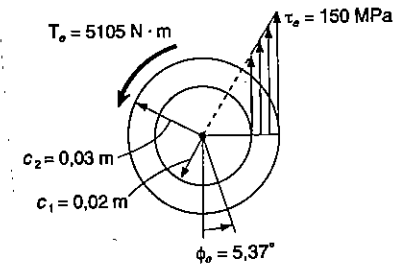
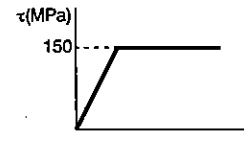
$$T_e = \frac{\tau_e J}{c_2} = \frac{(150 \text{ MPa}) \frac{\pi}{2} (0,030^4 - 0,020^4)}{0,030 \text{ m}}$$

$$T_e = 5105 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Fazendo, na Equação 3.2, $\rho = c_2$ e $\gamma = \gamma_e$ obtemos ϕ_e :

$$\phi_e = \frac{\gamma_e L}{c_2} = \frac{\tau_e L}{c_2 G} = \frac{(150 \text{ MPa})(1,5 \text{ m})}{(0,030 \text{ m})(80 \text{ GPa})} = 0,0937 \text{ rad}$$

$$\phi_e = 5,37^\circ$$



b) Seção totalmente plastificada. Quando a zona plastificada atinge a superfície interna, as tensões são uniformemente distribuídas como indicado. Usando a Equação 3.26, temos

$$T_p = 2\pi\tau_e \int \rho^2 d\rho = 2\pi(150 \text{ MPa}) \int_{0,020}^{0,030} \rho^2 d\rho$$

$$T_p = 5970 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Quando ocorre o escoamento na superfície interna, a deformação é totalmente plástica; da Equação 3.2 vem

$$\phi_f = \frac{\gamma_e L}{c_1} = \frac{\tau_e L}{c_1 G} = \frac{(150 \text{ MPa})(1,5 \text{ m})}{(0,020 \text{ m})(80 \text{ GPa})} = 0,1406 \text{ rad}$$

$$\phi_f = 8,06^\circ$$

Para valores maiores do ângulo de torção, o momento se mantém constante; o diagrama $T - \phi$ do eixo está indicado na figura.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.8

Determinar, para o eixo do problema resolvido 3.7, as tensões residuais e o ângulo de torção permanente após o momento torçor $T_p = 5970 \text{ N} \cdot \text{m}$ ter sido removido.

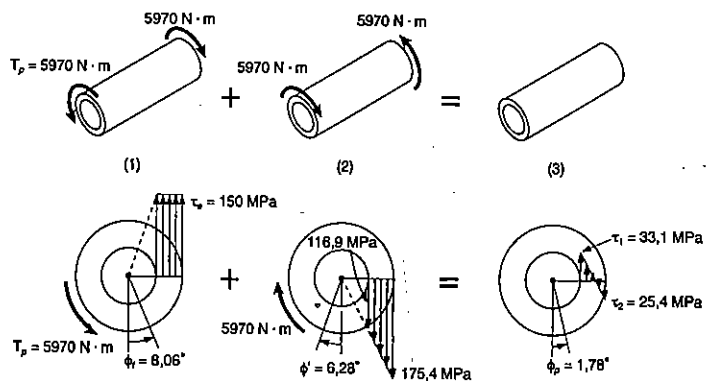
Solução. Voltando ao Prob. 3.7, vemos que para a seção totalmente plastificada o momento torçor era $T_p = 5970 \text{ N} \cdot \text{m}$ e que o ângulo de torção correspondente era $\phi_f = 8,06^\circ$. Estes valores são mostrados na Fig. 1.

Descarregamento. Durante a fase de retirada do momento, o comportamento do material é linear, enquanto se aplica ao eixo o momento de $5970 \text{ N} \cdot \text{m}$ em sentido contrário (Fig. 2). Ocorrem, nessa fase, as seguintes tensões e ângulo de torção:

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(5970 \text{ N} \cdot \text{m})(1,5 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0,030^4 - 0,020^4)(80 \text{ GPa})} = 0,1096 \text{ rad} = 6,28^\circ$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} = \frac{(0,5970 \text{ N} \cdot \text{m})(0,030 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0,030^4 - 0,020^4)} = 175,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{mín}} = \tau_{\text{máx}} \frac{c_1}{c_2} = (175,4 \text{ MPa}) \frac{0,020 \text{ m}}{0,030 \text{ m}} = 116,9 \text{ MPa}$$



Tensões residuais e ângulo de torção permanente. Os efeitos do carregamento e do descarregamento são superpostos, para a obtenção das tensões residuais e do ângulo de torção permanente ϕ_p .

PROBLEMAS

3.76 O eixo maciço mostrado é de um aço doce o qual se considera elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. Determinar a máxima tensão de cisalhamento e o raio do núcleo elástico, devido à aplicação de um torque de intensidade: (a) $T = 11,36 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $T = 15,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

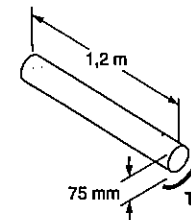


Fig. P3.76

3.77 O eixo sólido mostrado é de um aço doce o qual se considera ser elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. Determinar a máxima tensão de cisalhamento e o raio do núcleo elástico, devido à aplicação de um torque de intensidade: (a) $T = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$; (b) $T = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$.

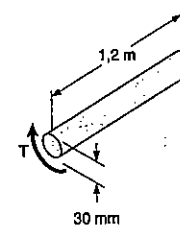


Fig. P3.77 e Fig. P3.78

3.78 O eixo maciço mostrado é de um aço doce o qual se considera ser elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. Determinar a intensidade do torque T , para que o raio do núcleo elástico seja: (a) $7,5 \text{ mm}$; (b) 5 mm .

3.79 Para o eixo maciço do Prob. 3.76, determinar a intensidade do torque T , para que a zona plástica tenha: (a) 6,35 mm de profundidade; (b) 19 mm de profundidade.

3.80 Para o eixo maciço do Prob. 3.76, determinar o ângulo de torção causado pela aplicação de um torque T de intensidade: (a) $9 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $T = 14,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

3.81 Para o eixo maciço do Prob. 3.77, determinar o ângulo de torção causado pela aplicação de um torque de intensidade: (a) $T = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$; (b) $T = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$.

3.82 Para o eixo maciço do Prob. 3.77, determinar: (a) a intensidade do torque T necessário para torcer o eixo, de um ângulo de 15° ; (b) o raio do correspondente núcleo elástico.

3.83 Um eixo maciço de 0,9 m tem um diâmetro de 63,5 mm e é feito de um aço doce o qual se considera ser elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. Determinar o torque necessário para torcer o eixo, de um ângulo de: (a) $2,5^\circ$; (b) 5° .

3.84 O eixo vazado mostrado é feito de um aço doce, o qual se considera ser elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. Determinar a intensidade T do torque e o correspondente ângulo de torção: (a) quando inicia o escoamento; (b) quando a zona plástica tem 10 mm de profundidade.

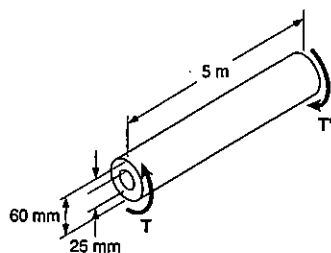


Fig. P3.84

3.85 Para o eixo do Prob. 3.84, determinar: (a) o ângulo de torção, quando o eixo se torna totalmente plástico; (b) a correspondente intensidade do torque T . Esboce a curva $T-\phi$ para o eixo.

3.86 Uma barra de aço é usinada no feito mostrado, constituindo um eixo com a forma de um tronco de cone, no qual torques de intensidade $T = 8,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ são aplicados. Considerando que o aço é elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$, determinar: (a) o raio do núcleo elástico na porção AB do eixo; (b) o comprimento da porção CD que permanece completamente elástico.

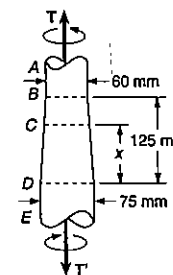


Fig. P3.86

3.87 Se os torques aplicados ao eixo com forma de tronco de cone do Prob. 3.86 são gradualmente aumentados, determinar: (a) a intensidade T do maior torque que pode ser aplicado ao eixo; (b) o comprimento da porção CD que permanece completamente elástico.

3.88 Considerando o eixo parcialmente plástico da Fig. 3.37c; desenvolva a Equação (3.32), lembrando que a integral da Equação (3.26) representa o momento estático de área em relação ao eixo τ , da área sob a curva $\tau-\gamma$.

3.89 Uma barra de alumínio de 40 mm de diâmetro está sujeita a um torque que produz na barra uma deformação específica de cisalhamento de 0,008. Usando o diagrama $\tau-\gamma$ mostrado, para esta liga de alumínio, determinar: (a) a intensidade do torque; (b) o ângulo de torção para uma barra de 750 mm de comprimento.

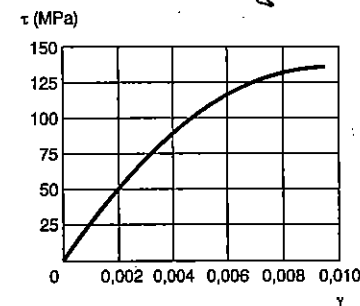


Fig. P3.89 e Fig. P3.92

3.90 Uma barra maciça de latão de 30 mm de diâmetro está sujeita a um torque que produz uma tensão de cisalhamento máxima de 93 MPa na barra. Usando o diagrama $\tau-\gamma$ mostrado para o latão usado, determinar: (a) a intensidade do torque aplicado à barra; (b) a máxima tensão de cisalhamento na barra.

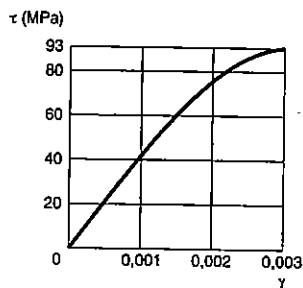


Fig. P3.90 e Fig. P3.91

3.91 Uma barra maciça de latão de 20 mm de diâmetro e 760 mm de comprimento é torcida de um ângulo de 10° . Usando o diagrama τ - γ mostrado para o latão em questão, determinar: (a) a intensidade do torque aplicado à barra; (b) a máxima tensão de cisalhamento na barra.

3.92 Um eixo vazado de diâmetros interno e externo iguais a 20 mm e 50 mm, respectivamente, é fabricado de uma liga de alumínio, cujo diagrama τ - γ é mostrado. Determinar: (a) o torque necessário para torcer um eixo de 600 mm de comprimento, de um ângulo de 10° ; (b) o correspondente valor da máxima tensão de cisalhamento no eixo.

3.93 e 3.94 A curva mostrada na Fig. P3.89 e P3.92 pode ser aproximada pela relação

$$\tau = 27,8 \times 10^9 \gamma - 1,390 \times 10^{12} \gamma^2$$

Usando esta relação e as Equações (3.2) e (3.26) resolver o problema indicado.

3.93 Prob. 3.89

3.94 Prob. 3.92

3.95 O eixo maciço mostrado é feito de um aço doce, que é considerado ser elasto-plástico com $G = 77$ GPa e $\tau_e = 145$ MPa. Sabendo-se que um torque T de $980 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado ao eixo, e depois removido, determinar: (a) a máxima tensão residual de cisalhamento; (b) a tensão residual de cisalhamento na superfície do eixo.

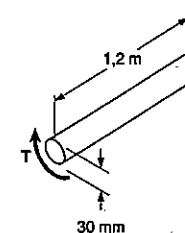


Fig. P3.95 e P3.96

3.96 O eixo maciço mostrado é feito de um aço doce, que é considerado ser elasto-plástico com $G = 77$ GPa e $\tau_e = 145$ MPa. O torque T é aumentado até que o raio do núcleo elástico atinja 6,25 mm, e é então removido. Determine: (a) a máxima tensão residual de cisalhamento; (b) a tensão residual de cisalhamento na superfície do eixo.

3.97 O eixo maciço mostrado é feito de um aço doce, que é considerado ser elasto-plástico com $G = 77$ GPa e $\tau_e = 145$ MPa. Sabendo-se que um torque de $15,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado ao eixo e então removido, determine a intensidade e onde ocorre a máxima tensão residual de cisalhamento no eixo.

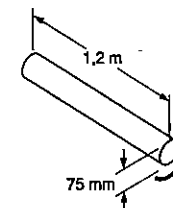


Fig. P3.97 e P3.98

3.98 O eixo maciço mostrado é feito de um aço doce, que é considerado ser elasto-plástico com $G = 77$ GPa e $\tau_e = 145$ MPa. O torque T é aumentado até que o eixo tenha sido torcido de $5,5^\circ$, e é então removido. Determine a intensidade e onde ocorre a máxima tensão residual de cisalhamento no eixo.

3.99 No Prob. 3.95, determinar o ângulo de torção permanente (residual) no eixo.

3.100 No Prob. 3.96, determinar o ângulo de torção permanente no eixo.

3.101 No Prob. 3.97, determinar o ângulo de torção permanente no eixo.

3.102 No Prob. 3.98, determinar o ângulo de torção permanente no eixo.

3.103 O eixo vazado mostrado é feito de um aço doce, que é considerado ser elasto-plástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. A intensidade dos torques T é lentamente aumentada, até que a zona plástica atinja a superfície interna do eixo, quando então estes são removidos. Determinar: (a) a intensidade e onde ocorre a máxima tensão residual de cisalhamento; (b) o ângulo de torção permanente.

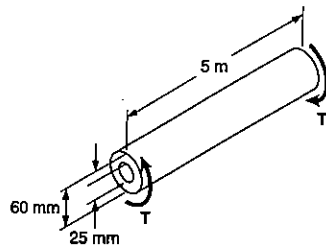


Fig. P3.103

3.104 O eixo vazado mostrado é feito de um aço doce que é considerado ser elasto-plástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_e = 145 \text{ MPa}$. A intensidade T do torque é lentamente aumentada, até que a zona plástica atinja a superfície interna do eixo, quando então é removida. Determinar: (a) a intensidade e onde ocorre a máxima tensão residual de cisalhamento; (b) o ângulo de torção permanente.

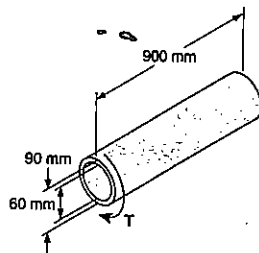


Fig. P3.104

3.105 Depois do eixo maciço do Prob. 3.98 ter sido carregado e descarregado, como descrito no problema, um torque T_1 , de sentido oposto ao torque original T , é aplicado ao eixo. Considerando que o valor de τ_e não varia, determinar o ângulo de torção ϕ_1 , para que o escoamento se inicie neste segundo carregamento e compará-lo com o ângulo ϕ_e , que representa o início do escoamento do eixo no carregamento original.

3.106 Depois do eixo maciço do Prob. 3.96 ter sido carregado e descarregado, como descrito no problema, um torque T_1 , de sentido oposto ao torque original T , é aplicado

ao eixo. Considerando que o valor de τ_e não varia, determinar a intensidade de T_1 necessário para iniciar o escoamento, neste segundo carregamento, e compará-lo com a intensidade T_e do torque T , que primeiro causa o escoamento, no carregamento original.

3.107 Um torque T aplicado a uma barra maciça feita de um material elasto-plástico é aumentado até que a barra se torne completamente plástica, e então é removido: (a) mostrar que a distribuição de tensões residuais são as representadas na figura; (b) determinar a intensidade do torque, devido às tensões atuantes na torção da barra localizada dentro de um círculo de raio c_0 .

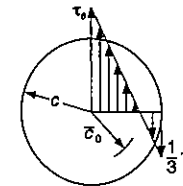


Fig. P3.107

*3.12 TORÇÃO EM BARRAS DE SEÇÃO NÃO-CIRCULAR

As fórmulas deduzidas nas Secs. 3.3 e 3.4, para a determinação das tensões e distribuição das deformações provocadas por carregamento torcional, são válidas apenas para eixos de seção circular. De fato, na dedução das expressões, foi estabelecido que as seções transversais permanecem planas após a deformação e mantêm sua forma. Vimos no item 3.3 que essa hipótese depende da *axissimetria* da barra, quer dizer, depende do fato de que a aparência da barra é a mesma, quando ela é observada de certo ponto, e sofre uma rotação em torno do seu eixo, de qualquer ângulo.

Uma barra de seção quadrada, por sua vez, mantém a mesma aparência somente se girar a 90° ou 180° . Seguindo o mesmo raciocínio que fizemos no item 3.3, podemos mostrar que as diagonais da seção transversal da barra, bem como as linhas que ligam os pontos médios dos lados, se conservam linhas retas (Fig. 3.44). No entanto, qualquer outra linha se deformará quando a barra for torcida, devido à falta de axissimetria, e a própria seção transversal sairá do seu plano original.

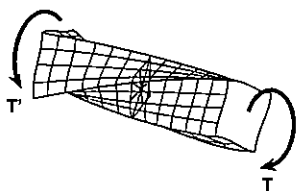


Fig. 3.44

Segue-se, então, que as Equações 3.4 e 3.6, que definem a distribuição de deformações e tensões em um eixo circular de material elástico, não podem ser usadas para seções não-circulares. Assim, seria errado adotar, para uma barra de seção quadrada, uma distribuição de tensões linear a partir do eixo da barra, variando com a distância ao centro da seção, que levassem a um máximo de tensões nos vértices do quadrado. Como veremos agora, as tensões de cisalhamento são, na verdade, nulas nesses pontos.

Consideremos um cubo elementar situado no vértice de seção transversal de uma barra quadrada submetida à torção, e adotemos um sistema de eixos coordenados paralelo às arestas do elemento (Fig. 3.45a). A face do cubo que é perpendicular ao eixo y está na superfície da barra, de modo que as tensões nessa face devem ser nulas. Observando a Fig. 3.45b, escrevemos

$$\tau_{yx} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (3.40)$$

Pela mesma razão, as tensões na face do elemento perpendicular ao eixo z também são nulas, e escrevemos

$$\tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0 \quad (3.41)$$

Segue-se, das primeiras expressões das Equações 3.40 e 3.41, que

$$\tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad (3.42)$$

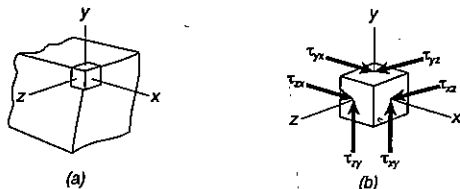


Fig. 3.45

Assim, as duas componentes de tensões na face perpendicular ao eixo da barra também são nulas. Concluimos, desse modo, que não ocorrem tensões nos vértices da seção transversal da barra.

Quando se torce um modelo de borracha, com forma de uma barra de seção transversal quadrada, pode-se notar facilmente que não ocorrem deformações – nem tensões – nas arestas da barra, enquanto as maiores deformações – e as maiores tensões – ocorrem ao longo da parte central de cada face (Fig. 3.46).

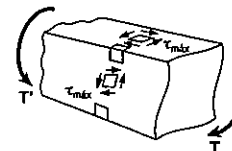


Fig. 3.46

A determinação das tensões nas barras não-circulares submetidas à torção está além do alcance deste texto. Por conveniência, indicaremos aqui alguns resultados da teoria da elasticidade, para o caso de barras de eixo reto, com seção retangular constante⁶. Tomando a barra da Fig. 3.47, com comprimento L e lados a e b (respectivamente o lado maior e o lado menor), que está submetida ao torque T , vemos que as maiores tensões de cisalhamento ocorrem ao longo da linha central da face mais larga da barra, e seu valor é dado por

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{c_1 ab^2} \quad (3.43)$$

O ângulo de torção, por sua vez, pode ser expresso por

$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} \quad (3.44)$$

Os coeficientes c_1 e c_2 , dados na Tabela 3.1, dependem somente da relação a/b . Devemos notar que as Equações 3.43 e 3.44 são válidas apenas em regime elástico.

⁶ Ver S. P. Timoshenko e J. N. Goodier, *Teoria da Elasticidade*, 3ª ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 1970. Sec. 109.

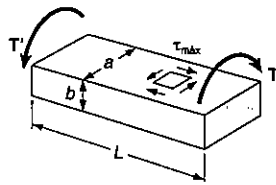


Fig. 3.47

Tabela 3.1 Coeficientes para a torção de barras retangulares.

a/b	c ₁	c ₂
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

A distribuição das tensões de cisalhamento em barras de seção não-circular pode ser visualizada mais facilmente usando a analogia da membrana. Essa analogia consiste no seguinte fato: uma membrana elástica e homogênea, presa a uma moldura rígida, e submetida a pressão uniforme em uma de suas faces, sofre deformações que podem ser determinadas pela solução de equações diferenciais a derivadas parciais. Essas mesmas equações devem ser solucionadas para a determinação das tensões de cisalhamento na barra não-circular⁷. De modo mais específico, sendo Q um ponto da seção transversal da barra e Q' o ponto correspondente na membrana (Fig. 3.48), a tensão de cisalhamento τ no ponto Q tem a direção da tangente horizontal à membrana no ponto Q' . A intensidade da tensão será proporcional à máxima declividade da membrana em Q' ⁸. Além disso, o torque aplicado é proporcional ao volume limitado pela membrana e pelo plano da moldura fixa. No caso da membrana da Fig. 3.48, que

7 Ver S. P. Timoshenko e J. N. Goodier, *Teoria da Elasticidade*, cit., Sec. 107.

8 Declividade medida na direção perpendicular à tangente horizontal em Q' .

é presa a uma moldura retangular, a maior declividade ocorre no ponto N' , ponto médio do lado maior da moldura. Assim, vemos que a maior tensão de cisalhamento em barras de seção retangular ocorre no ponto médio N do lado maior da seção.

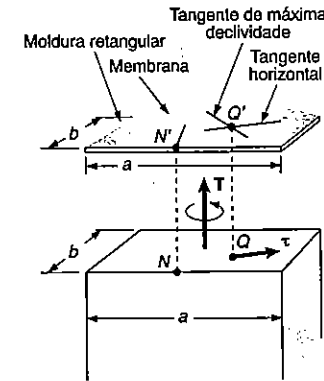


Fig. 3.48

A analogia da membrana pode ser usada para visualizar as tensões de cisalhamento em qualquer barra de eixo reto e de seção transversal não-circular. Em particular, vamos considerar várias barras de paredes finas, com seção transversal indicada na Fig. 3.49, sujeitas ao mesmo torque. Usando a analogia da membrana para auxiliar na visualização das tensões de cisalhamento, vemos que, sendo o mesmo o valor do torque em cada barra, será o mesmo o volume sob cada membrana. A máxima declividade será então aproximadamente a mesma em cada caso. Concluímos então que para barras de paredes finas, de espessura constante, a máxima tensão de cisalhamento tem o mesmo valor que a tensão máxima em uma barra retangular de valor a/b alto, podendo então ser determinada pela Equação 3.43 com $c_1 = 0,333$ ⁹. A forma da seção transversal da barra de paredes finas não tem importância para a conclusão acima.

9 Podemos mostrar também que o ângulo de torção pode ser determinado pela Equação 3.44 com $c_2 = 0,333$.

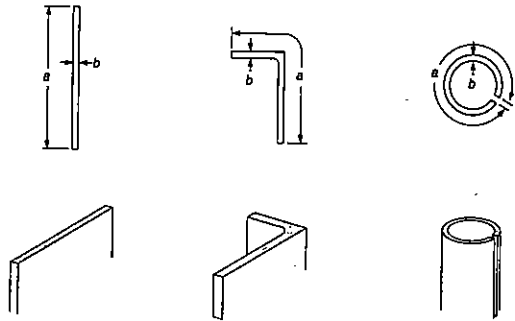


Fig. 3.49

*3.13 EIXOS VAZADOS DE PAREDES FINAS

No item anterior, vimos que a determinação das tensões de cisalhamento em barras de seção não-circular exige a aplicação da teoria matemática da elasticidade. No entanto, quando a barra de seção não-circular tem paredes finas, pode-se conseguir uma boa aproximação no valor das tensões através de cálculos simples.

Consideremos uma barra cilíndrica vazada de seção não-circular submetida a uma carga torcional (Fig. 3.50)¹⁰. Vamos supor que a espessura t da parede permanece com valor pequeno em comparação às dimensões do eixo, mesmo sofrendo variações de uma seção transversal para outra.

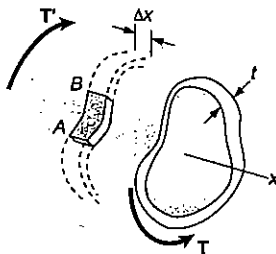


Fig. 3.50

¹⁰ A parede do eixo deve ser uma curva simples fechada. Em outras palavras, a barra deve ser topologicamente equivalente a um eixo circular vazado.

Vamos destacar da parede da barra uma porção AB , limitada por dois planos transversais distanciados de Δx , e por dois planos longitudinais à parede. Como a porção AB está em equilíbrio, a soma das forças que se exercem sobre ela, na direção do eixo x , deve ser nula (Fig. 3.51). As únicas forças atuantes são as forças tangentes F_A e F_B aplicadas nas pontas da porção AB . Escrevemos então

$$\Sigma F_x = 0: \quad F_A - F_B = 0 \quad (3.45)$$

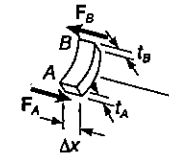


Fig. 3.51

Podemos expressar F_A como o produto da área da face A pela tensão de cisalhamento nela atuante. A área da face é $t_A \Delta x$ e a tensão é τ_A . Assim:

$$F_A = \tau_A (t_A \Delta x) \quad (3.46)$$

A tensão de cisalhamento não depende da coordenada x do ponto considerado, mas pode ser variável ao longo da espessura da parede; τ_A representa a tensão média de cisalhamento ao longo da espessura t . Exprimindo agora F_B em termos de τ_B e substituindo F_A e F_B na Equação 3.45, escrevemos

$$\begin{aligned} \tau_A (t_A \Delta x) - \tau_B (t_B \Delta x) &= 0 \\ \tau_A t_A &= \tau_B t_B \end{aligned} \quad (3.47)$$

A Equação 3.47 exprime o fato de que o produto $\tau \cdot t$, entre a tensão de cisalhamento e a espessura da parede é constante ao longo da barra, uma vez que A e B foram escolhidos arbitrariamente. Chamando este produto de q , temos

$$q = \tau t = \text{constante} \quad (3.48)$$

Vamos agora separar um pequeno elemento da porção AB (Fig. 3.52). As faces superior e inferior desse elemento fazem parte da superfície da barra, e nelas a tensão é nula. Lembrando as relações (1.18) e (1.19) do item 1.7, podemos dizer que as componentes de tensão indicadas nas outras faces, por setas tracejadas, também são nulas, enquanto aquelas representadas por setas em linha cheia são iguais entre si.

Desse modo, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal de uma barra de seção vazada é paralela à superfície da parede (Fig. 3.53) e seu valor médio calculado ao longo da espessura da parede satisfaz a Equação 3.48.

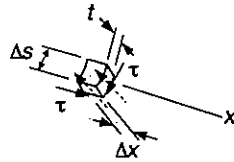


Fig. 3.52

Neste ponto do estudo, vamos fazer uma analogia entre a distribuição de tensões de cisalhamento τ na seção transversal de uma barra vazada e a distribuição das velocidades v de uma corrente de água em um canal em curva fechada, que tem profundidade constante e largura variável. Enquanto a velocidade v varia de ponto a ponto do canal, em função da largura t em cada trecho, o fluxo de água, $q = vt$, permanece constante ao longo de todo o canal, do mesmo modo que o produto $\tau \cdot t$ na Equação 3.48. Devido a esta analogia, o produto $q = \tau \cdot t$ é chamado *fluxo de cisalhamento* na parede do eixo vazado.

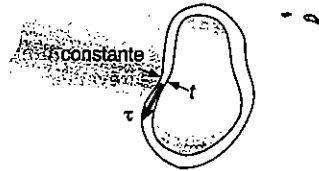


Fig. 3.53

Vamos deduzir agora uma relação entre o momento torçor T aplicado a um eixo de seção vazada e o fluxo de cisalhamento na parede do eixo. Vamos considerar um pequeno elemento da seção da parede, de comprimento ds (Fig. 3.54). A área do elemento é $dA = t \cdot ds$, e a intensidade do esforço interno dF que se exerce no elemento é

$$dF = \tau dA = \tau(t ds) = (\tau t) ds = q ds \quad (3.49)$$

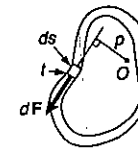


Fig. 3.54

O momento dM_O da força em relação a um ponto genérico O da parte vazada do eixo é calculado multiplicando-se dF pela distância p de O até a linha de ação de dF . Temos

$$dM_O = p dF = p(q ds) = q(p ds) \quad (3.50)$$

Mas o produto $p ds$ é igual ao dobro da área $d\alpha$ do triângulo sombreado em Fig. 3.55. Temos assim

$$dM_O = q(2 d\alpha) \quad (3.51)$$

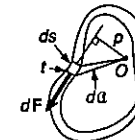


Fig. 3.55

Na Equação 3.51, a integral do primeiro membro, estendida a toda a seção transversal, representa a soma dos momentos dos esforços internos elementares nessa seção. Essa soma é igual ao momento de torção T aplicado à barra de seção vazada, e podemos escrever

$$T = \int dM_O = \int q(2d\alpha)$$

Como o fluxo de cisalhamento é constante, escrevemos

$$T = 2q\alpha \quad (3.52)$$

onde α é a área limitada pela linha central da seção transversal da parede (Fig. 3.56).

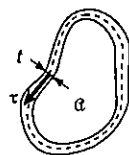


Fig. 3.56

A tensão de cisalhamento em qualquer ponto da parede pode ser determinada em termos do momento torçor T , substituindo q de (3.48) em (3.52) e determinando o valor de τ :

$$\tau = \frac{T}{2t\alpha} \quad (3.53)$$

Nessa expressão, t é a espessura da parede no ponto em estudo e α é a área limitada pela linha central da parede. Lembramos aqui que τ representa um valor médio da tensão de cisalhamento através da parede. De qualquer forma, para deformações em regime elástico, a distribuição de tensões pode ser adotada como uniforme, e a Equação 3.53 leva à tensão de cisalhamento real em qualquer ponto da seção.

O ângulo de torção de um eixo de paredes finas pode ser determinado aplicando-se os métodos de energia (Capítulo 10). Adotando deformação elástica, podemos provar¹¹ que o ângulo de torção de um eixo de paredes finas de comprimento L e módulo de elasticidade transversal G é

$$\phi = \frac{TL}{4\alpha^2 G} \oint \frac{ds}{t} \quad (3.54)$$

onde a integral é calculada ao longo da linha central da parede.

EXEMPLO 3.10

Um tubo de alumínio de seção retangular de 60×100 mm foi fabricado por extrusão. Determinar a tensão de cisalhamento em cada uma das quatro paredes do tubo, quando este fica submetido a um momento de torção de $3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, adotando: (a) espessura da parede constante, de 4 mm (Fig. 3.57a); (b) que, por defeito no processo de fabricação, as paredes AB e AC são de 3 mm de espessura, e as paredes BD e CD são de 5 mm (Fig. 3.57b).

¹¹ V. Prob. 10.92.

a) **Tubo de parede com espessura uniforme.** A área limitada pela linha central é (Fig. 3.58)

$$\alpha = (96 \text{ mm})(56 \text{ mm}) = 5,376 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Sendo a espessura em cada parede de valor $t = 4$ mm, encontramos, pela Equação 3.53, a tensão de cisalhamento em cada lado do tubo, como sendo

$$\tau = \frac{T}{2t\alpha} = \frac{3 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{2(4 \times 10^{-3} \text{ m})(5,376 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 69,8 \text{ MPa}$$

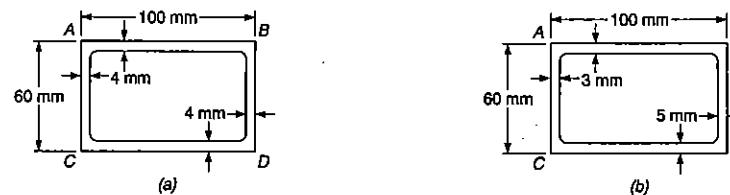


Fig. ex.3.57

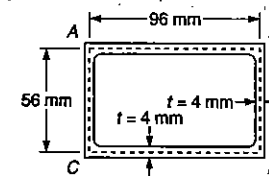


Fig. ex.3.58

b) **Tubo com paredes de espessura variável.** A área limitada pela linha central é a mesma da parte anterior. Substituindo na Equação 3.53 as várias espessuras dadas, obtemos

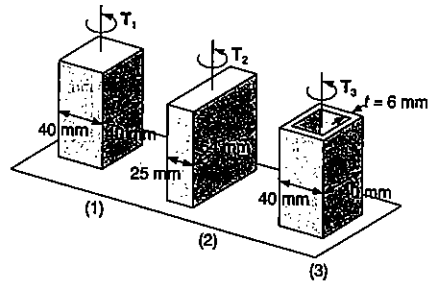
$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{3 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{2(3 \times 10^{-3} \text{ m})(5,376 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 93,0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{3 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{2(5 \times 10^{-3} \text{ m})(5,376 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 55,8 \text{ MPa}$$

A tensão em cada parede depende, então, da respectiva espessura.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.9

Determinar o maior valor de momento torçor que pode ser aplicado a cada uma das barras de latão indicadas, adotando $\tau_{adm} = 40 \text{ MPa}$. Notar que as duas barras maciças têm a mesma área de seção transversal, enquanto a barra quadrada e o tubo de seção quadrada têm as mesmas dimensões externas.



1. Barra de seção quadrada. Para uma barra de seção maciça, a máxima tensão de cisalhamento é dada pela Equação 3.43, no caso de seção retangular:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$

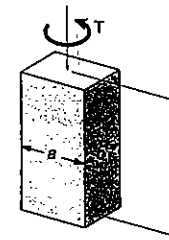
onde o coeficiente c_1 é obtido da Tab. 3.1. Temos

$$a = b = 0,040 \text{ m} \quad \frac{a}{b} = 1,00 \quad c_1 = 0,208$$

$\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{adm} = 40 \text{ MPa}$, temos

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T_1}{c_1 ab^2} \quad 40 \text{ MPa} = \frac{T_1}{(0,208)(0,040)^3}$$

$$T_1 = 532 \text{ N} \cdot \text{m}$$



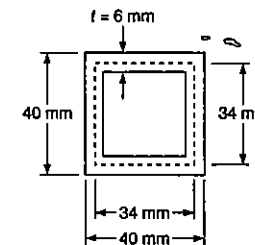
2. Barra com seção retangular. Temos agora

$$a = 0,064 \text{ m} \quad b = 0,025 \text{ m} \quad a/b = 2,56$$

Interpolando na Tab. 1.3: $c_1 = 0,259$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T_2}{c_1 ab^2} \quad 40 \text{ MPa} = \frac{T_2}{(0,259)(0,064 \text{ m})(0,025)^2}$$

$$T_2 = 414 \text{ N} \cdot \text{m}$$



3. Tubo quadrado. Para um tubo de parede fina, com espessura t , a tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau = \frac{T}{2tG}$$

onde G é a área limitada pela linha central da parede. Temos

$$G = (0,034 \text{ m})(0,034 \text{ m}) = 1,156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Tomando para τ o valor $\tau_{adm} = 40 \text{ MPa}$ e para t o valor de $0,006 \text{ m}$, encontramos o momento torçor admissível

$$\tau = \frac{T}{2tG} \quad 40 \text{ MPa} = \frac{T_3}{2(0,006 \text{ m})(1,156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}$$

$$T_3 = 555 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PROBLEMAS

3.108 Cada uma das duas barras de alumínio mostradas está sujeita a um torque de intensidade $T = 1800 \text{ N} \cdot \text{m}$. Sabendo-se que $G = 26 \text{ GPa}$, determinar para cada barra a máxima tensão de cisalhamento e o ângulo de torção em B .

3.109 Determinar o maior torque T que pode ser aplicado a cada uma das duas barras de alumínio mostradas, e o correspondente ângulo de torção em B , sabendo-se que $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$ e $G = 26 \text{ GPa}$.

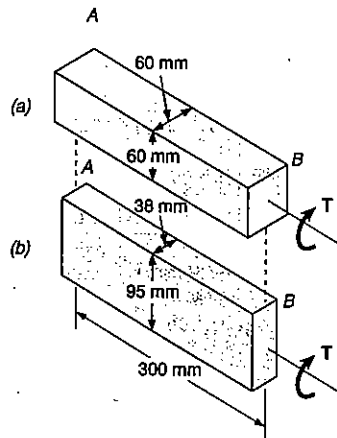


Fig. P3.108 e Fig. P3.109

3.110 Determinar o maior torque T que pode ser aplicado a cada uma das barras de latão mostradas, e o correspondente ângulo de torção em B , sabendo-se que $\tau_{adm} = 80 \text{ MPa}$ e $G = 39 \text{ GPa}$.

3.111 Cada uma das duas barras de latão mostradas está sujeita a um torque de intensidade $= 1,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Sabendo-se que $G = 39 \text{ GPa}$, determinar para cada barra a máxima tensão de cisalhamento e o ângulo de torção em B .

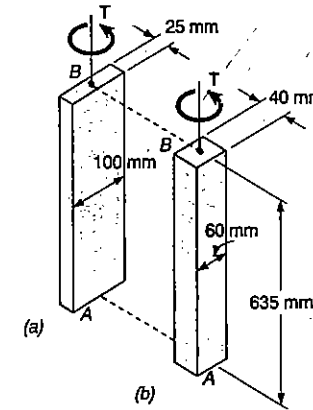


Fig. P3.110 e Fig. P3.111

3.112 Cada uma das três barras de aço mostradas está sujeita a um torque de intensidade $T = 275 \text{ N} \cdot \text{m}$. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é 50 MPa , determinar a dimensão b necessária para cada barra.

3.113 Cada uma das três barras de aço mostradas está sujeita a um torque de intensidade $T = 565 \text{ N} \cdot \text{m}$. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é 55 MPa , determinar a dimensão b necessária para cada barra.

3.114 Cada uma das três barras de alumínio mostradas deve ser torcida de um ângulo de $1,25^\circ$. Sabendo-se que: $b = 38 \text{ mm}$; $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$ e $G = 26 \text{ GPa}$, determinar o menor comprimento de cada barra.

3.115 Cada uma das três barras de alumínio mostradas deve ser torcida de um ângulo de 2° . Sabendo-se que: $b = 30 \text{ mm}$; $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$ e $G = 26 \text{ GPa}$, determinar o menor comprimento de cada barra.

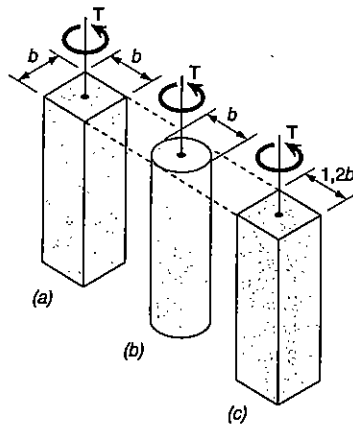


Fig. P3.112, Fig. P3.113, Fig. P3.114 e Fig. P3.115

3.116 Os eixos *A* e *B* são feitos de mesmo material e têm a mesma área de seção transversal; porém, o eixo *A* tem seção circular enquanto que o *B* tem seção quadrada. Determinar a relação entre as máximas tensões de cisalhamento, que ocorrem em *A* e *B*, respectivamente, quando os dois eixos são submetidos ao mesmo torque ($T_A = T_B$). Assumir que ambas as deformações sejam elásticas.

3.117 Os eixos *A* e *B* são feitos de mesmo material e têm a mesma área de seção transversal; porém, o eixo *A* tem uma seção circular e *B* tem uma seção quadrada. Determinar a relação entre os máximos torques T_A e T_B que podem ser aplicados, com segurança, em *A* e *B*, respectivamente.

3.118 Os eixos *A* e *B* são feitos de mesmo material e têm a mesma área de seção transversal; porém, *A* tem seção circular e *B* tem seção quadrada. Determinar a relação entre os máximos ângulos de torção ϕ_A e ϕ_B , que os eixos *A* e *B*, respectivamente, podem suportar com segurança.

3.119 Os eixos *A* e *B* são feitos de mesmo material e têm a mesma área de seção transversal; porém, o eixo *A* tem seção circular; enquanto que o eixo *B* tem seção quadrada. Determinar a relação entre os ângulos ϕ_A e ϕ_B , que os eixos *A* e *B*, respectivamente, podem suportar quando estão sujeitos ao mesmo torque ($T_A = T_B$). Assumir que ambas as deformações sejam elásticas.

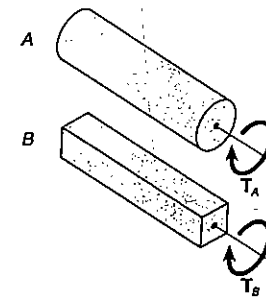


Fig. P3.116, Fig. P3.117, Fig. P3.118 e Fig. P3.119

3.120 Um perfil cantoneira L203 × 152 × 12,7 de aço, com 3 m de comprimento, tem uma espessura da seção de 12,7 mm e área da seção transversal de 4350 mm², conforme Apêndice C. Sabendo-se que $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$, $G = 77 \text{ MPa}$, e desprezando-se o efeito da concentração de tensões, determinar: (a) o maior torque *T*, que pode ser aplicado; (b) o correspondente ângulo de torção.

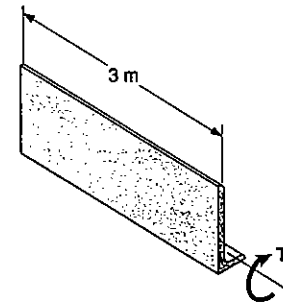


Fig. P3.120

3.121 Um torque de 4 kN · m é aplicado a um perfil cantoneira L203 × 203 × 25,4 de aço, cuja espessura da seção é de 25,4 mm e área da seção transversal de 9680 mm², conforme Apêndice C. Sabendo-se que $G = 77 \text{ GPa}$, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento ao longo da linha *a-a*; (b) o ângulo de torção.

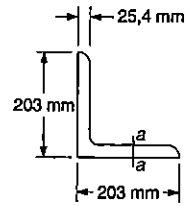


Fig. P3.121

3.122 Um perfil estrutural de aço de 3,65 m de comprimento com seção transversal W310 × 107 está sujeito a um torque de 4,5 kN·m. Sabendo-se que $G = 77$ GPa e de conformidade com as dimensões da seção transversal do Apêndice C, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento ao longo da linha $a-a$; (b) a máxima tensão de cisalhamento ao longo da linha $b-b$; (c) o ângulo de torção. (Sugestão: Considerar a alma e as abas separadamente e obter uma relação entre os torques exercidos sobre a alma e sobre uma aba, respectivamente, lembrando que os ângulos de torção resultantes são iguais.)

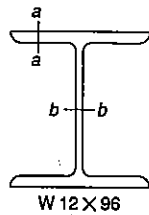


Fig. P3.122

3.123 Um perfil estrutural de aço de 4 m de comprimento tem seção transversal W310 × 60. Sabendo-se que $G = 77$ GPa e que a máxima tensão de cisalhamento não pode exceder 40 MPa, determinar: (a) o maior torque T que pode ser aplicado; (b) o correspondente ângulo de torção. Consultar o Apêndice C para as dimensões da seção transversal e desprezar o efeito da concentração de tensões. (Ver sugestão do Prob. 3.122.)

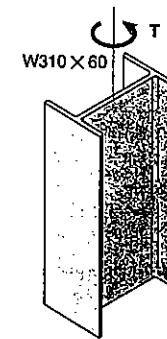


Fig. P3.123

3.124 Um torque de 6,8 kN·m é aplicado a um eixo vazado de alumínio que tem a seção transversal mostrada na figura. Desprezando o efeito da concentração de tensões, determinar a tensão de cisalhamento nos pontos a e b .

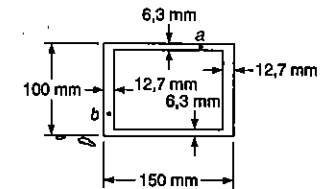


Fig. P3.124

3.125 Um eixo vazado de latão tem a seção transversal mostrada. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento não deve exceder 65 MPa e desprezando-se o efeito da concentração de tensões, determinar o maior torque que pode ser aplicado ao eixo.

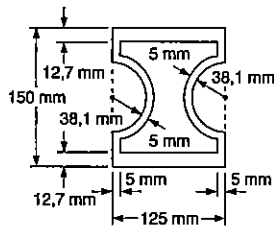


Fig. P3.125

3.126 Um eixo vazado de latão tem a seção transversal mostrada. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento não deve exceder 80 MPa e desprezando-se o efeito da concentração de tensões, determinar o maior torque que pode ser aplicado ao eixo.

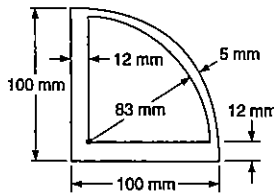


Fig. P3.126

3.127 Um torque de 1,2 kN · m é aplicado a uma barra vazada de alumínio, que tem a seção mostrada na figura. Desprezando-se o efeito da concentração de tensões, determinar a tensão de cisalhamento na barra.

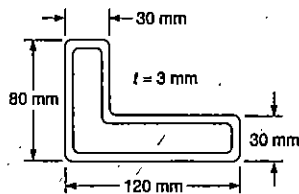


Fig. P3.127

3.128 Um eixo cilíndrico vazado foi projetado com a seção transversal mostrada na Fig. (1) para resistir a um torque máximo T_0 . Um defeito na fabricação, no entanto, resultou em uma pequena excentricidade e , entre as superfícies cilíndricas, interna e

externa, como mostrado na Fig. (2). Pede-se: (a) expressar o torque máximo T que pode ser aplicado com segurança ao eixo defeituoso, em termos de T_0 , e e t ; (b) calcular o decréscimo percentual do torque admissível para valores da relação e/t , iguais a 0,1, 0,5 e 0,9.

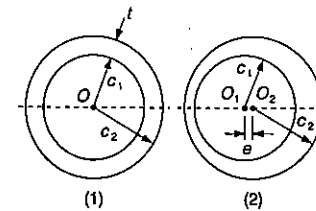


Fig. P3.128

3.129 Sabendo-se que a barra do Prob. 3.127 tem 900 mm de comprimento e que $G = 26$ GPa, determinar o ângulo de torção causado pelo torque 1,2 kN · m.

3.130 Sabendo-se que o eixo do Prob. 3.124 tem 1,2 m, e que $G = 26$ GPa, determinar o ângulo de torção causado pelo torque de 6,8 kN · m.

3.131 Um eixo cilíndrico vazado de comprimento L , raio médio c_m e espessura uniforme t , está submetido aos torques de intensidade T . Considerar inicialmente os valores da tensão média de cisalhamento τ_{med} e o ângulo de torção ϕ obtido das fórmulas de torção elástica desenvolvidas nas Secs. 3.4 e 3.5, e também os correspondentes valores obtidos das fórmulas desenvolvidas na Sec. 3.13, para eixos vazados de paredes finas. Pede-se: (a) mostrar que o erro relativo, introduzido em usar as fórmulas de eixo de parede fina, ao invés das fórmulas de torção elástica, é o mesmo para τ_{med} e ϕ , e que este erro relativo é positivo e proporcional ao quadrado da relação t/c_m ; (b) calcular o erro percentual correspondente a valores de t/c_m iguais a 0,1, 0,2 e 0,4.

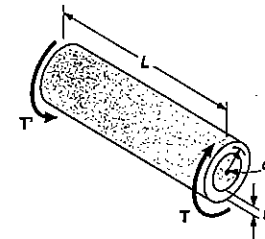


Fig. P3.131

3.132 Um tubo de parede fina foi fabricado pelo encurvamento de uma placa de metal, de espessura t , onde suas bordas foram unidas de tal modo que tomasse a forma de um cilindro de raio c . Um torque T é então aplicado ao tubo, produzindo uma tensão de cisalhamento τ_1 e um ângulo de torção ϕ_1 . Chamando de τ_2 e ϕ_2 , respectivamente, a tensão de cisalhamento e o ângulo de torção, que irá se desenvolver se a união subitamente vier a falhar, determinar a relação τ_2/τ_1 e ϕ_2/ϕ_1 , em termos da relação c/t .

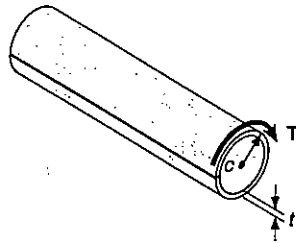


Fig. P3.132

3.133 Resolver o Prob. 3.132, assumindo que a placa de metal tenha sido dobrada na forma de um tubo de seção transversal quadrada de lado c .

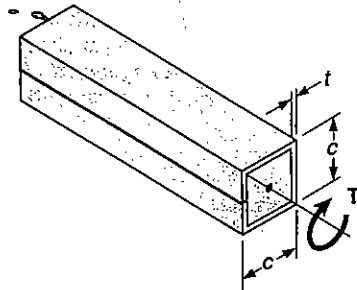


Fig. P3.133

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo é voltado para a análise e projeto de eixos submetidos a momentos torcionais ou torques; exceto para as duas últimas seções deste capítulo, em que nossa discussão foi limitada a eixos circulares.

Como uma discussão preliminar (Sec. 3.2), foi mostrado que a distribuição de tensões na seção transversal de um eixo circular é *estaticamente indeterminada*. A determinação destas tensões, no entanto, necessita de uma análise melhor das *deformações* que ocorreram no eixo (Sec. 3.3).

É demonstrado que em eixos circulares submetidos a torção *toda seção transversal permanece plana e sem distorção*; assim desenvolvemos a seguinte expressão para a *deformação específica de cisalhamento* em um pequeno elemento, localizado a uma distância ρ do centro do eixo:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (3.2)$$

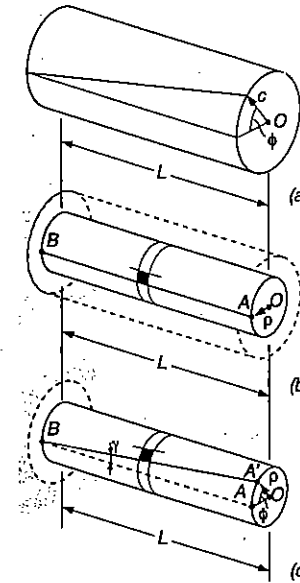


Fig. 3.13

onde ϕ é o ângulo de torção para um eixo de comprimento L (Fig. 3.13). A Equação (3.2) mostra que a *deformação específica de cisalhamento de um eixo circular varia linearmente com a distância ao eixo da barra*; então, segue que a deformação específica é máxima na superfície do eixo, onde ρ é igual ao raio c do eixo. Nós escrevemos:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{c\phi}{L} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{m\acute{a}x} \quad (3.3,4)$$

Considerando as *tensões de cisalhamento* em um eixo circular dentro do regime elástico (Sec. 3.4) e lembrando da Lei de Hooke para tensões e deformações cisalhantes, $\tau = G\gamma$, nós chegamos à relação

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{m\acute{a}x} \quad (3.6)$$

onde mostra que dentro do regime elástico a *tensão de cisalhamento, em um eixo circular, também varia linearmente com a distância do centro do eixo*. Equacionando a soma dos momentos de forças elementares exercidas sobre qualquer seção do eixo, devidas a um torque de intensidade T aplicado sobre o eixo, nós desenvolvemos as fórmulas de torção elástica

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad (3.8,9)$$

onde c é o raio da seção transversal e J é seu momento de inércia polar. Nós lembramos que $J = \frac{1}{2} \pi c^4$ para um eixo maciço e $J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$ para um eixo vazado de raio interno c_1 e raio externo c_2 .

Notamos que enquanto o elemento a da Fig. 3.19 está em cisalhamento puro, o elemento c da mesma figura está submetido a tensões normais de mesma intensidade, Tc/J , sendo duas das tensões normais de tração e duas de compressão. Isto explica porque os materiais dúteis, que geralmente falham por cisalhamento, em um teste de torção, irão quebrar ao longo de um plano perpendicular ao eixo da amostra, enquanto que os materiais frágeis, que são mais sensíveis à tração do que ao cisalhamento, irão quebrar ao longo de superfícies formando um ângulo de 45° com o eixo da amostra.

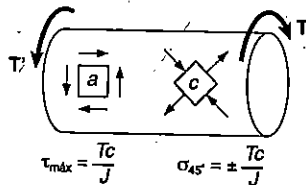


Fig. 3.19

Na Sec. 3.5, nós discutimos que dentro do regime elástico, o ângulo de torção ϕ de um eixo circular é proporcional ao torque T nele aplicado (Fig. 3.21). Expressando ϕ em radianos, nós escrevemos:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (3.16)$$

onde L = comprimento do eixo

J = momento de inércia polar da seção transversal

G = módulo de elasticidade transversal do material

Se o eixo é submetido a torques em outros locais, que não sejam suas extremidades, ou consiste de várias partes com seção transversal variável e possível de diferentes materiais, o ângulo de torção do eixo deve ser expresso como a *soma algébrica* dos ângulos de torção das partes componentes (Prob. Resolvido 3.3):

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad (3.17)$$

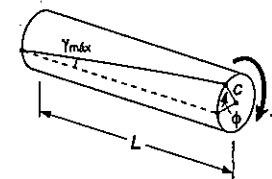


Fig. 3.21

Observamos que, quando ambas as extremidades do eixo BE giram (Fig. 3.25), o ângulo de torção do eixo é igual à *diferença* entre os ângulos de torção ϕ_B e ϕ_E de duas extremidades. Também notamos que, quando dois eixos, AD e BE , são conectados pelas engrenagens A e B , os torques aplicados, respectivamente, pela engrenagem A do eixo AD e pela engrenagem B do eixo BE , são *diretamente proporcionais* ao raio r_A e r_B das duas engrenagens, desde que as forças tangenciais aplicadas sobre os dentes, nas engrenagens em C , sejam iguais e opostas. Por outro lado, os ângulos de rotação ϕ_A e ϕ_B das duas engrenagens são *inversamente proporcionais* a r_A e r_B , desde que os arcos CC' e CC'' descritos pelos dentes da engrenagem sejam iguais (Exemplo 3.4 e Prob. Resolvido 3.4).

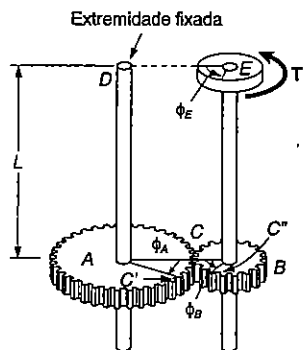


Fig. 3.25b

Se as reações nos suportes de um eixo ou os torques internos não podem ser determinados somente pela Estática, o eixo é dito como *estaticamente indeterminado* (Sec. 3.16). As equações de equilíbrio obtidas dos diagramas de corpo livre precisam então ser complementadas por relações envolvendo as deformações do eixo e obtidas da geometria do problema (Exemplo 3.5 e Prob. Resolvido 3.5).

Na Sec. 3.7, nós discutimos o projeto de eixos de transmissão. Primeiramente lembramos que a potência P transmitida por um eixo é

$$P = 2\pi fT \tag{3.20}$$

onde T é o torque exercido em cada extremidade do eixo e f a frequência ou velocidade de rotação do eixo. A unidade de frequência é de revolução por segundo (s^{-1}) ou hertz (Hz). Se as unidades do Sistema Internacional, SI, são usadas, T é expresso por newton-metro (N·m) e P em watts (W). A potência ainda pode ser expressa em horsepower (hp) através da relação

$$1 \text{ hp} = 745,7 \text{ W}$$

Para projetar um eixo para transmitir uma dada potência P , numa frequência f , resolvemos a Equação (3.20) para T . Em seguida, levando este valor e o valor da tensão máxima admissível do material τ para a fórmula elástica (3.8), obteremos o correspondente valor do parâmetro J/c , de onde pode ser calculado o diâmetro necessário do eixo (Exemplos 3.6 e 3.7).

Na Sec. 3.8, discutimos as concentrações de tensões em eixos circulares. Vimos que as concentrações de tensões resultantes de uma mudança abrupta do diâmetro de um eixo podem ser reduzidas pelo uso de raios de concordâncias ou adoçamentos (Fig. 3.30). O máximo valor da tensão de cisalhamento no adoçamento é

$$\tau_{\text{máx}} = K \frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

onde a tensão Tc/J é calculada no menor diâmetro do eixo, e onde K é coeficiente de concentração de tensões. Os valores de K foram plotados, na Fig. 3.31 (pág. 251), versus a relação r/d onde r é o raio do adoçamento, para alguns valores de D/d .

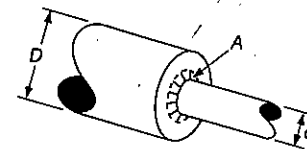


Fig. 3.30

As seções 3.9 a 3.11 foram voltadas à discussão das deformações plásticas e das tensões residuais em eixos circulares. Nós inicialmente lembramos que, mesmo quando as Leis de Hooke não podem ser aplicadas, a distribuição de deformações específicas em um eixo circular é sempre linear (Sec. 3.9). Se o diagrama tensão-deformação para o cisalhamento de um material é conhecido, é então possível plotar a tensão de cisalhamento τ versus a distância ρ do centro do eixo, para qualquer valor de $\tau_{\text{máx}}$ (Fig. 3.34). Somando-se as contribuições do torque para um elemento anelar, de raio ρ e espessura $d\rho$, expressamos o torque T como

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^2\tau d\rho \tag{3.26}$$

onde τ é função de ρ plotado na Fig. 3.34.

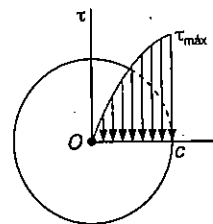


Fig. 3.34

Um importante valor para o torque é o *torque último* T_U , que causa falha no eixo. Este valor pode ser determinado, tanto experimentalmente como através dos cálculos indicados acima, com $\tau_{m\acute{a}x}$ escolhido como igual à tensão última τ_U de uma distribuição de tensões linear (Fig. 3.35), nós determinamos a correspondente tensão fictícia $R_T = T_U c / J$, conhecida como *módulo de ruptura a torção* para um dado material.

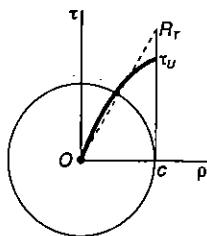


Fig. 3.35

Considerando o caso idealizado de um *eixo maciço circular* feito de um *material elastoplástico* (Sec. 3.10), nós inicialmente notamos que, enquanto a $\tau_{m\acute{a}x}$ não exceder o limite de escoamento do material, a distribuição através de uma seção do eixo é linear (Fig. 3.37a). O torque T_e correspondente ao $\tau_{m\acute{a}x} = \tau_e$ (Fig. 3.37b) é conhecido como o *máximo torque elástico*; para um eixo circular maciço de raio c , temos:

$$T_e = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_e \quad (3.29)$$

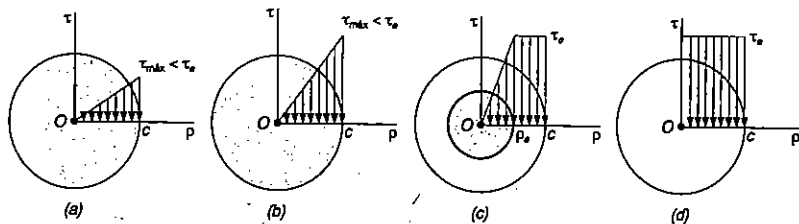


Fig. 3.37

À medida que o torque cresce, uma região plástica desenvolve-se no eixo ao redor de um núcleo elástico de raio ρ_e . O torque T correspondente a um dado valor de ρ_e é obtido como sendo

$$T = \frac{4}{3} T_e \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_e^3}{c^3} \right) \quad (3.32)$$

Notamos que quando ρ_e se aproxima de zero, o torque atinge um valor limite T_p , chamado *torque plástico* do eixo considerado:

$$T_p = \frac{4}{3} T_e \quad (3.33)$$

Plotando-se o torque T versus o ângulo de torção ϕ de um eixo circular maciço (Fig. 3.38), nós obtemos o segmento da reta OE , definido pela Equação (3.16), seguida de uma curva aproximadamente reta $T = T_p$ e definida pela equação

$$T = \frac{4}{3} T_e \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\phi_e^3}{\phi^3} \right) \quad (3.37)$$

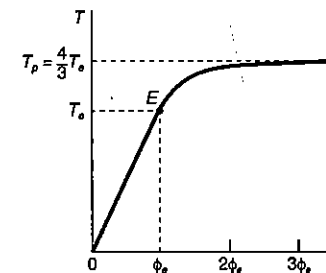


Fig. 3.38

Carregando um eixo circular, além do início do escoamento e descarregando-o (Sec. 3.11), resulta uma *deformação permanente*, caracterizada pelo ângulo de torção $\phi_p = \phi - \phi'$; onde ϕ corresponde à fase de carregamento descrita no parágrafo anterior, e ϕ' à fase de descarregamento representada por uma linha reta da Fig. 3.41. Haverá também *tensões residuais* no eixo, que podem ser determinadas pela adição das tensões máximas atingidas durante a fase de carregamento e as tensões reversas correspondentes à fase de descarregamento (Exemplo 3.9).

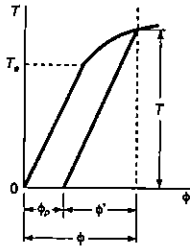


Fig. 3.41

As últimas duas seções do capítulo versaram sobre a torção de barras *não-circulares*. Lembramos ainda que o desenvolvimento das fórmulas para a distribuição de deformações específicas e tensões em eixos circulares foi baseada na simetria destas barras e no fato de que seções transversais permanecem planas e sem distorções. Uma vez que esta propriedade não pode ser aplicada a barras de seção não-circulares, tal como a barra quadrada da Fig. 3.44; então, nenhuma das fórmulas apresentadas recentemente pode ser usada em suas análises (Sec. 3.12).

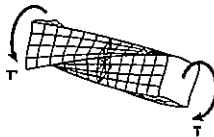


Fig. 3.44

Foi indicado na Sec. 3.12 que no caso de *seção transversal uniforme retangular* (Fig. 3.47), a máxima tensão de cisalhamento ocorre ao longo da linha de centro da face *mais larga* da barra. As fórmulas para a tensão de cisalhamento máxima e ângulo de torção foram dadas sem prova. A *analogia de membrana* para visualização da distribuição de tensões em barras não-circulares foi também discutida.

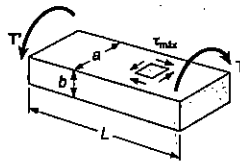


Fig. 3.47

Logo após, foi analisada a distribuição de tensões em *eixos vazados não-circulares de parede fina* (Sec. 3.13). Vimos que a tensão de cisalhamento é paralela à

superfície da parede e varia ao longo da sua espessura e ao longo da seção transversal da parede. Denotando por τ o valor médio da tensão de cisalhamento calculada através da parede e em um dado ponto da seção transversal, e por t a espessura da parede neste ponto (Fig. 3.56), nós mostramos que o produto $q = \tau t$, chamado *fluxo de cisalhamento*, é constante ao longo da seção transversal.

Ainda mais, denotando por T o torque aplicado ao eixo vazado e por Ω a área limitada pela linha central da seção transversal da parede, nós expressamos a tensão de cisalhamento média τ , em qualquer ponto dado da seção transversal, por

$$\tau = \frac{T}{2t\Omega} \quad (3.53)$$

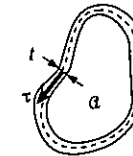


Fig. 3.56

PROBLEMAS DE REVISÃO

3.134 Os torques mostrados são aplicados às polias A, B, C e D. Sabendo-se que cada trecho do eixo é maciço, determinar a máxima tensão de cisalhamento: (a) no trecho AB; (b) no trecho BC; (c) no trecho CD.

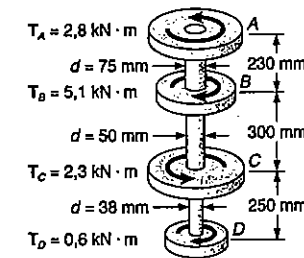


Fig. P3.134 e Fig. P3.135

3.135 Os torques mostrados são aplicados às polias *A*, *B*, *C* e *D*. Sabendo-se que cada trecho do eixo é maciço e são feitos de aço, com $G = 77 \text{ GPa}$, determinar o ângulo de torção da polia *C*, em relação a: (a) polia *A*; (b) polia *D*.

3.136 Uma barra de alumínio *AB* ($G = 26 \text{ GPa}$) é ligada a uma barra de latão ($G = 39 \text{ GPa}$). Sabendo-se que o trecho *CD* da barra é vazado e tem um diâmetro interno de 40 mm, determinar o ângulo de torção em *A*.

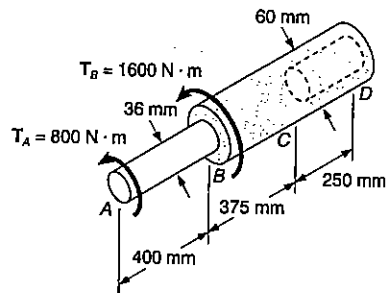


Fig. P3.136

3.137 Para a barra composta do Prob. 3.16, determinar a máxima tensão de cisalhamento nas porções: (a) *AB*; (b) *BC* e (c) *CD*.

3.138 O arranjo mostrado de eixos com polias para correias planas é usado para transmitir 2 kW do ponto *A* para o ponto *D*. Pede-se: (a) usando uma tensão de cisalhamento média de 70 MPa, determinar a velocidade de rotação adequada para o eixo *AB*; (b) resolver a parte a, assumindo que os diâmetros dos eixos *AB* e *CD* são 18 mm e 15 mm, respectivamente.

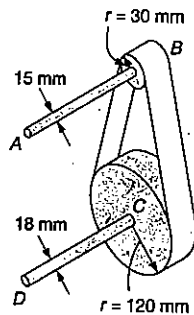


Fig. P3.138

3.139 O eixo escalonado com o adoçamento mostrado deve transmitir 85 hp a uma velocidade de 720 rpm. Determinar o menor valor do raio de adoçamento r , se uma tensão admissível de 55 MPa não deve ser excedida.

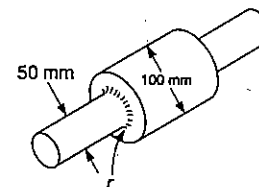


Fig. P3.139

3.140 Dois eixos maciços de aço são acoplados pelos flanges em *B* e engastados a suportes rígidos em *A* e *C*. Para o torque mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento: (a) no eixo *AB*; (b) no eixo *BC*.

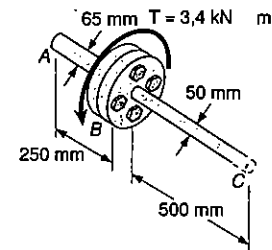


Fig. P3.140

3.141 Três eixos maciços de aço ($G = 77 \text{ GPa}$), cada um com 18 mm de diâmetro, são conectados pelas engrenagens mostradas. Para os carregamentos dados, determinar: (a) o ângulo de torção da extremidade *A*, do eixo *AB*; (b) o ângulo de torção da extremidade *E*, do eixo *EF*.

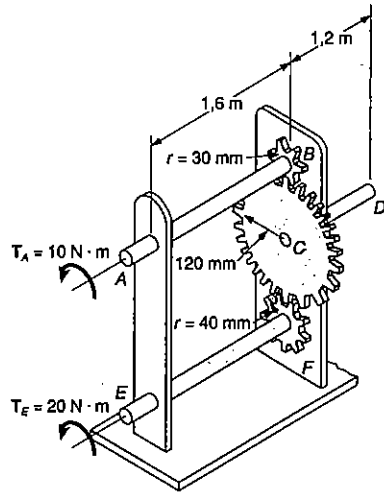


Fig. P3.141

3.142 Dois eixos maciços de alumínio ($G = 26 \text{ GPa}$) são conectados pelas engrenagens mostradas. Sabendo-se que as extremidades B e D são impedidas de girar, para o carregamento dado determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento no eixo CD ; (b) o ângulo de torção da extremidade C .

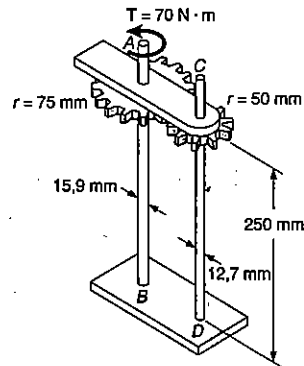


Fig. P3.142

3.143 O eixo composto mostrado é torcido pela aplicação do torque T na extremidade A . Sabendo-se que a máxima tensão de cisalhamento na camisa de alumínio é de 60 MPa , e que $G = 77 \text{ GPa}$, para o aço, e $G = 26 \text{ GPa}$, para o alumínio, determinar: (a) a máxima tensão de cisalhamento no núcleo de aço; (b) a intensidade do torque T aplicado em A .

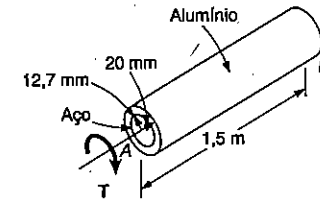


Fig. P3.143

3.144 O eixo maciço mostrado é feito de um aço doce, que é considerado ser elastoplástico com $G = 77 \text{ GPa}$ e $\tau_c = 150 \text{ MPa}$. Determinar: (a) a intensidade do torque T para que o raio do núcleo elástico seja $12,5 \text{ mm}$; (b) a correspondente tensão de cisalhamento máxima; (c) o correspondente ângulo de torção.

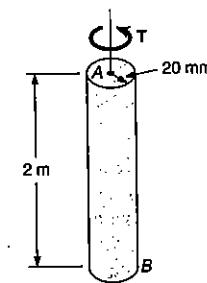


Fig. P3.144

3.145 Se o torque T aplicado ao eixo do Prob. 3.144 é removido, determinar: (a) a intensidade e a localização da tensão residual máxima no eixo; (b) o ângulo de torção permanente no eixo.

Os problemas que se seguem são para ser resolvidos com auxílio de um computador.

3.C1 O eixo AB é constituído de n elementos cilíndricos homogêneos, que podem ser maciços ou vazados. Sua extremidade A é fixa, enquanto que sua extremidade B é livre e está submetida ao carregamento mostrado. O comprimento do elemento i é denotado por L_i , seu diâmetro externo por OD_i , seu diâmetro interno por ID_i , seu módulo de elasticidade G_i e o torque aplicado na sua extremidade direita por T_i ; a intensidade T_i deste torque deve ser assumida como positiva se T_i for no sentido anti-horário, quando observado da extremidade B ; e negativa, no caso contrário. (Notar que $ID_i = 0$, se o elemento for maciço.) Pede-se: (a) escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a máxima tensão de cisalhamento em cada elemento, o ângulo de torção de cada elemento, e o ângulo de torção do eixo completo; (b) usar este programa para resolver os Probs. 3.6, 3.8, 3.28, 3.30, 3.314 e 3.136.

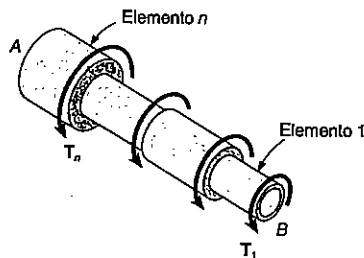


Fig. P3.C1

3.C2 A montagem mostrada consiste de n eixos cilíndricos, que podem ser maciços ou vazados, conectados por engrenagens e suportados por mancais (não mostrados). A extremidade A_1 do primeiro eixo é livre e submetida a um torque T_0 , enquanto a extremidade B_n do último eixo é fixa. O comprimento do eixo A_1B_1 é denotado por L_i , seu diâmetro externo por OD_i , seu diâmetro interno por ID_i e o seu módulo de elasticidade transversal por G_i . (Notar que $ID_i = 0$, se o elemento for maciço.) O raio da engrenagem A_i é denotado por a_i e o raio da engrenagem B_i por b_i . Pede-se: (a) escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a máxima tensão de cisalhamento em cada eixo e o ângulo de torção da extremidade A_1 ; (b) usar este programa para resolver os Probs. 3.14, 3.18 e 3.34.

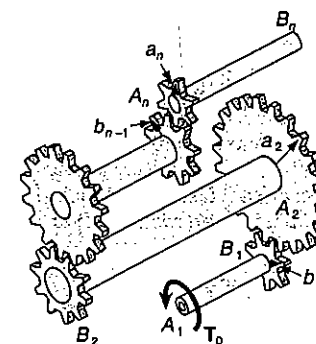


Fig. P3.C2

3.C3 O eixo AB consiste de n elementos cilíndricos homogêneos que podem ser maciços ou vazados. Suas extremidades são fixas e o eixo está submetido ao carregamento indicado. O comprimento do elemento i é denotado por L_i , seu diâmetro externo por OD_i , seu diâmetro interno por ID_i , seu módulo de elasticidade transversal por G_i e o torque aplicado na sua extremidade direita por T_i ; a intensidade T_i deste torque deve ser assumida como positiva se T_i for no sentido anti-horário, quando observado da extremidade B ; e negativa, no caso contrário. (Notar que $ID_i = 0$, se o elemento for maciço, e também que $T_1 = 0$.) Pede-se: (a) escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar as reações em A e B , a máxima tensão de cisalhamento e o ângulo de torção em cada elemento; (b) usar este programa para resolver os Probs. 3.46, 3.348, 3.50 e 3.140.

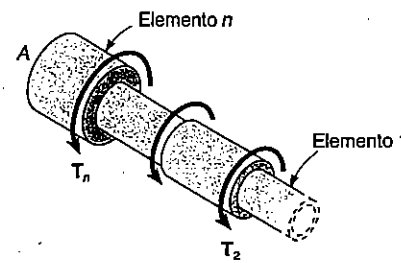


Fig. P3.C3

3.C4 O eixo maciço cilíndrico e homogêneo AB tem um comprimento L , um diâmetro d , um módulo de elasticidade transversal G e uma tensão de escoamento τ_e . Está submetido a um torque T , que cresce gradualmente desde zero até que o ângulo de torção do eixo atinja um valor máximo ϕ_m e então decresce até zero. Pede-se: (a) escrever um programa de computador que, para cada 16 valores de ϕ_m , igualmente espaçados, segundo uma faixa que vai de 0 até um valor 3 vezes aquele que promove o início do escoamento, possa ser usado para determinar o máximo valor do torque T_m , o raio do núcleo elástico, a máxima tensão de cisalhamento, o ângulo de torção permanente e a tensão residual de cisalhamento em ambas as superfícies (plástica e elástica) do eixo e na interface no núcleo elástico com a região plástica; (b) usar este programa para resolver os Probs. 3.78, 3.96, 3.98, 3.100, 3.102 e 3.144.

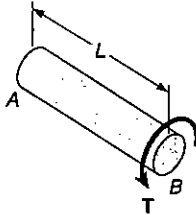


Fig. P3.C4

Capítulo 4

FLEXÃO PURA

4.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, analisamos as tensões e deformações específicas, em barras prismáticas sujeitas a cargas axiais e a momentos de torção. Agora iremos considerar a análise de membros prismáticos sujeitos a dois *conjugados* ou *momentos*, iguais e de sentidos opostos, M e M' , atuando no mesmo plano longitudinal (Fig. 4.1); o membro é então dito estar sob *flexão pura*.

Na primeira parte do capítulo, nós iremos analisar as tensões e deformações que existem em membros homogêneos com um plano de simetria. Depois, provaremos que *seções transversais permanecem planas* durante as deformações de flexão (Sec. 4.4), desenvolveremos fórmulas que poderão ser usadas para determinar as *tensões normais* e o *raio de curvatura*, para membros em flexão pura, dentro do regime elástico (Sec. 4.5).

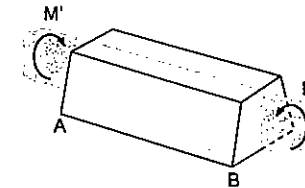


Fig. 4.1

Na Sec. 4.7, iremos estudar as tensões e as deformações em *membros compostos*, feitos de mais de um material, e aprenderemos a *desenhar* uma *seção*

transformada equivalente, que representa a seção de um membro feito de um material homogêneo. A seção transformada será usada para encontrar as tensões e deformações no membro original. Na Sec. 4.8, discutiremos as concentrações de tensão, nos locais onde a seção transversal de um membro sofre uma súbita mudança.

Na parte seguinte do capítulo, nós consideraremos a flexão de membros feitos de um material que não seguem a lei de Hooke (Sec. 4.9). Em particular, investigaremos as tensões e as deformações em membros feitos de um material elastoplástico. Iniciando com o máximo momento elástico M , que corresponde ao início do escoamento (Sec. 4.10), iremos considerar os efeitos do aumento dos momentos, até que o momento plástico M seja atingido, o qual ocorre quando o membro está completamente escoado. Também iremos determinar as deformações permanentes e as tensões residuais, que resultam de tais carregamentos (Sec. 4.12).

Na Sec. 4.13, iremos superpor as tensões devido a flexão pura e as tensões devido a um carregamento centrado (Capítulo 1), para podermos analisar casos de carregamentos excêntricos em um plano de simetria. Nosso estudo de flexão em membros prismáticos será concluído com a análise de flexão assimétrica (Sec. 4.14) e o estudo do caso geral de carregamento axial excêntrico (Sec. 4.15). A última seção do capítulo é voltada para a análise de tensões em vigas curvas (Sec. 4.16).

4.2 BARRAS PRISMÁTICAS EM FLEXÃO PURA

Uma barra submetida à ação de dois conjugados iguais e de sentidos contrários, que atuam em um mesmo plano longitudinal, está sujeita à flexão pura. Se passarmos uma seção transversal cortando a barra AB da Fig. 4.1, as condições de equilíbrio da parte AC da barra exigem que os esforços elementares exercidos sobre AC pela outra parte formem um conjugado equivalente a M . Desse modo (Fig. 4.2), a seção transversal da barra submetida à flexão pura apresentará esforços internos equivalentes a um conjugado.

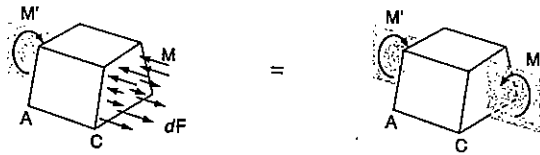


Fig. 4.2

O momento M desse conjugado é chamado de momento fletor da seção. Vamos adotar a convenção de indicar como positivo o momento M que flexiona a barra conforme ilustra a Fig. 4.1, e como negativo o caso em que M e M' têm sentido inverso ao da figura.

Na Fig. 4.3a, a porção BC da viga AD está submetida à flexão pura. Cortando a viga por uma seção qualquer E , entre B e C , e estudando os diagramas de corpo livre de AD e AE (Fig. 4.3b e c), verificamos que os esforços internos em qualquer seção transversal localizada entre B e C devem ser equivalentes a um conjugado de $36 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

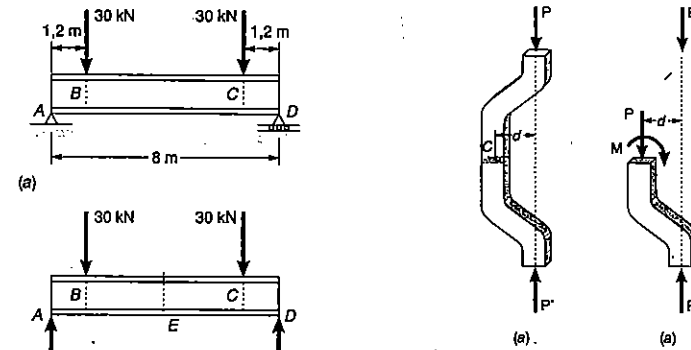


Fig. 4.4

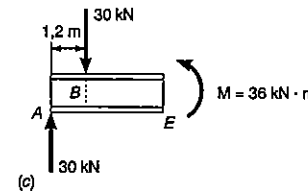


Fig. 4.3

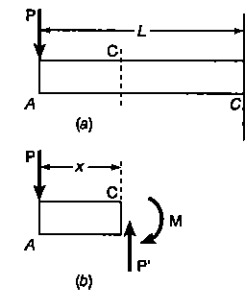


Fig. 4.5

Os casos de flexão pura não são muito comuns nas aplicações práticas, e o número de casos em que ela aparece não justificaria, por si só, que dedicássemos todo um capítulo ao seu estudo. Contudo, as conclusões e deduções que fizemos aqui podem ser aplicadas à análise de outros tipos de solicitações das peças estruturais, como o caso de cargas transversais e o caso de cargas normais excêntricas. Já vimos na Sec. 1.3 que os esforços internos em uma seção de uma peça submetida a uma carga normal excêntrica são equivalentes a uma força P , aplicada no centróide da seção, e a um

conjugado M (Fig. 4.4). Usando o princípio da superposição, poderemos combinar as tensões obtidas para o caso de carga centrada com as tensões provocadas pela flexão pura, que logo saberemos obter e, com isso, encontrar a distribuições de tensões para a carga excêntrica. O estudo da flexão pura tem também um papel importante na análise das vigas, que são peças prismáticas submetidas a cargas transversais ao eixo. Consideremos, por exemplo, a viga em balanço AB , que suporta uma carga concentrada P na sua extremidade livre (Fig. 4.5a). Se passarmos uma seção transversal em C , a uma distância de A , vemos pela análise do diagrama de corpo livre de AC (Fig. 4.5b) que os esforços internos nessa seção consistem em uma força P' de mesma intensidade e sentido oposto de P , e de um momento M de intensidade $M = Px$. Como veremos no Cap. 5, a distribuição de tensões de cisalhamento nessa seção depende de P' , enquanto a distribuição de tensões normais pode ser obtida a partir de M , como se a viga estivesse submetida à flexão pura.

4.3 ANÁLISE PRELIMINAR DAS TENSÕES NA FLEXÃO PURA

Vamos utilizar os métodos da estática para deduzir as relações que devem ser satisfeitas pelas tensões que atuam em uma seção transversal de uma peça prismática em flexão pura. Vamos chamar de σ_x à tensão normal em um ponto da seção, e de τ_{xy} e τ_{xz} às componentes da tensão de cisalhamento¹ nessa seção. O sistema de esforços internos que atuam na seção deve ser equivalente ao conjugado M (Fig. 4.6).

Sabemos, através da estática, que um conjugado M consiste realmente de duas forças iguais e de sentidos opostos. A soma das componentes dessas forças em qualquer direção é igual a zero. Além disso, o momento do conjugado, em relação a qualquer eixo perpendicular a seu plano, é sempre o mesmo; o momento do conjugado, em relação a qualquer eixo contido no seu plano, é igual a zero. Adotando o sistema de eixos como indica a Fig. 4.6, podemos expressar a equivalência do sistema de esforços internos com o conjugado M . Temos que a soma das componentes e dos momentos dos esforços elementares deve ser igual à soma das componentes e dos momentos do conjugado M :

$$\sum F_x = 0 \quad \int \sigma_x dA = 0 \quad (4.1)$$

$$\sum M_y = 0 \quad \int z\sigma_x dA = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_z = M \quad \int (-y\sigma_x) dA = M \quad (4.3)$$

Ainda poderíamos escrever mais três equações adicionais, relativas às componentes das tensões de cisalhamento.

¹ As componentes da tensão de cisalhamento são ambas nulas, como veremos na próxima seção.

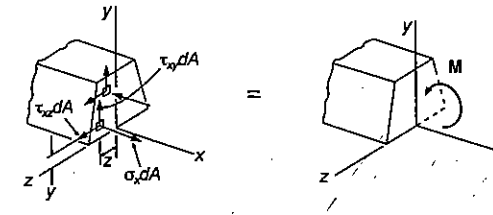


Fig. 4.6

Precisamos fazer dois comentários neste ponto: em primeiro lugar, o sinal negativo na Eq. 4.3. Esse sinal indica o fato de que a tensão de tração ($\sigma_x > 0$) provoca um momento negativo (sentido horário) da força normal $\sigma_x \cdot dA$ em relação ao eixo z . Em segundo lugar, devemos observar que a Eq. 4.2 se torna simples se a peça prismática é simétrica em relação ao plano do conjugado M , e se adotarmos a posição do eixo y como indicada. A distribuição de forças normais nessa seção será simétrica ao eixo y .

Mais uma vez notamos que a distribuição real de tensões em uma seção transversal não pode ser determinada pela estática somente, sendo um problema estaticamente indeterminado. Lançando mão da análise das deformações, conseguiremos os dados que permitirão estabelecer a distribuição de tensões.

4.4 DEFORMAÇÕES EM UMA BARRA SIMÉTRICA NA FLEXÃO PURA

Passamos a analisar as deformações que aparecem em uma barra prismática que contém um plano de simetria. Para se ter flexão pura, submetemos a barra à ação dos conjugados M e M' , que atuam no plano de simetria, com intensidades iguais e sentidos opostos (Fig. 4.7). A barra se flexiona sob a ação dos conjugados, mas permanece simétrica em relação ao plano. Além disso, como o momento fletor M é o mesmo em qualquer seção, a barra se flexiona de maneira uniforme. Desse modo, a linha AB , segundo a qual a face superior da barra intercepta o plano dos conjugados, tem uma curvatura constante. Em outras palavras, a linha AB , que era inicialmente uma linha reta, se transforma em um arco de circunferência de centro C , do mesmo modo que a linha $A'B'$, na face inferior da barra (a figura não indica essa linha). Podemos notar que a linha AB diminui de comprimento quando a barra flexiona da maneira indicada, isto é, quando $M > 0$. Podemos ver também que a linha $A'B'$ se torna mais longa.

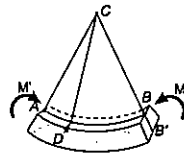


Fig. 4.7

Vamos mostrar agora que qualquer seção plana perpendicular ao eixo da barra permanece plana na flexão; do mesmo modo, mostraremos que o plano da seção transversal passa pelo ponto *C*. Realmente, se não ocorressem os fatos acima, poderíamos encontrar um ponto *E*, que pertencesse a uma seção transversal por *D* (Fig. 4.8a), que não estaria mais nessa seção após a flexão. Em outras palavras, o ponto *E* não estaria no plano que passa por *CD* e é perpendicular ao plano de simetria da barra (Fig. 4.8b). Agora, devido à simetria da barra, haveria um outro ponto *E'* que se transformaria exatamente da mesma maneira que o ponto *E*. Vamos supor que, após a flexão, os dois pontos estivessem localizados à esquerda da seção transversal que passa por *D*, ou à esquerda do plano *CD* (Fig. 4.8b). Como o momento fletor *M* é o momento para toda a extensão da barra, a mesma situação iria ocorrer em todas as seções, e os pontos dessas seções que correspondem a *E* e *E'* iriam se deslocar para a esquerda também. Assim, um observador colocado em *A* chegaria à conclusão de que os pontos *E* e *E'* das várias seções transversais estariam se movendo em sua direção, por efeito do carregamento. Mas para um observador postado em *B*, para o qual o carregamento parece o mesmo, e que observa os pontos *E* e *E'* na mesma posição (exceto por estarem invertidos), o movimento dos pontos *E* e *E'* pareceria se dar em sua direção. Essa inconsistência das observações nos leva a concluir que *E* e *E'* devem permanecer no plano definido por *CD*, e, desse modo, a seção permanece plana e passa por *C*. Nessa análise não foi colocada nenhuma restrição às deformações no próprio plano da seção transversal (ver Sec. 4.5).

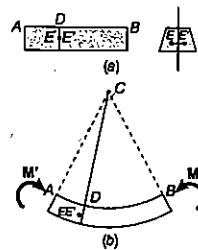


Fig. 4.8

Vamos supor que a barra fica dividida em um grande número de cubos elementares, cujas faces são paralelas aos três planos coordenados. Pela propriedade que estabelecemos, quando a peça se flexiona sob a ação dos conjugados *M* e *M'*, os cubos elementares devem se deformar como mostra a Fig. 4.9.

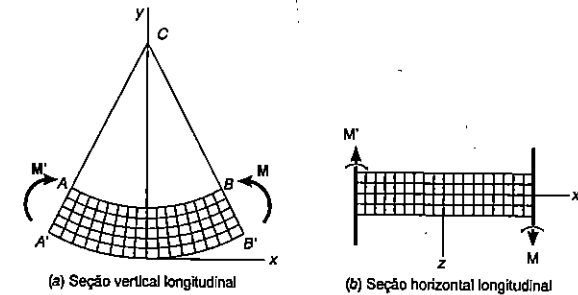


Fig. 4.9

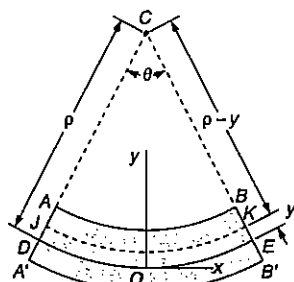
Todas as faces representadas nas duas projeções da Fig. 4.9 estão a 90°, e concluímos que $\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$, sendo então nulas as tensões τ_{xy} e τ_{zx} . Quanto às três componentes de tensão que ainda não analisamos, a saber, σ_y , σ_x e τ_{yz} , notamos que elas devem ser nulas na superfície da barra. Por outro lado, as deformações que ocorrem não exigem interações entre elementos da mesma seção transversal. Podemos assumir que essas componentes são nulas em toda a seção transversal. Essa hipótese pode ser verificada por observação experimental, ou pela teoria da elasticidade, para o caso de barras esbeltas que sofrem pequenas deformações². Do que dissemos até agora, podemos ver que a única componente de tensão que não se anula é a componente normal σ_x . Desse modo, em qualquer ponto de uma barra esbelta submetida à flexão pura, teremos um estado uniaxial de tensões. Lembrando que quando $M > 0$, a linha *AB* diminui de comprimento e a linha *A'B'* aumenta de comprimento, verificamos que a deformação específica ϵ_x e a tensão σ_x são negativas na parte superior da barra (compressão) e positivas na parte inferior (tração).

² Ver Prob. 4.34.

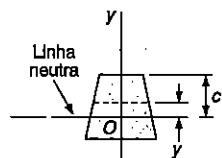
Deve haver então uma superfície paralela à face superior e à face inferior da barra, onde ϵ_x e σ_x se tornam nulas. Esta superfície é chamada *superfície neutra*. A superfície neutra intercepta o plano de simetria ao longo de um arco de circunferência *DE* (Fig. 4.10a), e intercepta uma dada seção transversal da barra segundo uma reta chamada *linha neutra* ou *eixo neutro* da seção. Vamos agora adotar para a origem do sistema de coordenadas um ponto na superfície neutra, e não mais na face inferior da barra como havíamos feito anteriormente. A distância de qualquer ponto da barra à superfície neutra será dada pela ordenada do ponto *y*.

Vamos chamar de ρ o raio do arco de circunferência *DE* (Fig. 4.10a), e de θ o ângulo central correspondente a *DE*. O comprimento *DE* é igual ao comprimento *L* da barra indeformada, e podemos escrever:

$$L = \rho\theta \tag{4.4}$$



(a) Seção vertical longitudinal (plano de simetria)



(b) Seção transversal

Fig. 4.10

Considerando agora o arco *JK* localizado a uma distância *y* acima da superfície neutra, vemos que seu comprimento *L'* é igual a

$$L' = (\rho - y)\theta \tag{4.5}$$

Como o comprimento original do arco *JK* era *L*, antes da deformação de *JK* é

$$\delta = L' - L \tag{4.6}$$

ou, substituindo (4.4) e (4.5) em (4.6),

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \tag{4.7}$$

Podemos obter agora a deformação específica longitudinal ϵ_x nos elementos que compõem a fibra *JK*, dividindo δ pelo comprimento original *L* de *JK*. Assim temos:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

O sinal negativo indica que a deformação é de compressão, uma vez que adotamos momento positivo, e a concavidade da barra deformada é voltada para cima.

Como as seções se mantêm planas, em qualquer plano paralelo ao plano de simetria teremos as mesmas deformações. Então o valor de deformação específica dado pela Eq. 4.8 vale para qualquer ponto situado à distância *y* da superfície neutra. Dizemos então que a deformação específica normal ϵ_x varia linearmente com a distância *y* à superfície neutra, ao longo de toda a barra.

A maior deformação específica ϵ_x ocorre, então, para o máximo valor de *y*. Chamando de *c* esse valor máximo (que pode ser em relação à face superior ou inferior da barra), e expressando por ϵ_m o valor absoluto máximo da deformação específica, temos

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \tag{4.9}$$

Explicitando o valor de ρ em (4.9) e substituindo em (4.8) podemos escrever também

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \tag{4.10}$$

Após esta análise das deformações de uma barra em flexão pura, ainda não estamos aptos a calcular a tensão ou a deformação em qualquer ponto da barra, uma vez que ainda não localizamos a linha neutra na seção da barra. Para localizar a linha neutra ou a superfície neutra, precisamos especificar as relações entre tensão e deformação do material utilizado³.

4.5 TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO REGIME ELÁSTICO

Vamos considerar agora o estudo em regime elástico, quando o momento fletor M tem valor tal que as tensões normais se mantêm abaixo do valor de escoamento σ_e . Com isso, impomos a condição de que as tensões na barra permaneçam abaixo do limite de proporcionalidade e do limite de elasticidade do material. Não vão ocorrer deformações permanentes, e a lei de Hooke pode ser aplicada para o estado uniaxial de tensões. Considerando que o material é homogêneo e chamando de E o seu módulo de elasticidade, teremos na direção longitudinal x

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (4.11)$$

Tomando a Eq. 4.10, e multiplicando os dois membros dessa equação por E , escrevemos

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

ou, usando (4.11)

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \quad (4.12)$$

onde σ_m expressa o maior valor absoluto da tensão. Este resultado mostra que, no regime elástico, a *tensão normal varia linearmente com a distância à superfície neutra* (Fig. 4.11).

³ Se uma barra possui, no entanto, plano de simetria nas direções vertical e horizontal (como exemplo, uma barra de seção transversal retangular), e se o diagrama tensão-deformação é o mesmo para tração e compressão, a superfície neutra vai coincidir com o plano de simetria.

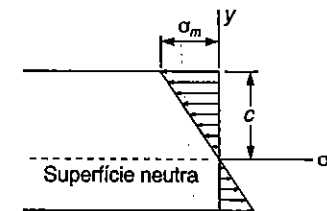


Fig. 4.11

Devemos determinar agora a posição da superfície neutra e o valor máximo da tensão normal, σ_m . Essa determinação pode ser feita utilizando as relações (4.1) e (4.3), obtidas anteriormente das condições da estática. Substituindo em (4.1) o valor de σ_m dado em (4.12), temos

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

Da última igualdade, deduzimos que

$$\int y dA = 0 \quad (4.13)$$

Essa equação mostra que o momento estático da área da seção transversal em relação à linha neutra deve ser zero⁴. Isto quer dizer que, para barras submetidas à flexão pura, a *linha neutra passa pelo centro geométrico da seção*, enquanto as tensões permanecerem em regime elástico.

Lembrando a expressão da Eq. 4.3, que foi deduzida para um eixo horizontal arbitrário, z ,

$$\int (-y\sigma_x dA) = M \quad (4.3)$$

e adotando que o eixo arbitrário z coincide com a linha neutra da seção transversal, substituímos em (4.3) o valor de σ_x dado por (4.12) e escrevemos

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M$$

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M \quad (4.14)$$

⁴ Ver Apêndice A para um estudo de momento estático.

A integral (4.14) representa o momento de inércia I da área da seção transversal em relação à linha neutra. De (4.14) calculamos o valor da tensão máxima σ_m , encontrando⁵

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (4.15)$$

Se desejarmos o valor da tensão σ_x a uma distância y da linha neutra, substituímos σ_m dado por (4.15) em (4.12):

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (4.16)$$

As Eqs. 4.15 e 4.16 são conhecidas como *fórmulas da flexão em regime elástico*, e a tensão normal σ_x , provocada quando a barra se flexiona, é chamada *tensão de flexão*. Podemos ver que a tensão é de compressão acima do eixo neutro ($\sigma_m < 0$ e $y > 0$), quando o momento M é positivo, sendo de tração quando o momento M é negativo.

Na Eq. 4.15, vemos que a relação I/c só depende da geometria da seção transversal. Essa relação é chamada *módulo resistente* ou *momento resistente* e é expressa pela letra W . Temos

$$\text{Módulo resistente} = \frac{I}{c} \quad (4.17)$$

Substituindo W por I/c na Eq. 4.15, escrevemos essa relação de uma outra forma

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \quad (4.18)$$

Essa relação mostra que a tensão máxima é inversamente proporcional ao módulo resistente W , de modo que uma viga deve ser projetada com o maior valor de W possível, nas condições de cada problema. Por exemplo, no caso de uma viga de madeira com seção transversal retangular, de altura h e largura b , vamos ter:

⁵ Lembramos que na nossa dedução o momento fletor foi adotado como positivo. Se o momento fletor for negativo seu valor deve ser adotado em módulo na Eq. 4.15.

$$W = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah \quad (4.19)$$

onde A é a área da seção transversal da viga. Vemos que, tendo duas vigas com a mesma área de seção transversal, a viga com maior altura terá um módulo resistente maior, sendo então mais apropriada para resistir tensões de flexão (Fig. 4.12).

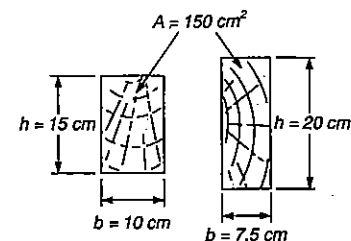


Fig. 4.12

No caso do aço estrutural, as vigas I e os perfis de abas largas (Fig. 4.13) são as formas preferidas para trabalhar a flexão, pois uma grande parte da seção transversal está localizada o mais longe possível da linha neutra. Isso proporciona, para uma certa altura e uma certa área, os maiores valores de I e, conseqüentemente, de W . Para os perfis metálicos, padronizados comercialmente, existem tabelas que fornecem os valores das propriedades geométricas da seção transversal. Assim, para o cálculo de σ_m , busca-se nas tabelas o valor de W relativo ao tipo de perfil desejado, e divide-se o valor M do momento fletor por W ⁶.

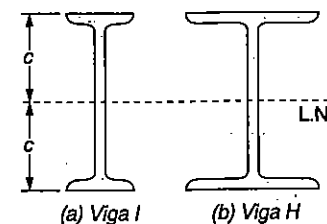


Fig. 4.13

⁶ Devemos alertar, em relação ao que foi dito sobre a vantagem da utilização de peças altas, que uma relação h/b muito elevada pode resultar em instabilidade lateral das vigas.

A deformação da barra submetida à flexão é medida pela *curvatura* da superfície neutra. A curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura ρ , e pode ser calculada resolvendo-se a Eq. 4.9 em termos de $1/\rho$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \quad (4.20)$$

Mas, em regime elástico, temos $\epsilon_m = \sigma_m/E$. Levando essa expressão em (4.20), e usando (4.15), escrevemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I} \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

EXEMPLO 4.1

Uma barra de aço tem seção retangular de 20×60 mm e fica submetida à ação de dois conjugados iguais e de sentido contrário que agem em um plano vertical de simetria da barra (Fig. 4.14). Determinar o valor do momento M que provoca escoamento no material da barra. Adotar $\sigma_e = 250$ MPa.



Fig. ex.4.14

Como o eixo neutro deve passar pelo centróide C da seção transversal, temos $c = 30 \times 10^{-3}$ m (Fig. 4.15). O momento de inércia da área da seção em relação ao eixo centroidal é

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (20 \times 10^{-3} \text{ m})(60 \times 10^{-3} \text{ m})^3 = 360 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

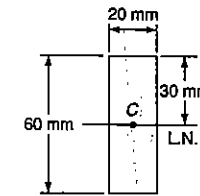


Fig. ex.4.15

M pode ser calculado pela Eq. 4.15 com os dados acima:

$$M = \frac{I}{c} \sigma_m = \frac{360 \times 10^{-9} \text{ m}^4}{30 \times 10^{-3} \text{ m}} (250 \times 10^6 \text{ N/m}^2)$$

$$M = 3000 \text{ N} \cdot \text{m} = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EXEMPLO 4.2

Uma barra de alumínio tem seção transversal em forma de semi-círculo, com raio $r = 12$ mm. A barra é flexionada até se deformar em um arco de circunferência de raio médio $\rho = 2,5$ m. Sabendo-se que a face curva da barra (Fig. 4.16) fica voltada para o centro de curvatura do arco, determinar a máxima tensão de tração e de compressão na barra. Adotar $E = 70$ GPa.



Fig. ex.4.16

Podemos usar a Eq. 4.21 para determinar o momento fletor M , correspondente ao raio de curvatura dado, e a Eq. 4.15 para determinar σ_m . Entretanto, é mais simples usar a Eq. 4.9 para calcular ϵ_m , e a Lei de Hooke para a determinação da tensão σ_m .

A ordenada \bar{y} do centróide C da seção semicircular é

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 5,09 \text{ mm}$$

A linha neutra passa pelo ponto C (Fig. 4.17) e a distância c do centróide até a fibra mais afastada é

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 5,09 \text{ mm} = 6,91 \text{ mm}$$

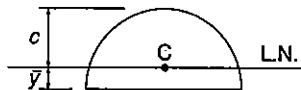


Fig. ex.4.17

Usando a Eq. 4.9, escrevemos

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6,91 \times 10^{-3} \text{ m}}{2,5 \text{ m}} = 2,76 \times 10^{-3}$$

e aplicando a Lei de Hooke,

$$\sigma_m = E\epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2,76 \times 10^{-3}) = 193,2 \text{ MPa}$$

Como esse lado da barra que analisamos está voltado para o centro de curvatura, a tensão calculada é de compressão. A máxima tensão de tração ocorre no lado plano da barra. Usando o fato de que a tensão é proporcional à distância até a linha neutra, escrevemos

$$\sigma_{\text{compressão}} = -\frac{\bar{y}}{c} \sigma_m = +\frac{5,09 \text{ mm}}{6,91 \text{ mm}} (193,2 \text{ MPa}) = -142,3 \text{ MPa}$$

4.6 DEFORMAÇÕES EM UMA SEÇÃO TRANSVERSAL

Na Sec. 4.3 demonstramos que uma seção transversal se mantém plana, em uma barra sujeita à flexão pura. Não excluímos, no entanto, a possibilidade de ocorrerem deformações dentro do plano da seção. Tais deformações realmente existem. Vimos na Sec. 2.11 que elementos submetidos a um estado uniaxial de tensões, com $\sigma_x \neq 0$ e $\sigma_y = \sigma_z = 0$, se deformam na direção axial x e também nas direções transversais y e z . As deformações específicas normais ϵ_y e ϵ_z dependem do coeficiente de Poisson ν do material usado e são expressas por

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x \quad \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$$

ou, pela Eq. 4.8,

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \quad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \quad (4.22)$$

As relações obtidas mostram que, para os elementos situados acima da superfície neutra, se verifica uma expansão nas direções dos eixos y e z , pois $y > 0$. Para os elementos situados abaixo da superfície neutra ($y < 0$) se verifica uma contração nessas direções. No caso de uma barra com seção transversal retangular, essa expansão e contração nos vários elementos, na direção vertical, será compensada, não ocorrendo mudanças na dimensão vertical da seção. Já para a direção horizontal, a expansão dos elementos acima da superfície neutra juntamente com a contração dos elementos abaixo dessa superfície provocam um encurvamento das linhas horizontais da seção transversal. Elas se transformam em arcos de circunferência (Fig. 4.18), em uma situação semelhante àquela observada para a seção longitudinal da barra. A seção transversal se encurvará até se transformar em um arco de raio $\rho' = \rho/\nu$, como se pode deduzir analisando as Eqs. 4.22 e 4.8. Para $M > 0$, o centro C do arco de circunferência se localiza abaixo da superfície neutra, do lado oposto ao centro de curvatura C da barra. O inverso do raio de curvatura ρ' representa a curvatura da seção transversal e é chamada curvatura *anticlástica*. Temos

$$\text{Curvatura anticlástica} = \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \quad (4.23)$$

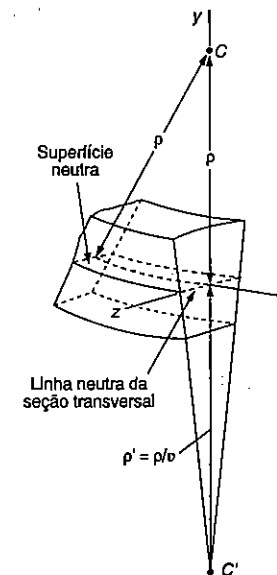


Fig. 4.18

Em nossa análise, até este ponto, não nos preocupamos com a maneira com que os conjugados M e M' são aplicados à barra. Se todas as seções transversais da peça devem permanecer planas e sem tensões de cisalhamento, devemos nos assegurar que os conjugados sejam aplicados de maneira que as extremidades da peça permaneçam planas e livres de tensões de cisalhamento. Para garantia de que isto aconteça, devemos aplicar M e M' através de duas placas lisas e rígidas (Fig. 4.19). As placas fazem com que os esforços elementares que elas aplicam à peça sejam normais às extremidades da barra. Essas extremidades, permanecendo planas, se deformarão da maneira descrita anteriormente nesta Seção.

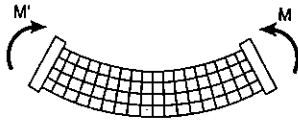
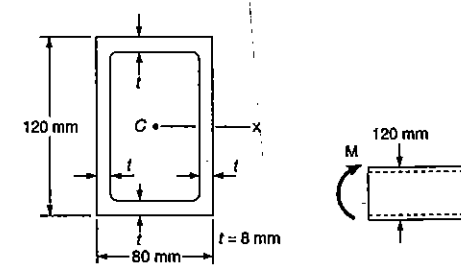


Fig. 4.19

As condições em que ocorre o carregamento não são realmente as descritas acima, nos casos práticos. Isso porque as placas devem exercer tensões de tração na parte inferior da barra, ao mesmo tempo em que permitem que a seção se deforme em seu próprio plano. Tais placas não podem ser realizadas fisicamente, mas sua idealização, como indica a Fig. 4.19, é importante para que possamos visualizar as condições de carregamento que correspondem às expressões deduzidas até agora. Mesmo que as condições reais de carregamento sejam diferentes, o princípio de Saint-Venant nos garante que as expressões podem ser utilizadas para o estudo das seções que não se situem em pontos muito próximos daqueles em que os conjugados são aplicados.

PROBLEMA RESOLVIDO 4.1

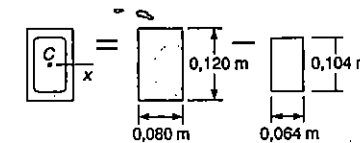
O tubo retangular é fabricado por extrusão, de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_e = 150$ MPa, $\sigma_U = 300$ MPa e $E = 70$ GPa. Desprezando o efeito dos adçosamentos, determinar: a) o momento fletor M para o qual o coeficiente de segurança é 3,0; b) o raio de curvatura correspondente no tubo.



Momento de inércia. Podemos considerar a área da seção transversal como a diferença de dois retângulos. Adotando todas as medidas em metros, temos

$$I = \frac{1}{12} (0,080)(0,120)^3 - \frac{1}{12} (0,064)(0,104)^3$$

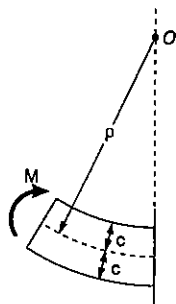
$$I = 5,52 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Tensão admissível. Para um coeficiente de segurança 3,0 e tensão última de 300 MPa, temos

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_U}{C.S.} = \frac{300 \text{ MPa}}{3,0} = 100 \text{ MPa}$$

Como $\sigma_{adm} < \sigma_e$, o tubo permanece em regime elástico, e podemos aplicar os resultados da Sec. 4.4.



(a) **Momento fletor.** Com $c = 1/2 (0,120 \text{ m}) = 0,060 \text{ m}$, escrevemos

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{Mc}{I} \quad M = \frac{I}{c} \sigma_{\text{adm}} = \frac{5,52 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0,060 \text{ m}} (100 \text{ MPa})$$

$$M = 9,20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Raio de curvatura.** Substituindo $E = 70 \text{ GPa}$ na Eq. 4.21,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{9,2 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(70 \text{ GPa})(5,52 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 23,8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 42,0 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

Solução alternativa. Como conhecemos o valor $\sigma_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$, que é a máxima tensão que vai ocorrer, podemos calcular ϵ_m , e depois usar a Eq. 4.9 para calcular ρ

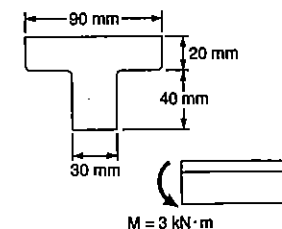
$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{E} = \frac{100 \text{ MPa}}{70 \text{ GPa}} = 1429 \mu$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho}; \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_{\text{máx}}} = \frac{0,060 \text{ m}}{1429 \mu}$$

$$\rho = 42,0 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 4.2

Uma peça de máquina de ferro fundido fica submetida, à ação do conjugado M de $3 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Sabendo-se que $E = 165 \text{ GPa}$ e desprezando o efeito da curvatura das arestas do perfil, determinar: (a) as máximas tensões de tração e compressão no perfil; (b) o raio de curvatura da peça fletida.



Centróide. Dividimos a área da seção transversal em forma de T nos dois retângulos indicados, e calculamos a ordenada do centróide, vem

	Área, mm ²	\bar{y} , mm	$\bar{y}A$, mm ³	
1	$(20)(90) = 1800$	50	90×10^3	$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A$
2	$(40)(30) = 1200$	20	24×10^3	$\bar{Y}(3000) = 114 \times 10^6$
	$\Sigma A = 3000$		$\Sigma \bar{y}A = 114 \times 10^3$	$\bar{Y} = 38 \text{ mm}$

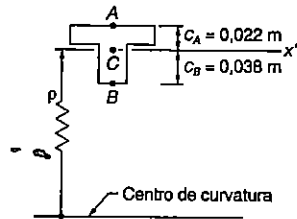
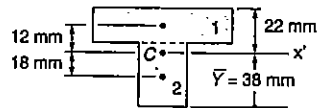
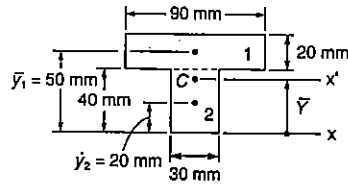
Momento de inércia em relação ao eixo centroidal. Usamos o teorema dos eixos paralelos para determinarmos o momento de inércia de cada retângulo em relação ao eixo x' que passa pelo centróide da seção total. Somando os momentos de inércia de cada triângulo, temos

$$I_{x'} = \Sigma (\bar{I} + Ad^2) = \Sigma \left(\frac{1}{12} bh^3 + Ad^2 \right)$$

$$= \frac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \frac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2$$

$$= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$



(a) **Máxima tensão de tração.** O momento fletor aplicado flete a peça para baixo, de modo que o centro de curvatura se situa abaixo da seção transversal. A máxima tensão de tração em A, ponto mais distante do centro de curvatura.

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,022 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \quad \sigma_A = +76,0 \text{ MPa}$$

Máxima tensão de compressão. Essa tensão ocorre em B; temos

$$\sigma_B = -\frac{Mc_B}{I} = -\frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,038 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \quad \sigma_B = -131,3 \text{ MPa}$$

(b) **Raio de curvatura.** Da Eq. 4.21, temos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$

$$= 20,95 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 47,7 \text{ m}$$

PROBLEMAS

4.1 e 4.2 Sabendo-se que o momento mostrado atua no plano vertical, determinar a tensão no: (a) ponto A; (b) ponto B.

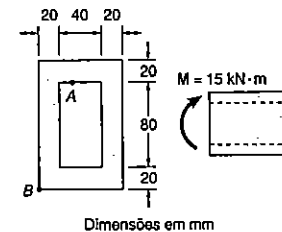


Fig. P4.1

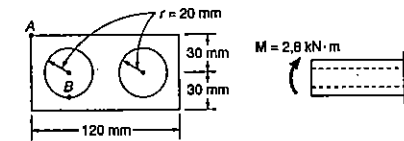


Fig. P4.2

4.3 Resolver o Prob. 4.2, considerando que o raio de cada furo circular é de 25 mm.

4.4 A viga de aço mostrada é feita de um aço com $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ e $\sigma_U = 400 \text{ MPa}$. Usando um coeficiente de segurança de 2,5, determinar o maior momento que pode ser aplicado à viga, quando ela se encurva em torno do eixo z.

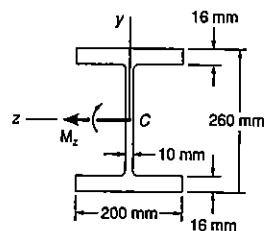


Fig. P4.4

4.5 Resolver o Prob. 4.4, considerando que a viga de aço se encurva em torno do eixo y .

4.6 Uma viga de seção transversal, como indicado, é extrudada de uma liga de alumínio com $\sigma_e = 310 \text{ MPa}$ e $\sigma_U = 480 \text{ MPa}$. Usando um coeficiente de segurança 3,0, determinar o maior momento que pode ser aplicado à viga, quando ela se encurva em torno do eixo z .

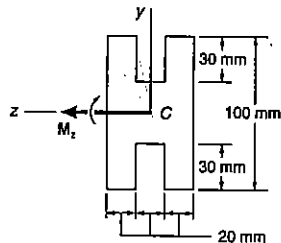


Fig. P4.6

4.7 Resolver o Prob. 4.6, considerando que a viga se encurva em torno do eixo y .

4.8 Duas forças verticais são aplicadas a uma viga de seção transversal mostrada. Determinar as máximas tensões de tração e compressão na porção BC da viga.

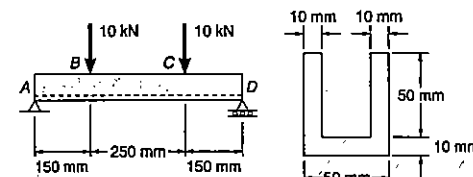


Fig. P4.8

4.9 e 4.10 Duas forças verticais são aplicadas a uma viga de seção transversal mostrada. Determinar as máximas tensões de tração e compressão na porção BC da viga.

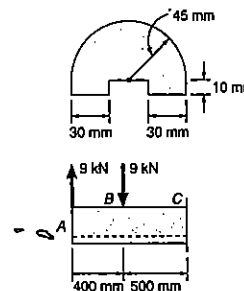


Fig. P4.9

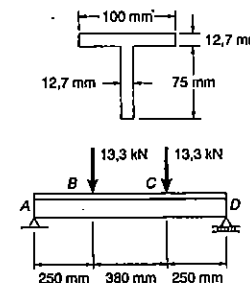


Fig. P4.10

4.11 Resolver o Prob. 4.10, considerando que a largura da aba é aumentada de 100 mm para 130 mm.

4.12 e 4.13 Sabendo-se que uma viga de seção transversal, como mostrado, é encurvada em torno de um eixo horizontal e está submetida a um momento fletor de $5,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determinar a intensidade total da força atuando: (a) na aba superior; (b) na porção sombreada da alma.

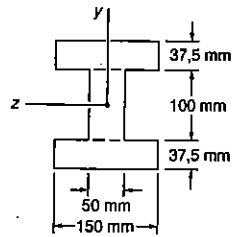


Fig. P4.12

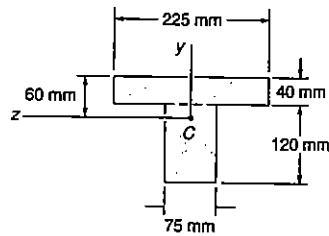


Fig. P4.13

4.14 Sabendo-se que uma viga de seção transversal mostrada é encurvada sobre um eixo horizontal, e que está submetida a um momento fletor de $4 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determinar a intensidade total da força que atua na porção sombreada da viga.

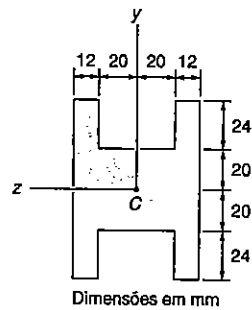


Fig. P4.14

4.15 Resolver o Prob 4.14, considerando que a viga é encurvada em torno de um eixo vertical por um momento de $4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

4.16 e 4.17 Para o perfil mostrado, determinar o maior momento M que pode ser aplicado, sem que as seguintes tensões admissíveis sejam excedidas: $\sigma_{adm} = +40 \text{ MPa}$ e $\sigma_{adm} = -100 \text{ MPa}$.

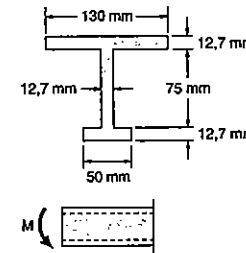


Fig. P4.16

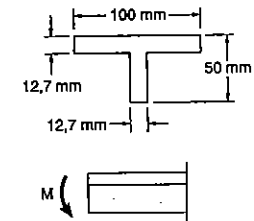


Fig. P4.17

4.18 e 4.19 Sabendo-se que, para a viga extrudada mostrada na figura, a tensão admissível é de 120 MPa , à tração, e 150 MPa à compressão. Determinar o maior momento M que pode ser aplicado.

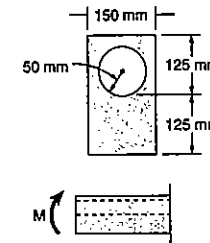


Fig. P4.18

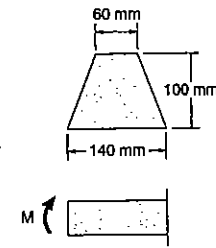


Fig. P4.19

4.20 Um momento de $3,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado à barra de aço mostrada. Pede-se: (a) sendo que o momento encurva a barra em torno do eixo horizontal, determinar a máxima tensão e o raio de curvatura; (b) Resolver a parte a, considerando que a barra é encurvada em torno do eixo vertical pelo momento de $3,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

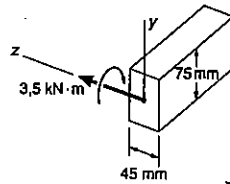


Fig. P4.20

4.21 Um momento de $7,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado ao perfil de aço laminado S310 \times 74 mostrado. Pede-se: (a) sendo que o momento encurva a viga em torno de um eixo horizontal, determinar a máxima tensão e o raio de curvatura; (b) Resolver a parte a, considerando que a viga é encurvada em torno de um eixo vertical, pelo momento de $7,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

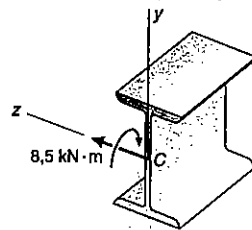


Fig. P4.21

4.22 Uma lâmina de aço, que originalmente estava reta, é montada sobre uma serra de fita, que passa sobre polias de 200 mm de diâmetro. Determinar a máxima tensão na lâmina, sabendo-se que ela tem uma espessura de 0,5 mm e uma largura de 16 mm. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

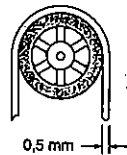


Fig. P4.22

4.23 Barras retas de 6 mm de diâmetro e 30 cm de comprimento são enroladas e armazenadas dentro de um tambor de 1,25 m de diâmetro interno. Considerando que a resistência ao escoamento não deve ser excedida, determinar: (a) a máxima tensão em uma barra enrolada; (b) o correspondente momento fletor em uma barra. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

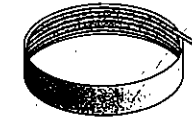


Fig. P4.23

4.24 Uma tira de aço de 900 mm de comprimento é encurvada, formando uma circunferência completa, por dois momentos aplicados como mostrado. Determinar: (a) a máxima espessura t da tira, se a tensão admissível do aço é 420 MPa; (b) os correspondentes momentos M aplicados. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

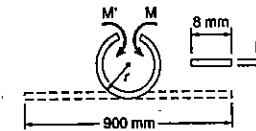


Fig. P4.24

4.25 Uma prancha de 38 mm \times 290 mm pode ser reforçada pregando-se firmemente dois blocos de 38 mm \times 38 mm, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 9,3 \text{ MPa}$ e $G = 12 \text{ GPa}$, determinar o maior momento que pode ser aplicado e o correspondente raio de curvatura para: (a) a prancha original, sem reforçadores; (b) a prancha reforçada com os blocos.

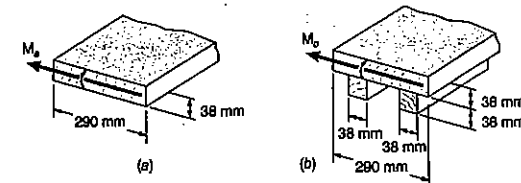


Fig. P4.25

4.26 Um momento M deve ser aplicado a uma viga de seção transversal retangular, que é serrado de um tarugo de seção transversal circular. Determinar o raio d/b , para que: (a) a máxima tensão σ_m seja a menor possível; (b) o raio de curvatura da viga seja máximo.

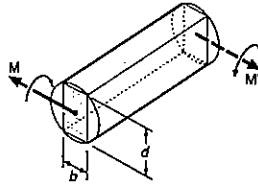


Fig. P4.26

4.27 Um tubo de parede grossa é encurvado, em torno de um eixo horizontal, por um momento M . O tubo pode ser projetado com ou sem as quatro aletas. Pede-se: (a) usando uma tensão admissível de 140 MPa, determinar o maior momento que pode ser aplicado, se o tubo for projetado com as quatro aletas; (b) resolver a parte a, considerando que o tubo é projetado sem nenhuma aleta.

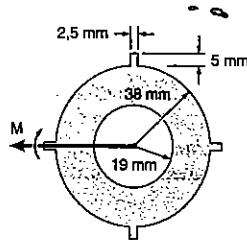


Fig. P4.27

4.28 Uma torção de uma barra quadrada é removida por fresagem, tal como é mostrado. A barra é então encurvada em torno de eixo horizontal diagonal por um momento M . Considerando o caso onde $h = 0,9h_0$, escrever a máxima tensão na barra na forma $\sigma_m = k\sigma_0$, onde σ_0 é a máxima tensão que poderá ocorrer, se a barra originalmente quadrada tiver sido encurvada pelo mesmo momento M , e determinar o valor de k .

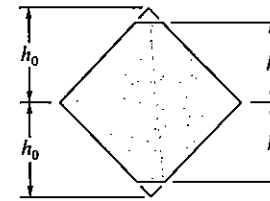


Fig. P4.28

4.29 No Prob. 4.28, determinar: (a) a variação dos valores de h para que $\sigma_m < \sigma_0$; (b) o valor de h para que a máxima tensão seja a menor possível e o correspondente valor de k .

4.30 Uma viga de aço de seção transversal mostrada é submetida a um momento M de 6 kN·m. Sabendo-se que $E = 200$ GPa e $\nu = 0,30$, determinar: (a) o raio de curvatura ρ ; (b) o raio de curvatura ρ' em um plano transversal; (c) o ângulo entre os lados originalmente verticais, da aba da viga.

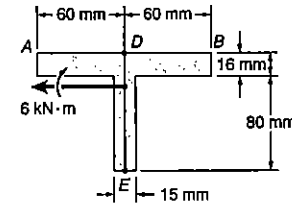


Fig. P4.30

4.31 Para a barra e carregamento do Exemplo 4.1, determinar: (a) o raio de curvatura ρ ; (b) o raio de curvatura ρ' num plano transversal; (c) o ângulo entre os lados originalmente verticais da barra. Usar $E = 200$ GPa e $\nu = 0,30$.

4.32 Um perfil laminado de aço W410×114 está sujeito a um momento M de 360 kN·m. Sabendo-se que $E = 200$ GPa e $\nu = 0,30$, determinar: (a) a variação da largura da aba superior; (b) a variação do comprimento da metade superior AC da alma do perfil.

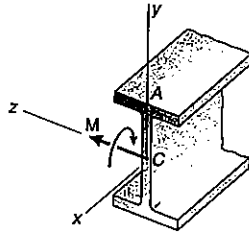


Fig. P4.32

4.33 Para a viga e carregamento do Prob. 4.30, determinar: (a) a variação da largura da borda superior AB da aba; (b) a variação do comprimento da linha de centro DE.

4.34 Foi assumido na Sec. 4.4, que as tensões normais σ_y em um membro em flexão pura são desprezadas. Para um membro elástico, de seção transversal retangular, inicialmente reto, pede-se: (a) derivar uma expressão aproximada para σ_y , como uma função de y ; (b) mostrar que $(\sigma_y)_{máx} \approx - (c/2\rho) (\sigma_x)_{máx}$ e, então, que σ_y pode ser desprezado em todas as situações práticas. [Sugestão: Considerar o diagrama de corpo livre da porção da viga localizada abaixo da superfície de ordenada y e assumir que a distribuição de tensões σ_x é sempre linear.]

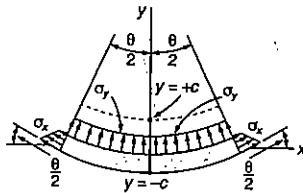


Fig. P4.34

4.7 FLEXÃO DE BARRAS CONSTITUÍDAS POR VÁRIOS MATERIAIS

As deduções feitas na Sec. 4.4 se baseiam na hipótese de material homogêneo com um certo módulo de elasticidade E . Se a barra submetida à flexão pura é feita de dois ou mais materiais, com diferentes módulos de elasticidade, o enfoque para a determinação das tensões na barra deve ser modificado.

Consideremos, por exemplo, uma barra constituída de duas partes de materiais diferentes, usadas como indica a Fig. 4.20. A barra composta vai se deformar como descreve a Sec. 4.3, uma vez que sua seção transversal se mantém a mesma em toda a extensão da peça, e uma vez que não foi adotada na Sec. 4.3 nenhuma condição que envolvesse a relação tensão-deformação do material envolvido. Desse modo, a deformação normal ϵ_x varia linearmente com a distância y do eixo neutro da seção (Figs. 4.21a e b), e a Fórm. 4.8 tem validade:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (4.8)$$

De qualquer modo, não podemos assumir que a linha neutra passa pelo centróide da seção transversal, e um dos objetivos de nossa análise será a determinação da localização desta linha.

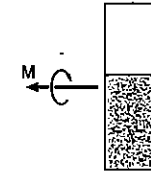


Fig. 4.20

As expressões para a determinação das tensões em cada material serão diferentes, pois seus módulos de elasticidade E_1 e E_2 são diferentes. Temos

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 \epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \\ \sigma_2 &= E_2 \epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho} \end{aligned} \quad (4.24)$$

e obtemos uma distribuição de tensões que leva a um diagrama que consiste em dois segmentos retilíneos (Fig. 4.21c). Das Eqs. 4.24, segue que a força dF_1 que se exerce em um elemento da área dA da parte superior da seção transversal é

$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \quad (4.25)$$

enquanto a força dF_2 que se exerce em um elemento de mesma área dA da parte inferior é

$$dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \quad (4.26)$$

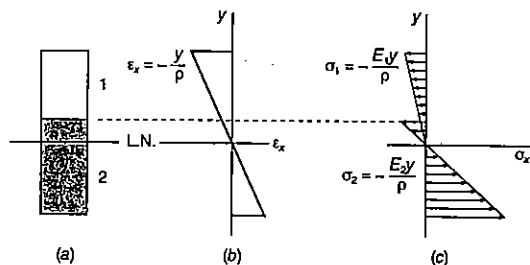


Fig. 4.21 Distribuição das tensões e deformações para uma barra composta de dois materiais.

Chamando de n a relação E_2/E_1 entre os dois módulos de elasticidade, podemos expressar dF_2 como

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} (n dA) \quad (4.27)$$

Comparando as Eqs. 4.25 e 4.27, podemos ver que a força dF_2 que se exerce no material da parte inferior da barra vai se exercer em uma área de valor $n dA$ do primeiro material. Em outras palavras, a resistência da barra à flexão permanece a mesma se ambas as partes forem feitas do primeiro material, desde que a largura de cada elemento da parte inferior seja multiplicada pelo fator n . Devemos notar que este alargamento (se $n > 1$) ou estreitamento (se $n < 1$), deve ser efetuado em uma direção paralela à linha neutra da seção transversal, pois é essencial que a distância y de cada elemento à linha neutra permaneça a mesma. A nova seção transversal assim obtida é chamada seção transformada da barra (Fig. 4.22).

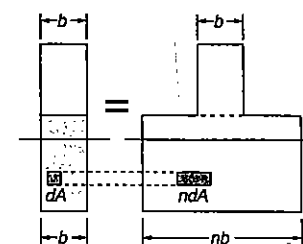


Fig. 4.22 Seção transformada da barra composta.

Como a seção transformada representa a seção transversal de uma barra feita de material homogêneo com módulo de elasticidade E_1 , o método descrito na Sec. 4.4 pode ser usado na determinação da posição da linha neutra, bem como na determinação da tensão normal em qualquer ponto dessa seção. A linha neutra será desenhada no centróide da seção transformada (Fig. 4.23), e a tensão σ_x em qualquer ponto da seção fictícia será obtida da Eq. 4.16

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (4.16)$$

onde y é a distância à superfície neutra e I é o momento de inércia da seção transformada em relação ao seu eixo centroidal.

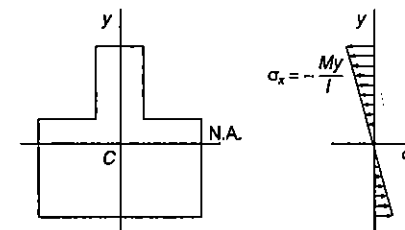


Fig. 4.23 Distribuição de tensões na seção transformada.

A tensão σ_1 de qualquer ponto localizado na parte superior da seção transversal da barra composta original pode ser calculada pela expressão de σ_x , tensão da seção transformada no mesmo ponto. Por outro lado, a tensão σ_2 de qualquer ponto localizado na parte inferior da barra composta original é igual à tensão σ_x da seção

transformada, multiplicada por n . Como vimos anteriormente, a mesma força elementar dF_2 se aplica à elementar $n dA$ da seção transformada e à área elementar dA da seção original. Desse modo, a tensão σ_2 em um ponto da seção original deve ser n vezes maior que a tensão no mesmo ponto da seção transformada.

As deformações de uma barra de seção composta também podem ser determinadas com o uso da seção transformada. Lembramos que a seção transformada representa a seção transversal de uma barra de material homogêneo de módulo de elasticidade E_1 , e que se deforma do mesmo modo que a barra composta. Então, usando a Eq. 4.21, escrevemos a expressão da curvatura da barra composta:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

onde I é o momento de inércia da seção transformada em relação à linha neutra.

EXEMPLO 4.3

Uma barra constituída de aço e latão ($E_a = 200$ GPa, $E_l = 100$ GPa) tem a seção indicada (Fig. 4.24). Determinar a máxima tensão no aço e no latão quando a barra fica sujeita à flexão pura com um momento $M = 2$ kN · m.

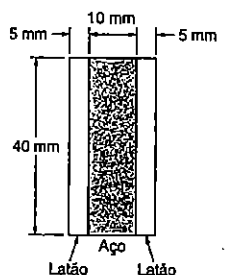


Fig. ex.4.24

A seção transformada que corresponde a uma barra equivalente feita inteiramente de latão está indicada na Fig. 4.25. Como

$$n = \frac{E_a}{E_l} = \frac{200 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa}} = 2$$

a largura da parte central de latão, que substitui a parte original de aço, é obtida quando se multiplica a largura inicial de 10 mm por 2.

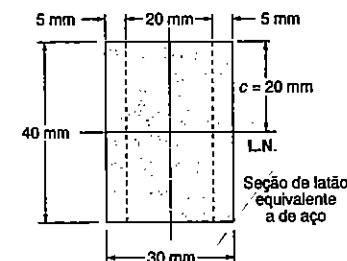


Fig. ex.4.25

É importante lembrar que a variação da dimensão ocorre na direção paralela à linha neutra. Calcula-se então o momento de inércia da seção transformada em relação ao eixo centroidal, que é

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (30 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3 = 160 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

A maior distância à linha neutra, de qualquer fibra da barra, é $c = 20$ mm. A Eq. 4.15 fornece o valor da tensão máxima na seção transformada:

$$\sigma_m = \frac{M c}{I} = \frac{(2 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{160 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 250 \text{ MPa}$$

O valor obtido representa também a máxima tensão na parte de latão da barra original. A máxima tensão na parte composta de aço será duas vezes maior que aquela encontrada para a seção transformada, uma vez que a parte central terá reduzida sua área pelo fator $n = 2$, quando retornarmos à seção original. Podemos então concluir que

$$\sigma_{(\text{latão})\text{máx}} = 250 \text{ MPa} \quad \sigma_{(\text{aço})\text{máx}} = 500 \text{ MPa}$$

Uma aplicação importante para as peças estruturais constituídas de dois materiais ocorre nas vigas de concreto armado. Essas vigas, quando estão submetidas a momentos fletores positivos, são reforçadas por barras de aço circulares, colocadas a uma pequena distância da face da viga (Fig. 4.26a). O concreto é um material pouco resistente à tração, ele trinca na região abaixo da superfície neutra, e as barras de aço passam a resistir todo o esforço interno de tração. O esforço interno de compressão é resistido pela porção de concreto que fica acima da superfície neutra.

Para obter a seção transformada de uma viga de concreto armado, substitui-se a área das barras de aço A_a por uma área equivalente $n A_a$, onde n é a relação E_a/E_c entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do concreto (Fig. 4.26b). Por outro lado, como o concreto resiste realmente só às tensões de compressão, aparece na seção transformada apenas a parte de concreto acima da linha neutra.

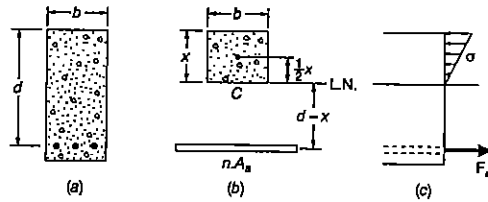


Fig. 4.26

A posição da linha neutra fica determinada pelo valor x , distância da fibra superior da viga ao centro de gravidade da seção transformada, ponto C . Chamemos de b à largura da viga e de d à distância da fibra superior da viga à linha do centro das barras de aço. Sabemos que o momento estático da seção transformada em relação à linha neutra deve ser nulo. Multiplicando as áreas das duas partes que constituem a seção transformada pela distância dos respectivos centróides à linha neutra, temos

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_a (d - x) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2} bx^2 + nA_a x - nA_a d = 0 \tag{4.28}$$

A solução dessa equação do 2º grau fornece a posição da linha neutra da viga, e mostra a parte de concreto que realmente será utilizada.

Para determinação das tensões na seção transformada, devemos seguir a mesma seqüência vista na Sec. anterior (v. Problema Resolvido 4.4). A Fig. 4.26c mostra a distribuição de tensões de compressão no concreto e a resultante F_a dos esforços de tração no aço.

4.8 CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

Na Sec. 4.4 deduzimos a Fórm. $\sigma = Mc/I$, que se aplica a uma barra que possui um plano de simetria e cuja seção transversal é uniforme. Na Sec. 4.5 vimos que essa fórmula se aplica a todas as seções ao longo da barra, desde que os conjugados M e

M' sejam aplicados por meio de placas rígidas e lisas. Sob outras condições de aplicação dos conjugados, ocorre concentração de tensões nas proximidades dos pontos de aplicação do carregamento.

Valores altos de tensão ocorrem também nos casos em que a seção transversal da barra sofre uma variação súbita. Dois casos de maior interesse foram estudados⁷, o caso de barras chatas com variação bruta na largura e o caso de barras chatas com entalhes. A distribuição de tensões nas seções transversais críticas depende apenas da forma geométrica da barra, de modo que é possível obter coeficientes de concentração de tensões para várias relações entre os parâmetros envolvidos. Esses coeficientes são relacionados nas Figs. 4.27 e 4.28. O valor da máxima tensão na seção crítica pode ser calculada por

$$\sigma_m = K \frac{Mc}{I} \tag{4.29}$$

onde K é o coeficiente de concentração de tensões, e c e I se referem à seção crítica, quer dizer, à seção de largura d , nos dois casos analisados aqui. Examinando as Figs. 4.27 e 4.28, percebemos a importância da utilização do raio r dos arredondamentos (ou adoçamentos) e entalhes tão grande quanto possível.

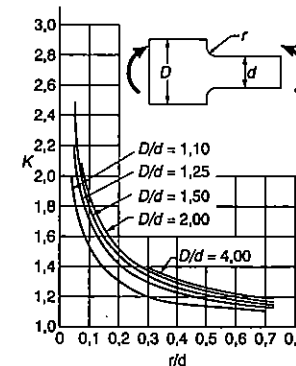


Fig. 4.27 Coeficientes de concentração de tensões para barras chatas com adoçamento sujeitas à flexão pura.

⁷ M. M. Frocht, "Photoelastic Studies in Stress Concentration", *Mechanical Engineering*, ago. 1936, pp. 485-489.

Finalizando, devemos lembrar que, como no caso das forças axiais e da torção, os valores de K foram obtidos com a hipótese de uma relação linear entre tensão e deformação. Em muitas aplicações práticas, ocorrem deformações plásticas, o que leva a valores de tensões máximas menores que aqueles dados pela Eq. 4.29.

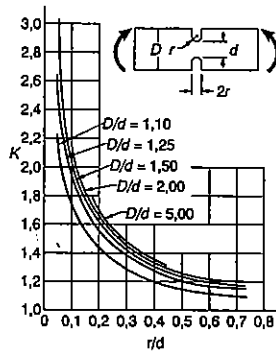


Fig. 4.28 Coeficientes de concentração de tensões para barras chatas com entalhes sujeitas à flexão pura.

EXEMPLO 4.4

Em uma barra de aço com 60 mm de largura e 9 mm de espessura serão executados entalhes de 10 mm de profundidade (Fig. 4.29). A tensão na barra não deve exceder a 150 MPa, com a aplicação de um momento fletor de 180 N · m. Determinar a menor largura admissível para os entalhes.

Da Fig. 4.29 temos

$$d = 60 \text{ mm} - 2(10 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

$$c = \frac{1}{2}d = 20 \text{ mm} \quad b = 9 \text{ mm}$$

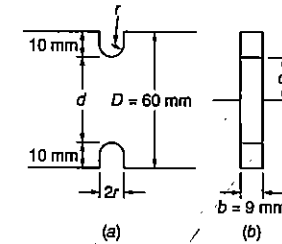


Fig: ex.4.29

O momento de inércia da seção crítica em relação à linha neutra é

$$I = \frac{1}{12}bd^3 = \frac{1}{12}(9 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3 = 48 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

O valor da tensão Mc/I é, então,

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180 \text{ N} \cdot \text{m})(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{48 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 75 \text{ MPa}$$

Levando esse valor à Eq. 4.29, com $\sigma_m = 150 \text{ MPa}$, temos:

$$150 \text{ MPa} = K(75 \text{ MPa})$$

$$K = 2$$

Temos também, por outro lado,

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1,5$$

Na Fig. 4.28, usando a curva correspondente a $D/d = 1,5$, encontramos, para $K = 2$, a relação $r/d = 0,1$. Temos então:

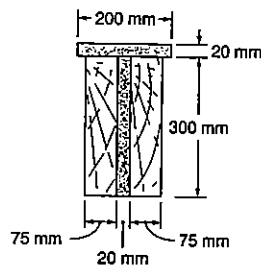
$$\frac{r}{d} = 0,1 \quad r = 0,1d = 0,1(40 \text{ mm}) = 4 \text{ mm}$$

A menor largura admissível para os entalhes é

$$2r = 2(4 \text{ mm}) = 8 \text{ mm}$$

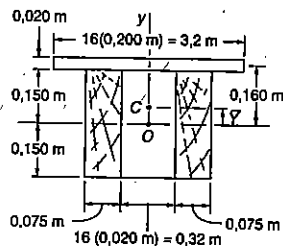
PROBLEMA RESOLVIDO 4.3

Um perfil metálico em forma de T foi reforçado, colando-se a ele duas vigas de madeira. O módulo de elasticidade da madeira é 12,5 GPa e o do aço é 200 GPa. Sabendo-se que a viga composta vai receber um momento fletor $M = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determinar: (a) a tensão máxima na madeira; (b) a tensão máxima no perfil de aço, na aba superior.



Seção transformada. Calculamos inicialmente a relação

$$n = \frac{E_a}{E_n} = \frac{200 \text{ GPa}}{12,5 \text{ GPa}} = 16$$



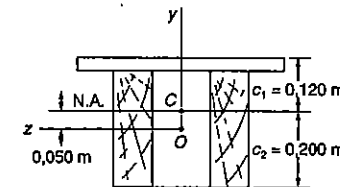
Obtemos então a seção transformada multiplicando as dimensões horizontais da parte metálica por $n = 16$. A seção obtida representa uma peça constituída inteiramente de madeira.

Linha neutra. A linha neutra passa pelo centróide da seção transformada. Como a seção consiste de dois retângulos, temos

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(0,160 \text{ m})(3,2 \text{ m} \times 0,020 \text{ m}) + 0}{3,2 \text{ m} \times 0,020 \text{ m} + 0,470 \text{ m} \times 0,300 \text{ m}} = 0,050 \text{ m}$$

Momento de inércia em relação ao eixo centroidal. Pelo teorema dos eixos paralelos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} (0,470)(0,300)^3 + (0,470 \times 0,300)(0,050)^2 \\ &\quad + \frac{1}{12} (3,2)(0,020)^3 + (3,2 \times 0,020)(0,160 - 0,050)^2 \\ I &= 2,19 \times 10^{-3} \text{ m}^4 \end{aligned}$$



(a) **Máxima tensão na madeira.** Na parte de madeira, o ponto mais afastado da linha neutra fica na face inferior da viga, onde $c_2 = 0,200 \text{ m}$

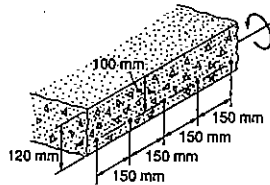
$$\sigma_m = \frac{M c_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,200 \text{ m})}{2,19 \times 10^{-3} \text{ m}^4} \quad \sigma_m = 4,57 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Tensão no aço.** Ao longo da face superior $c_1 = 0,120 \text{ m}$ da seção transformada, obtemos uma tensão equivalente na madeira, que deve ser multiplicada por n para se obter a tensão no aço.

$$\sigma_a = n \frac{M c_1}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,120 \text{ m})}{2,19 \times 10^{-3} \text{ m}^4} \quad \sigma_a = 43,8 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

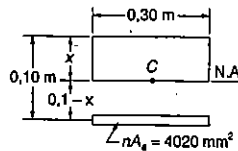
PROBLEMA RESOLVIDO 4.4

Uma laje de concreto tem barras de aço de 16 mm de diâmetro a cada 150 mm, colocadas a 20 mm acima da face inferior da laje. Os módulos de elasticidade são de 21 GPa para o concreto e de 210 GPa para o aço. Sabendo-se que um movimento fletor $4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ está aplicado à cada 30 cm de largura da laje, determinar: (a) a máxima tensão no concreto; (b) a tensão no aço.



Seção transformada. Consideremos uma parte da laje com 300 mm de largura, na qual existem duas barras de 16 mm de diâmetro, com área total de valor

$$A_a = 2 \left[\frac{\pi}{4} (16 \text{ mm})^2 \right] = 402 \text{ mm}^2$$

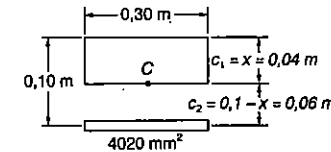


O concreto resiste apenas a tensões de compressão, de modo que as tensões de tração são resistidas pelo aço, o que leva a seção transformada a ser constituída de duas áreas indicadas.

Uma é a porção de concreto à compressão localizada acima da linha neutra, e a outra é a área transformada de aço nA_a . Temos então

$$n = \frac{E_a}{E_c} = \frac{210 \text{ GPa}}{21 \text{ GPa}} = 10$$

$$nA_a = 10(402) = 4020 \text{ mm}^2$$

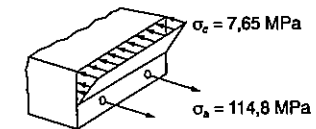


Linha neutra. A linha neutra da seção transversal da laje passa pelo centróide da seção transformada. Calculando o momento estático dessa seção em relação à linha neutra, temos

$$0,30x \left(\frac{x}{2} \right) - (4020 \times 10^{-6})(0,10 - x) = 0$$

$$x = 0,04 \text{ m}$$

Momento de inércia. O momento de inércia centroidal da seção transformada é



$$I = 1/3(0,30)(0,04)^3 + (4020 \times 10^{-6})(0,1 - 0,04)^2$$

$$I = 2,09 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

(a) **A máxima tensão no concreto.** Na face superior da laje temos $c_1 = 0,04 \text{ m}$, e

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,04 \text{ m})}{2,09 \times 10^{-5} \text{ m}^4} = 7,65 \text{ MPa}$$

(b) **Tensão no aço.** Para o aço, temos $c_2 = 0,06$ m e $n = 10$,

$$\sigma_a = n \frac{Mc_2}{I} = \frac{10(4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,06)}{2,09 \times 10^{-5} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_a = 114,8 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS

4.35 e 4.36 Duas barras de latão são unidas firmemente a duas barras de alumínio, formando a seção composta mostrada. Usando os dados abaixo, determinar o maior momento fletor permissível, quando a viga é encurvada em torno de um eixo horizontal.

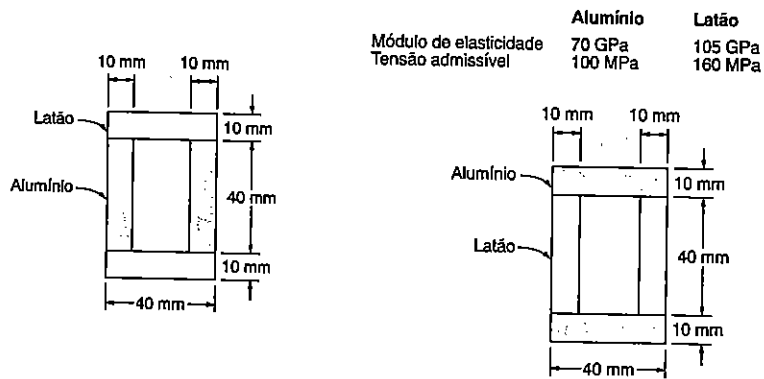


Fig. P4.35

Fig. P4.36

4.37 Para a seção composta do Prob. 4.36, determinar o maior momento fletor permissível, quando a viga é encurvada em torno de um eixo vertical.

4.38 Uma viga de madeira de 150 mm x 250 mm foi reforçada por duas chapas de aço parafusadas para formar a seção composta mostrada. Usando os dados abaixo, determinar o maior aumento fletor permissível, quando a viga é encurvada em torno de um eixo horizontal.

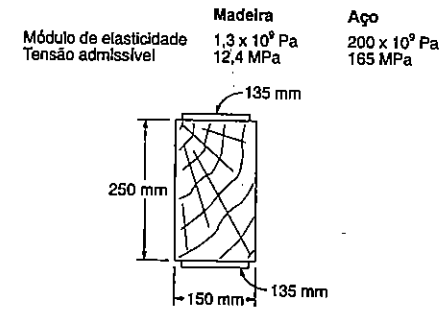


Fig. P4.38

4.39 Para a seção composta do Prob. 4.38, determinar o maior momento fletor permissível, quando a viga é encurvada em torno de um eixo vertical.

4.40 e 4.41 Uma barra de aço e uma de alumínio são unidas firmemente, para formar a viga composta mostrada. Os módulos de elasticidade para o alumínio é de 70 GPa e para o aço 200 GPa. Sabendo-se que a viga é curvada em torno de um eixo horizontal por um momento $M = 1500 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar a máxima tensão no: (a) alumínio; (b) aço.

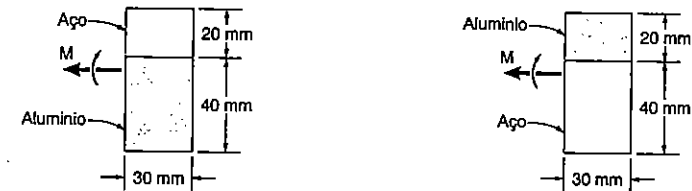


Fig. P4.40

Fig. P4.41

4.42 e 4.43 Uma viga de madeira de 150 x 300 mm foi reforçada, parafusando-se reforçadores de aço como mostrado. Os módulos de elasticidade para a madeira é 12 GPa e para o aço 200 GPa. Sabendo-se que a viga é encurvada em torno do eixo horizontal, por um momento $M = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determinar a máxima tensão na: (a) madeira; (b) aço.

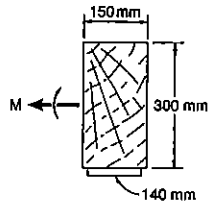


Fig. P4.42

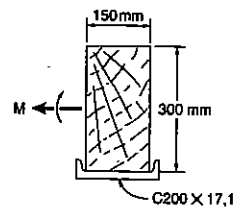


Fig. P4.43

4.44 Uma laje de concreto é reforçada por barras de aço de 16 mm de diâmetro, espaçadas de 140 mm, de centro a centro, como mostrado. Usando uma tensão admissível de 9,6 MPa para o concreto e de 138 MPa para o aço, determinar o maior momento fletor por metro de largura, que pode ser aplicado à laje.

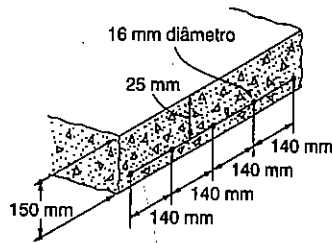


Fig. P4.44

4.45 Resolver o Prob. 4.44, considerando que o espaçamento das barras, de 16 mm de diâmetro, é aumentado para 190 mm.

4.46 Uma viga de concreto é reforçada por três barras de aço, colocadas como indicado. Os módulos de elasticidade são de 20 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço. Usando uma tensão admissível de 10 MPa para o concreto e de 150 MPa para o aço, determinar o maior momento fletor que pode ser aplicado à viga.

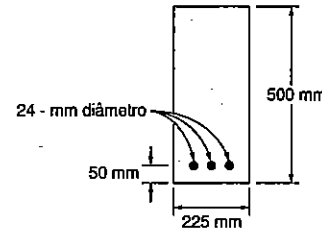


Fig. P4.46

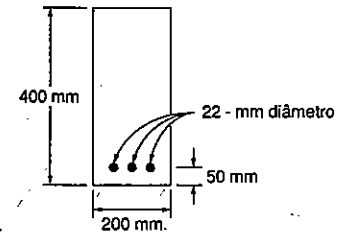


Fig. P4.47

4.47 A viga de concreto reforçada, como mostrado, é submetida a um momento fletor de 55 kN · m. Sabendo-se que os módulos de elasticidade são de 25 GPa para o concreto, e de 200 GPa para o aço, determinar: (a) a tensão no aço; (b) a máxima tensão no concreto.

4.48 Resolver o Prob. 4.47, considerando que a largura da viga de concreto é aumentada para 250 mm.

4.49 O projeto de uma viga reforçada de concreto é dito ser balanceado, se as máximas tensões no aço e no concreto são iguais às tensões admissíveis σ_a e σ_c , respectivamente. Mostrar que para um projeto balanceado, a distância x da superfície superior da viga até o eixo neutro é:

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_a E_c}{\sigma_c E_a}}$$

onde E_c e E_a são os módulos de elasticidade do concreto e do aço, respectivamente e d a distância da superfície superior da viga até os reforçadores de aço.

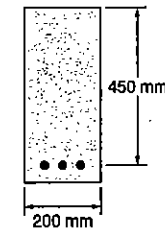


Fig. P4.49 e P4.50

4.50 Para a viga de concreto mostrada, os módulos de elasticidade são 24 GPa para o concreto e 200 GPa para o aço. Usando uma tensão admissível de 12,5 MPa para o concreto e 138 MPa para o aço, determinar: (a) a área necessária A_a para o reforço de aço, se o projeto da viga deve ser balanceado; (b) o maior momento fletor que pode ser aplicado à viga. (Veja o Prob. 4.49 para definição de uma viga balanceada.)

4.51 Para a viga composta mostrada no Prob. 4.41, determinar o raio de curvatura causado pelo momento fletor $M = 1500 \text{ N} \cdot \text{m}$.

4.52 Resolver o Prob. 4.51, considerando a viga composta do Prob. 4.40.

4.53 Para a viga composta do Prob. 4.43, determinar o raio de curvatura causado pelo momento fletor $M = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

4.54 Resolver o Prob. 4.53, considerando a viga composta do prob. 4.42.

4.55 e 4.56 Cinco tiras de metal, cada uma com 40 mm de largura, são firmemente unidas, de maneira a formar a viga composta mostrada. Os módulos de elasticidade são de 210 GPa para o aço, 150 GPa para o latão e 70 GPa para o alumínio. Sabendo-se que a viga é encurvada em torno de um eixo horizontal por um momento $M = 1800 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar a máxima tensão: (a) no aço; (b) no latão; (c) no alumínio; (d) também o raio de curvatura da viga.

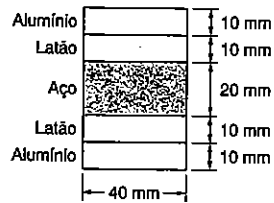


Fig. P4.55

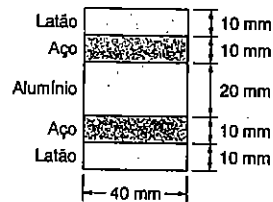


Fig. P4.56

4.57 Um tubo de aço e um de alumínio são firmemente unidos para formar a viga composta mostrada. Os módulos de elasticidade valem 200 GPa para o aço e 70 GPa para o alumínio. Para um momento fletor de $1,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determine a máxima tensão: (a) no alumínio; (b) no aço; (c) também determinar o raio de curvatura da viga.

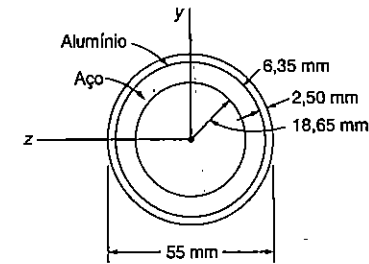


Fig. P4.57

4.58 Resolver o Prob. 4.57, considerando que 6,35 mm é a espessura do tubo interno, feito de alumínio, e que 2,50 mm é a espessura do tubo externo, feito de aço.

4.59 A viga retangular mostrada é feita de um plástico, cujo módulo de elasticidade à tração é metade do valor à compressão. Para um momento fletor de $1,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determinar a máxima: (a) tensão de tração; (b) tensão de compressão.

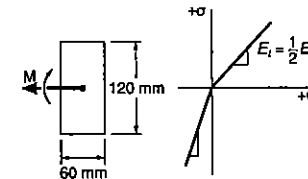


Fig. P4.59

*4.60 Uma viga retangular é feita de um material cujos módulos de elasticidade são E_t à tração e E_c à compressão. Mostrar que a curvatura na flexão pura é:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_r I}$$

onde:

$$E_r = \frac{4E_t E_c}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2}$$

4.61 Sabendo-se que a tensão admissível para a barra mostrada é 70 MPa, determinar o momento fletor admissível M , quando o raio r do adoçamento é: (a) 25 mm; (b) 12,5 mm.

4.62 Sabendo-se que $M = 1,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determinar a máxima tensão na barra mostrada, quando o raio r do adoçamento é: (a) 21 mm; (b) 7 mm.

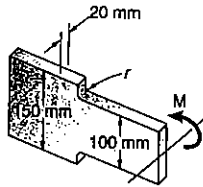


Fig. P4.61 e Fig. P4.62

4.63 Sabendo-se que $M = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar a máxima tensão no elemento de máquina mostrado, quando o raio r da porção semi-circular do entalhe é: (a) 5 mm; (b) 15 mm.

4.64 Sabendo-se que a tensão admissível no elemento de máquina mostrado é 90 MPa, determinar o momento fletor admissível, quando o raio r da porção semi-circular do entalhe é: (a) 10 mm; (b) 20 mm.

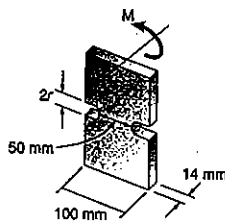


Fig. P4.63 e Fig. P4.64

4.65 Dois entalhes circulares de raio r devem ser fresados nas bordas superior e inferior de uma barra de aço. Usando uma tensão admissível de 100 MPa, determinar o maior momento fletor que pode ser aplicado à barra mostrada, quando o raio do entalhe for: (a) 5 mm; (b) 20 mm.

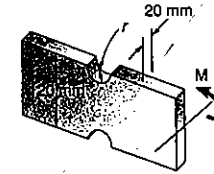


Fig. P4.65 e Fig. P4.66

4.66 Dois entalhes circulares de raio r devem ser fresados nas bordas superior e inferior de uma barra de aço. Sabendo-se que um momento $M = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado como mostrado, determinar a máxima tensão na barra para: (a) $r = 12 \text{ mm}$, (b) $r = 30 \text{ mm}$.

4.67 Um momento $M = 2,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ é aplicado na extremidade de uma barra de aço. Determinar a máxima tensão na barra se: (a) a barra é projetada com entalhes semi-circulares de $r = 12,5 \text{ mm}$, como mostrado na Fig. a; (b) a barra é reprojeta removendo-se o material, acima e abaixo das linhas tracejadas, como mostrado na Fig. b.

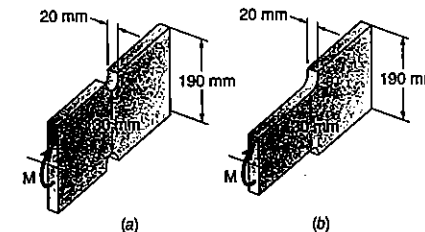


Fig. P4.67 e Fig. P4.68

4.68 A tensão admissível usada no projeto de uma barra de aço é 80 MPa. Determinar o maior momento M que pode ser aplicado na barra, se: (a) a barra é projetada com entalhes semi-circulares de $r = 20$ mm, como mostrado na Fig. a; (b) a barra é reprojetaada removendo-se o material, acima e abaixo das linhas tracejadas, como mostrado na Fig. b.

*4.9 DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS

Quando deduzimos a relação fundamental $\sigma = -My/I$ na Sec. 4.4, adotamos que a lei de Hooke poderia ser aplicada para qualquer ponto da barra. Desse modo, essa relação deixa de ter validade quando a tensão de escoamento é atingida e ultrapassada em algum ponto da peça. A relação também não pode ser aplicada para um material frágil, que tenha diagrama tensão-deformação não-linear. O objetivo desta seção é desenvolver um método mais geral para a determinação da distribuição das tensões em uma barra em flexão pura, mesmo quando não for válida a lei de Hooke.

Vamos inicialmente lembrar que não foi apontada nenhuma relação específica entre tensões e deformações quando, na Sec. 4.3, provamos que a deformação específica normal ϵ_x varia linearmente com a distância y à superfície neutra. Assim, essa propriedade pode ser usada na presente análise, e temos:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (4.10)$$

onde y representa a distância da superfície neutra ao ponto considerado, e c é o maior valor de y .

Não podemos, no entanto, assumir que, em certa seção transversal, o eixo neutro passe pelo centróide da seção, pois essa propriedade foi deduzida com a hipótese do material sofrer apenas deformações elásticas. De modo geral, a linha neutra será localizada por tentativas, até que se tenha uma distribuição de tensões que satisfaça às Eqs. 4.1 e 4.3 da Sec. 4.2. Para o caso particular de um material que tenha a mesma relação-deformação específica para a tração e compressão, vamos ter o eixo neutro coincidindo com o eixo centroidal se a barra tiver um plano de simetria horizontal e um plano de simetria vertical. Realmente, as propriedades do material exigem que as tensões sejam simétricas em relação à linha neutra, quer dizer, em relação a *algum* eixo horizontal, e é claro que essa condição só será satisfeita, junto à Eq. 4.1, se esse eixo horizontal coincidir com o eixo horizontal de simetria.

Nosso estudo, por enquanto, se limitará ao caso especial comentado acima. Assim, a distância y na Eq. 4.10 pode ser medida a partir do eixo z , que é o eixo de simetria horizontal da seção transversal, sendo a distribuição de deformações específicas ϵ_x linear e simétrica em relação ao eixo z (Fig. 4.30). Por outro lado, o diagrama tensão-deformação é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas (Fig. 4.31).

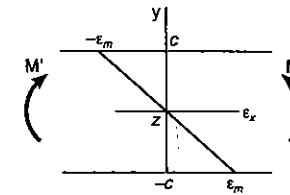


Fig. 4.30

Para se obter a distribuição de tensões na seção transversal da barra, isto é, o gráfico σ_x versus y , procede-se da seguinte maneira: assumindo o valor de $\sigma_{m\acute{a}x}$, inicialmente determinamos o valor ϵ_m correspondente no diagrama tensão-deformação, e levamos esse valor à Eq. 4.10. A seguir, para cada valor de y , podemos determinar ϵ_x , da Eq. 4.10 ou da Fig. 4.30. Levando esses valores de ϵ_x ao diagrama tensão-deformação, na Fig. 4.31, determinamos os diversos valores de σ_x , que marcados em correspondência a y nos levam à distribuição da Fig. 4.32.

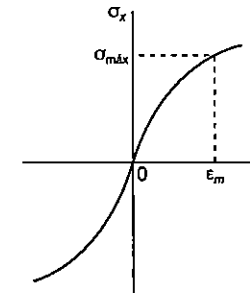


Fig. 4.31

Lembramos novamente que, por ocasião da dedução da Eq. 4.3, não foi adotada nenhuma relação particular entre tensões e deformações específicas. Podemos então utilizar essa equação para determinar o momento fletor M que corresponde à distribuição de tensões obtidas na Fig. 4.32. Considerando o caso particular de uma barra com seção transversal retangular, de largura b , podemos exprimir o elemento de área dA na Eq. 4.3 como $dA = bdy$, tendo então

$$M = -b \int_{-c}^c y \sigma_x dy \quad (4.30)$$

onde σ_x é função de y segundo o gráfico da Fig. 4.32. Como σ_x é função ímpar de y , podemos escrever a Eq. 4.30 na forma abaixo

$$M = -2b \int_0^c y \sigma_x dy \quad (4.31)$$

A integral da Eq. 4.31 pode ser determinada analiticamente, se conhecermos a expressão analítica de σ_x e ϵ_x , pois nesse caso a Eq. 4.10 pode ser usada para expressar σ_x como uma função de y . Em outro caso, o momento fletor M pode ser obtido por integração numérica. Podemos ver que a integral da Eq. 4.31 representa o momento estático, em relação ao eixo horizontal, da área limitada pela curva de distribuição de tensões que se localiza abaixo do eixo horizontal.

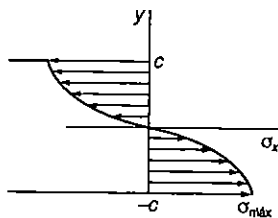


Fig. 4.32

Um valor importante do momento fletor é o momento fletor último M_U , que provoca a ruptura da barra. Seu valor pode ser determinado a partir da tensão última σ_U do material, que pode ser adotada igual a $\sigma_{máx}$, nos cálculos anteriores. Na prática, é mais conveniente determinar-se M_U , experimentalmente, para um corpo de prova do material dado. Adotando então uma distribuição de tensões fictícia, linear, usa-se a Eq. 4.15 para o cálculo da tensão máxima correspondente R_B :

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \quad (4.32)$$

A tensão fictícia R_B é chamada *módulo de ruptura na flexão* para o material dado. O módulo de ruptura pode ser usado na determinação do momento fletor último de uma barra feita do mesmo material do corpo de prova, e que tenha a mesma forma de seção transversal, com outras dimensões. Usamos a Eq. 4.32 nessa determinação, encontrando M_U . A Fig. 4.33 mostra a distribuição real e a distribuição fictícia de tensões em uma barra de seção retangular. Como os dois casos devem levar ao mesmo

valor de M_U , as áreas definidas pelas duas distribuições de tensões devem ter o mesmo momento estático em relação ao eixo horizontal. Vemos assim que o módulo de ruptura R_B será sempre maior que a tensão real última σ_U .

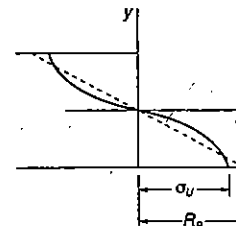


Fig. 4.33

*4.10 BARRAS CONSTITUÍDAS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

Com o objetivo de proporcionar uma idéia do comportamento plástico de uma barra em flexão, vamos considerar o caso de uma barra feita de material elastoplástico, considerando que ela tenha seção transversal retangular de largura b e altura $2c$ (Fig. 4.34). Como vimos na Sec. 2.18, o diagrama tensão-deformação específica de um material elastoplástico ideal é aquele indicado na Fig. 4.35.

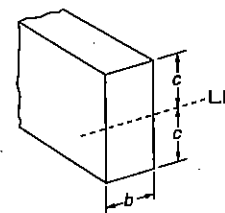


Fig. 4.34

Enquanto a tensão normal σ_x não excede o valor da tensão de escoamento σ_e , a lei de Hooke pode ser aplicada, e a distribuição de tensões ao longo da seção transversal é linear (Fig. 4.36a). O máximo valor da tensão normal é obtido da Eq. 4.15:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (4.15)$$

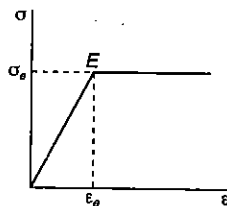


Fig. 4.35

Aumentando-se o valor do momento fletor, σ_m atinge o valor σ_e (Fig. 4.36b). Substituindo esse valor na Eq. 4.15, determinamos o valor M_e do momento fletor no início do escoamento:

$$M_e = \frac{I}{c} \sigma_e \quad (4.33)$$

O momento M_e é chamado *máximo momento elástico*, por ser o maior valor de momento para o qual as deformações se mantêm totalmente elásticas. Para a seção retangular que analisamos, temos:

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3} bc^2 \quad (4.34)$$

e escrevemos

$$M_e = \frac{2}{3} bc^2 \sigma_e \quad (4.35)$$

Se o momento fletor aumentar mais de valor, aparecem zonas plastificadas na barra, que apresentam tensões uniformes e iguais a $-\sigma_e$ na parte superior e $+\sigma_e$ na parte inferior da barra (Fig. 4.36c). Entre as regiões plastificadas, permanece um núcleo de material em estado elástico, para o qual a tensão varia linearmente com a distância y à linha neutra.

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_e}{y_e} y \quad (4.36)$$

onde y_e representa metade da espessura do núcleo elástico. Se M aumentar mais, a região plastificada se expande, até que, no limite, as deformações são totalmente plásticas (Fig. 4.36d).

Vamos usar a Eq. 4.31 para determinarmos o valor do momento fletor M que corresponde a certa espessura $2y_e$ do núcleo elástico. Sabemos que σ_x é dado pela Eq. 4.36 quando $0 \leq y \leq y_e$, e é igual a $-\sigma_e$ para $y_e \leq y \leq c$. Escrevemos então

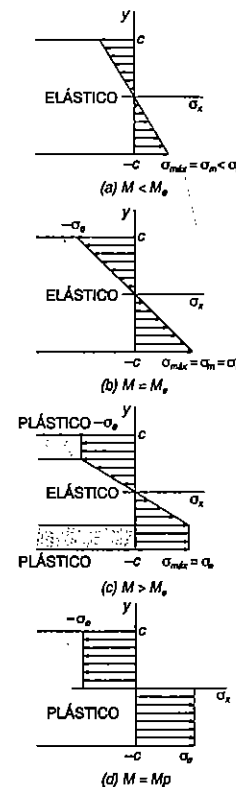


Fig. 4.36

$$M = -2b \int_0^{y_e} y \left(-\frac{\sigma_e}{y_e} \right) dy - 2b \int_{y_e}^c y(-\sigma_e) dy$$

$$= \frac{2}{3} b y_e^2 \sigma_e + b c^2 \sigma_e - b y_e^2 \sigma_e$$

$$M = b c^2 \sigma_e \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_e^2}{c^2} \right) \quad (4.37)$$

ou, tendo em vista a Eq. 4.35.

$$M = \frac{3}{2} M_e \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_e^2}{c^2} \right) \quad (4.38)$$

onde M_e é o máximo momento elástico. Podemos notar que quando y_e tende a zero, o momento fletor se aproxima do valor limite

$$M_p = \frac{3}{2} M_e \quad (4.39)$$

Esse valor de momento fletor, que corresponde a uma seção totalmente plastificada (Fig. 4.36d), é chamado *momento plástico* da barra considerada. É importante lembrar que a Eq. 4.39 só é válida para barras de seção retangular constituídas de material elastoplástico.

A distribuição de deformações específicas ao longo da seção transversal permanece linear após o início do escoamento. Desse modo, a Eq. 4.8 da Sec. 4.3 permanece válida e pode ser usada na determinação da semi-espessura y_e do núcleo elástico. Temos

$$y_e = \epsilon_e \rho \quad (4.40)$$

onde ϵ_e é a deformação específica de escoamento e ρ é o raio de curvatura que corresponde a um momento fletor $M \geq M_e$. Quando o momento fletor é igual a M_e , temos $y_e = c$ e a Eq. 4.40 leva a

$$c = \epsilon_e \rho_e \quad (4.41)$$

onde ρ_e é o raio de curvatura que corresponde ao momento elástico máximo M_e . Dividindo membro a membro as Eqs. 4.40 e 4.41, obtemos a relação⁸

⁸ A Eq. 4.42 se aplica a qualquer barra de material dútil com ponto de início de escoamento bem definido, uma vez que sua dedução não depende da forma da seção transversal da barra e da forma do diagrama tensão-deformação específica antes do ponto de escoamento.

$$\frac{y_e}{c} = \frac{\rho}{\rho_e} \quad (4.42)$$

Substituindo o valor de y_e/c dessa equação na Eq. 4.38, podemos exprimir o momento fletor M como uma função do raio de curvatura ρ da superfície neutra:

$$M = \frac{3}{2} M_e \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{\rho_e^2} \right) \quad (4.43)$$

É importante lembrarmos que a Eq. 4.43 só se aplica depois de ocorrido o escoamento, para valores de M maiores que M_e . Para $M < M_e$ deve ser usada a Eq. 4.21 da Sec. 4.4.

A Eq. 4.43 nos mostra que o momento fletor atinge o valor $M_p = (3/2)M_e$ só no caso em que $\rho = 0$. Como não poderemos ter raio de curvatura nulo em todo ponto da superfície neutra, concluímos que uma deformação plástica que tome toda a seção transversal não pode ocorrer na flexão pura. Como veremos mais à frente, no Capítulo 5, essa situação pode ocorrer em um ponto, no caso de vigas com carregamento transversal ao eixo.

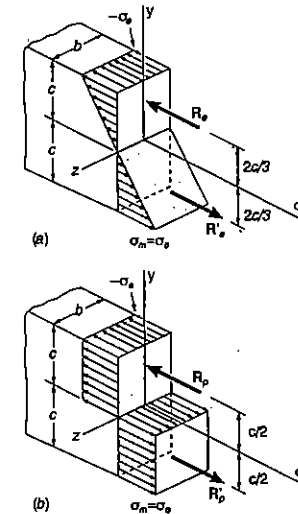


Fig. 4.37

A Fig. 4.37 representa, em três dimensões, as distribuições de tensões que correspondem ao máximo momento elástico M_e e ao caso limite do momento plástico M_p . Nos dois casos, as resultantes das forças elementares de tração e compressão devem passar pelo baricentro dos volumes que representam as distribuições de tensões. Do mesmo modo, essas resultantes devem representar, em intensidade, o valor dos volumes definidos pelas distribuições de tensões. Temos então,

$$R_e = \frac{1}{2} bc \sigma_e \quad R_p = bc \sigma_e$$

Os conjugados correspondentes provocam momentos de valor:

$$M_e = \left(\frac{1}{3} c\right) R_e = \frac{2}{3} bc^2 \sigma_e \quad (4.44)$$

$$M_p = c R_p = bc^2 \sigma_e \quad (4.45)$$

Verificamos assim que, para uma barra de seção transversal retangular, $M_p = 3/2 M_e$, como requer a Eq. 4.39.

Para vigas de seção não-retangular, podemos determinar os momentos M_e e M_p por um método de análise gráfica, como indica o Problema Resolvido 4.5. Para esse caso mais geral, se encontrará uma relação $k = M_p/M_e$ geralmente diferente de 3/2. Para formas estruturais, tais como perfis de abas largas, essa relação varia entre 1,08 e 1,14. Como depende apenas da forma da seção transversal, a relação $k = M_p/M_e$ se chama *fator de forma* da seção. Se forem conhecidos o fator de forma k e o máximo momento elástico M_e , podemos obter o momento plástico M_p pela multiplicação de M_e por k :

$$M_p = k M_e \quad (4.46)$$

A relação M_p/σ_e , que se obtém dividindo o momento plástico pela tensão de escoamento do material, é chamada de *módulo resistente da seção plastificada*, e é expresso por Z . Quando são conhecidos os valores do módulo resistente da seção plastificada, Z e da tensão de escoamento σ_e e o momento plástico M_p de uma viga pode ser obtido multiplicando-se σ_e por Z :

$$M_p = Z \sigma_e \quad (4.47)$$

Lembrando pela Eq. 4.18, onde temos $M_e = W \sigma_e$, podemos comparar esse valor com aquele dado pela Eq. 4.47. Vemos então que o fator de forma $k = M_p/M_e$ de uma certa seção pode ser expresso como sendo a relação entre os módulos resistentes da seção elástica e da seção plastificada:

$$k = \frac{M_p}{M_e} = \frac{Z \sigma_e}{W \sigma_e} = \frac{Z}{W} \quad (4.48)$$

Considerando o caso particular de uma viga de seção retangular com largura b e altura h , vemos pelas Eqs. 4.45 e 4.47 que o módulo resistente da seção plastificada da viga da seção retangular é

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_e} = \frac{bc^2 \sigma_e}{\sigma_e} = bc^2 = \frac{1}{4} bh^2$$

Mas a Eq. 4.19 da Sec. 4.4 dá o valor do módulo resistente da mesma viga, que é

$$W = \frac{1}{6} bh^2$$

Levando na Eq. 4.48 os valores de Z e W , vemos que o fator de forma de uma viga retangular é

$$k = \frac{Z}{W} = \frac{\frac{1}{4} bh^2}{\frac{1}{6} bh^2} = \frac{3}{2}$$

EXEMPLO 4.5

Uma barra de seção retangular de 50 por 120 mm está submetida à ação de um momento fletor $M = 36,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (Fig. 4.38). Supondo-se que a barra é constituída de um material elastoplástico, com tensão de escoamento de 240 MPa e módulo de elasticidade de 200 GPa, determinar: (a) a espessura do núcleo elástico; (b) o raio de curvatura da superfície neutra.

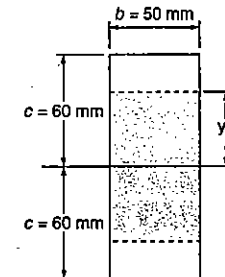


Fig. ex.4.38

(a) **Espessura do núcleo elástico.** Em primeiro lugar determinaremos o momento elástico M_e . Substituindo os dados na Eq. 4.34, temos

$$\frac{1}{c} = \frac{2}{3} bc^2 = \frac{2}{3} (50 \times 10^{-3} \text{ m})(60 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

e levando esse valor, juntamente com $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$, à Eq. 4.33, obtemos

$$M_e = \frac{I}{c} \sigma_e = (120 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(240 \text{ MPa}) = 28,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Substituindo agora os valores de M e M_e na Eq. 4.38, vamos ter

$$36,8 \text{ kN} \cdot \text{m} = \frac{3}{2} (28,8 \text{ kN} \cdot \text{m}) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_e^2}{c^2} \right)$$

$$\left(\frac{y_e}{c} \right)^2 = 0,444 \qquad \frac{y_e}{c} = 0,666$$

e, como $c = 60 \text{ mm}$,

$$y_e = 0,666(60 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

A espessura $2y_e$ do núcleo do elástico é então de 80 mm .

(b) **Raio de curvatura.** A deformação específica de escoamento é

$$\epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{240 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1,2 \times 10^{-3}$$

Resolvendo a Eq. 4.40 para obter ρ , e substituindo os valores obtidos de y_e e ϵ_e , vamos ter

$$\rho = \frac{y_e}{\epsilon_e} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{1,2 \times 10^{-3}} = 33,3 \text{ m}$$

*4.11 DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS EM BARRAS COM UM PLANO DE SIMETRIA

Em nosso estudo das deformações plásticas, consideramos até agora que as barras em flexão tinham dois planos de simetria, um deles contendo os conjugados \mathbf{M} e \mathbf{M}' e o

outro perpendicular ao primeiro. Analisaremos agora um caso mais geral, em que a barra possui apenas um plano de simetria, que contém os conjugados \mathbf{M} e \mathbf{M}' . No entanto, vamos limitar nosso estudo ao caso em que as deformações são totalmente plásticas, com a tensão normal uniforme e igual a $-\sigma_e$ acima da superfície neutra, e igual a $+\sigma_e$ abaixo dessa superfície (Fig. 4.39a).

Como frisamos na Sec. 4.8, o eixo neutro não coincide com o centróide da seção transversal quando essa seção transversal não é simétrica em relação à linha neutra. Para a localização do eixo neutro, consideremos a resultante \mathbf{R}_1 dos esforços elementares de compressão atuantes acima do eixo neutro, e a resultante \mathbf{R}_2 dos esforços de tração atuantes abaixo do eixo neutro. \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 atuam respectivamente nas áreas A_1 e A_2 (Fig. 4.39b). Esses resultados formam um binário equivalente ao conjugado aplicado à barra, e devem ser de mesma intensidade. Temos então $R_1 = R_2$, ou $A_1 \sigma_e = A_2 \sigma_e$, donde concluímos que $A_1 = A_2$. Em outras palavras, o eixo neutro divide a seção transversal em duas partes de áreas iguais. De modo geral, o eixo obtido dessa maneira não coincide com o eixo centróide.

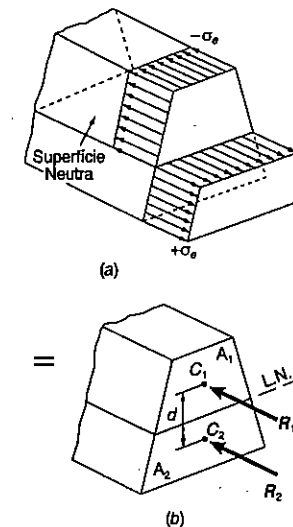


Fig. 4.39

Podemos observar que as linhas de ação das resultantes R_1 e R_2 passam pelos centróides C_1 e C_2 das duas partes que definimos. Sendo d a distância entre C_1 e C_2 , e A a área total da seção transversal, podemos exprimir o momento plástico da barra como

$$M_p = \left(\frac{1}{2} A \sigma_e\right) d$$

O Prob. Resolvido 4.6 dá um exemplo de cálculo do momento plástico em uma barra com apenas um plano de simetria.

*4.12 TENSÕES RESIDUAIS

Vimos nas Secs. anteriores que regiões de plastificação podem ocorrer nas barras fletidas se o momento fletor for suficientemente grande. Quando o momento fletor aplicado é retirado gradualmente, a redução correspondente das tensões e deformações em qualquer ponto pode ser representada por uma linha reta no diagrama tensão-deformação, como mostra a Fig. 4.40. Como veremos a seguir, a tensão final em alguns pontos poderá ser diferente de zero. Nesses pontos vai ocorrer tensão residual, que poderá ser de mesmo sinal ou de sinal contrário àquele do carregamento inicial.

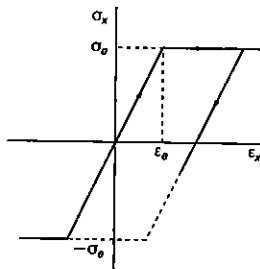


Fig. 4.40

Como existe uma relação entre σ_x e ϵ_x para todos os pontos da barra durante a fase de descarregamento, podemos usar a Eq. 4.16 para obter a variação da tensão em qualquer ponto. Em outras palavras, a fase de carregamento pode ser estudada supondo-se que o material está inteiramente em regime elástico.

As tensões residuais são obtidas pelo princípio da superposição, da mesma maneira como foi aplicado ao caso de cargas axiais na Sec. 2.19 e à torção na Sec. 3.11.

Vamos considerar, por um lado, as tensões devidas à aplicação do momento fletor dado M e, por outro lado, as tensões contrárias, devidas à aplicação do momento fletor $-M$, de descarregamento. O primeiro grupo de tensões descreve o comportamento *elastoplástico* do material durante a fase de carregamento, o segundo grupo reflete o comportamento *linear* do mesmo material durante a fase de descarregamento. Adicionando os dois grupos de tensões, vamos obter a distribuição das tensões residuais na barra.

EXEMPLO 4.6

Determinar, para a barra do Ex. 4.5: (a) a distribuição das tensões residuais; (b) o raio de curvatura depois que o momento fletor tiver decrescido de $36,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ para zero.

(a) **Distribuição das tensões residuais.** Através do Ex. 4.5 sabemos que a tensão de escoamento é $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$ e que a espessura do núcleo elástico é $2y_e = 80 \text{ mm}$. A distribuição de tensões na barra carregada é aquela mostrada na Fig. 4.41a.

A distribuição das tensões devidas ao momento de $36,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, da fase de descarregamento, é linear e está indicada na Fig. 4.41b. A tensão máxima σ'_m dessa distribuição foi calculada pela Eq. 4.15. No Ex. 4.5 encontramos $I/c = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, e escrevemos

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{36,8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{120 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 306,7 \text{ MPa}$$

Superpondo as distribuições de tensões, obtemos as tensões residuais indicadas na Fig. 4.41c. Verificamos que, apesar das tensões na fase de descarregamento terem excedido a tensão de escoamento σ_e , continua válida a hipótese de distribuição linear das tensões, pois não foi excedido o valor $2\sigma_e$.

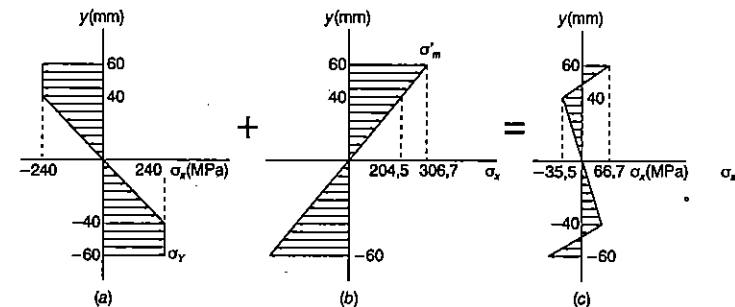


Fig. ex.4.41

(b) **Raio de curvatura após o descarregamento.** Podemos aplicar a lei de Hooke a qualquer ponto da barra dentro do núcleo, onde $|y| < 40$ mm, uma vez que não ocorreram tensões maiores que σ_e nessa região. Desse modo, a deformação específica a uma distância da linha neutra de 40 mm é

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35,5 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = -177,5 \times 10^{-6}$$

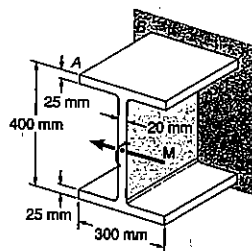
Determinando ρ na Eq. 4.8 com a substituição dos valores de y e ϵ_x obtemos

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{177,5 \times 10^{-6}} = 225 \text{ m}$$

O valor obtido para ρ depois que o carregamento foi removido representa uma deformação permanente da barra.

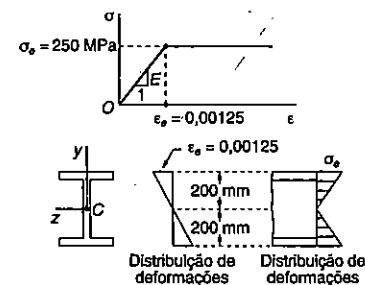
PROBLEMA RESOLVIDO 4.5

A viga AB foi fabricada com aço doce, que se supõe ser um material elastoplástico com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa e tensão de escoamento $\sigma_e = 250$ MPa. Determinar o valor do momento fletor M e o correspondente raio de curvatura: (a) no instante em que ocorre o escoamento; (b) quando as abas do perfil tiverem se tornado totalmente plastificadas.



(a) **Início do escoamento.** O momento de inércia em relação à linha neutra da seção é

$$I = \frac{1}{12}(0,30)(0,40)^3 - \frac{1}{12}(0,30 - 0,02)(0,35)^3 = 0,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$



Momento fletor. Para $\sigma_{\text{máx}} = 250$ MPa e $c = 0,20$ m temos

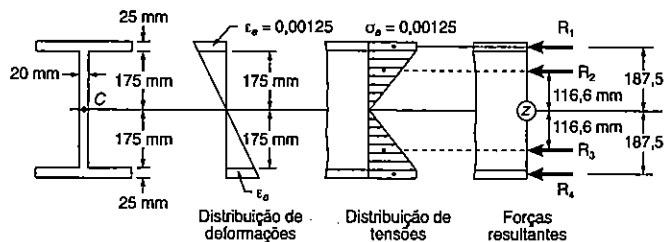
$$M_e = \frac{\sigma_e \cdot I}{c} = \frac{(250)(0,6 \times 10^{-3})}{0,20}$$

$$M_e = 750 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Raio de curvatura. Para $c = 0,20$ m, a deformação específica é $\epsilon_e = \sigma_e/E = (250)/(200 \times 10^3) = 0,00125$. Da Eq. 4.41, temos

$$c = \epsilon_e \cdot \rho_e \quad 0,2 = 0,00125 \rho_e \quad \rho_e = 160 \text{ m}$$

(b) **Abas totalmente plastificadas.** Após as abas estarem totalmente plastificadas, as tensões e deformações específicas na seção transversal se distribuem como indica a figura a seguir.



Vamos substituir os esforços internos de compressão nas abas e na parte superior da alma do perfil pelas forças resultantes R_1/R_2 e, analogamente, as de tração, por R_3 e R_4

$$R_1 = R_4 = (250 \times 10^3 \text{ kN/m}^2)(0,30)(0,025) = 1875 \text{ kN}$$

$$R_2 = R_3 = \frac{1}{2} (250 \times 10^3 \text{ kN/m}^2)(0,175)(0,02) = 438 \text{ kN}$$

Momento fletor. Somando os momentos de R_1, R_2, R_3 e R_4 em relação ao eixo z, podemos escrever

$$M = 2 [R_1(0,1875) + R_2(0,1166)]$$

$$M = 2 [(1875)(0,1875) + (438)(0,1166)]$$

$$M = 805 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

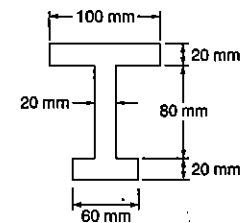
Raio de curvatura. Tendo $y_e = 0,175 \text{ m}$ para esse carregamento, a Eq. 4.40 leva a

$$y_e = \epsilon_e \rho \quad 0,175 = (0,00125) \rho$$

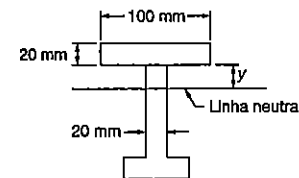
$$\rho = 140 \text{ m}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 4.6

Uma barra é constituída de material elasto-plástico com tensão de escoamento de 240 MPa, e tem a seção transversal indicada na figura. Determinar seu momento plástico.



Linha neutra. Quando a seção se torna totalmente plastificada, a linha neutra divide a seção transversal em duas partes de áreas iguais.



Sendo a área total

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4800 \text{ mm}^2$$

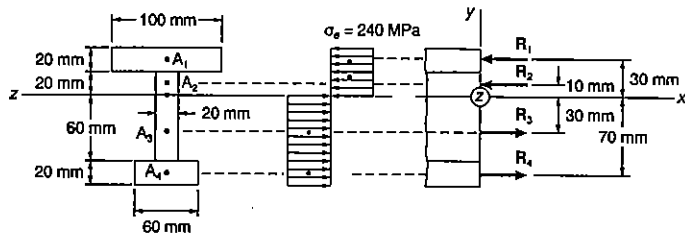
a área localizada acima da linha neutra deve ser 2400 mm². Podemos escrever

$$(20)(100) + 20y = 2400 \quad y = 20 \text{ mm}$$

A linha neutra neste caso não passa pelo centróide da seção transversal.

Momento plástico. A resultante R_i dos esforços internos elementares na parte da área A_i vale

$$R_i = A_i \sigma_e$$



e passa pelo centróide dessa parte. Temos então

$$R_1 = A_1 \sigma_e = [(0,100 \text{ m})(0,020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN}$$

$$R_2 = A_2 \sigma_e = [(0,020 \text{ m})(0,020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN}$$

$$R_3 = A_3 \sigma_e = [(0,020 \text{ m})(0,060 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

$$R_4 = A_4 \sigma_e = [(0,060 \text{ m})(0,020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

O momento plástico M_p pode ser obtido somando-se os momentos das forças em relação ao eixo z .

$$M_p = (0,030 \text{ m})R_1 + (0,010 \text{ m})R_2 + (0,030 \text{ m})R_3 + (0,070 \text{ m})R_4$$

$$= (0,030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0,010 \text{ m})(96 \text{ kN})$$

$$+ (0,030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0,070 \text{ m})(288 \text{ kN})$$

$$= + 44,16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_p = 44,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Nota: Como a seção não é simétrica em relação ao eixo z , a soma dos momentos de R_1 e R_2 não é igual à soma dos momentos de R_3 e R_4 .

PROBLEMA RESOLVIDO 4.7

Determinar, para a viga do Prob. Resolvido 4.5, as tensões residuais e o raio de curvatura permanente, depois que for removido o momento fletor $M = 805 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Carregamento. No Prob. Resolvido 4.5, o momento $M = 805 \text{ kN} \cdot \text{m}$ foi aplicado à viga, resultando na distribuição de tensões indicada na Fig. 1.

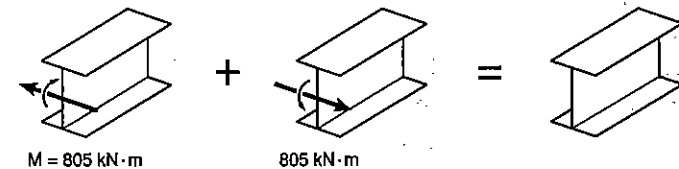
Descarregamento elástico. A viga é descarregada pela aplicação do momento fletor $M = -805 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (que é igual e de sentido contrário àquele originariamente aplicado). Durante a fase de descarregamento, o comportamento da viga é elástico; a tensão máxima pode ser calculada por (do Prob. Resolvido 4.5, $I = 0,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$):

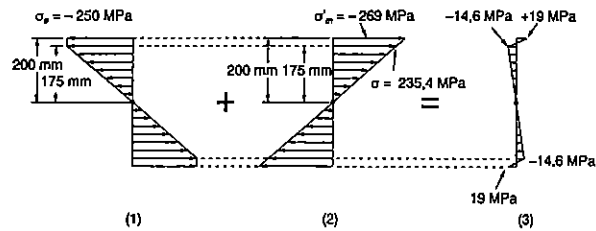
$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(805 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,20 \text{ m})}{0,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4} = 269000 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_m = 269 \text{ MPa}$$

As tensões causadas na fase de descarregamento estão na Fig. 2.

Tensões residuais. Superpondo as tensões obtidas na fase de carregamento e de descarregamento, obtemos as tensões residuais (Fig. 3).

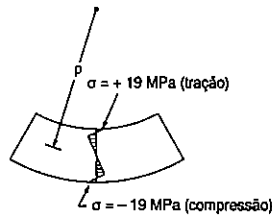




Raio de curvatura permanente. Na figura situada em $y = 0,175$ m, a tensão residual é de 14,6MPa. Como não ocorreu nenhuma deformação plástica neste ponto, a lei de Hooke pode ser aplicada, e temos $\epsilon_x = \sigma/E$. Utilizando a Eq. 4.8, escrevemos

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{-yE}{\sigma} = -\frac{(0,175 \text{ m})(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)}{-14,6 \times 10^3 \text{ kN/m}^2} = +2397 \text{ m}$$

$$\rho = 2397 \text{ m}$$



Vemos que a tensão residual é de tração na parte superior da viga e de compressão na parte inferior, apesar da concavidade da viga estar voltada para cima.

PROBLEMAS

4.69 Uma barra de seção transversal quadrada, como indicado, é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 240$ MPa. Determinar o momento fletor M , para que: (a) ocorra o início do escoamento; (b) as zonas plásticas, na parte superior e inferior, da barra tenham 3,8 mm de espessura.

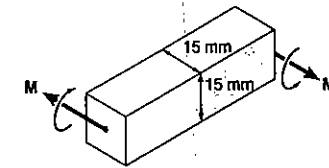


Fig. P4.69

4.70 Uma barra de seção transversal quadrada, como indicado, é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 300$ MPa. Determinar o momento fletor M , para que: (a) ocorra o início do escoamento; (b) as zonas plásticas, na parte superior e inferior, da barra tenham 12 mm de espessura.

4.71 A barra AB é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 240$ MPa. Determinar o momento fletor M , para que o raio de curvatura da barra seja: (a) 18 m; (b) 9 m.

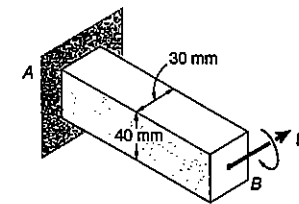


Fig. P4.70 e Fig. P4.71

4.72 A barra prismática AB é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. Para um momento de $150 \text{ N} \cdot \text{m}$, paralelo ao eixo z e aplicado na extremidade B, como mostrado, determinar: (a) a espessura do núcleo elástico; (b) o raio de curvatura da barra.

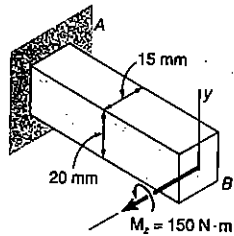


Fig. P4.72

4.73 Resolver o Prob. 4.72, considerando que o momento de $150 \text{ N} \cdot \text{m}$ é paralelo ao eixo y .

4.74 Uma barra prismática AB é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$. Sabendo-se que $M = 450 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar: (a) a espessura do núcleo elástico; (b) o raio de curvatura da barra.

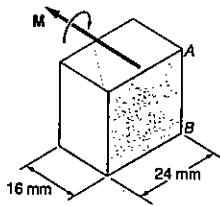


Fig. P4.74

4.75 Resolver o Prob. 4.74, considerando que $M = 550 \text{ N} \cdot \text{m}$.

4.76 e 4.77 Uma viga de seção transversal mostrada é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico, com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$. Por flexão em torno do eixo z , determinar o momento fletor e o raio de curvatura, para que: (a) ocorra o início do escoamento; (b) as zonas plásticas, superior e inferior, da viga tenham 25 mm de espessura.

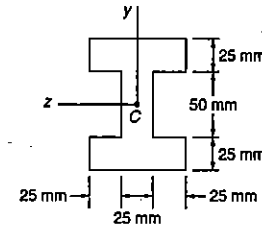


Fig. P4.76

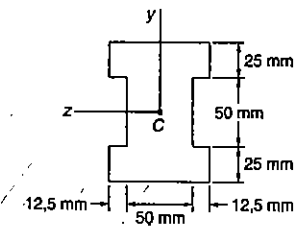


Fig. P4.77

4.78 e 4.79 Uma viga de seção transversal mostrada é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico, com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 300 \text{ MPa}$. Por flexão em torno do eixo z , determinar o momento fletor e o raio de curvatura, para que: (a) ocorra o início do escoamento; (b) as zonas plásticas, superior e inferior, da viga tenham 20 mm de espessura.

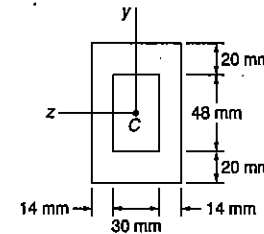


Fig. P4.78

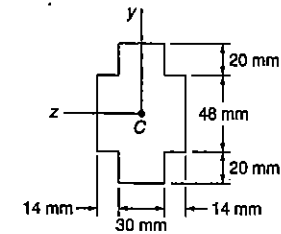


Fig. P4.79

4.80 Para a viga do Prob. 4.76, determinar: (a) o momento plástico M_p ; (b) o fator de forma da seção transversal.

4.81 Resolver o Prob. 4.80, considerando a viga do Prob. 4.77.

4.82 Resolver o Prob. 4.80, considerando a viga do Prob. 4.78.

4.83 Resolver o Prob. 4.80, considerando a viga do Prob. 4.79.

4.84 Determinar o momento plástico M_p , para uma viga de aço de seção transversal mostrada, considerando o aço ser elastoplástico, com tensão de escoamento igual a 300 MPa.

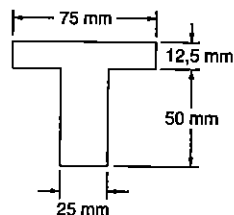


Fig. P4.84

4.85 Determinar o momento plástico M_p , para uma viga do Prob. 4.16, considerando que a viga é feita de um aço que é elastoplástico, com uma tensão de escoamento de 270

4.86 Determinar o momento plástico M_p , da viga do Prob. 4.3, considerando que o aço seja elastoplástico, com uma tensão de escoamento de 250 MPa.

4.87 Determinar o momento plástico M_p , de uma viga de aço de seção transversal mostrada, considerando o aço ser elastoplástico, com uma tensão de escoamento de 250 MPa.

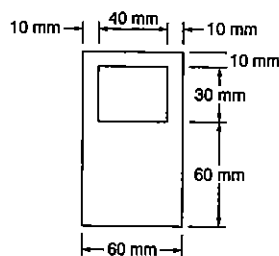


Fig. P4.87

4.88 e 4.89 Determinar o momento plástico M_p , de uma viga de aço de seção transversal mostrada, quando a viga é encurvada em torno do eixo horizontal. Assumir que o aço é elastoplástico, com uma tensão de escoamento de 200 MPa.

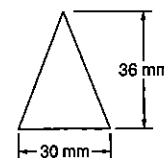


Fig. P4.88

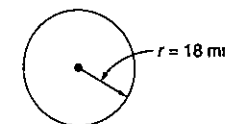


Fig. P4.89

4.90 Para a viga do Prob. 4.76, é aplicado um momento igual ao momento plástico M_p da viga e, depois removido. Usando uma tensão de escoamento de 290 MPa, determinar a tensão residual para: (a) $y = 25$ mm; (b) $y = 50$ mm.

4.91 Resolver o Prob. 4.90, considerando a viga do Prob. 4.77.

4.92 Para a viga do Prob. 4.78, um momento igual ao momento plástico M_p da viga é aplicado e, depois, removido. Usando uma tensão de escoamento de 300 MPa, determinar a tensão residual para: (a) $y = 24$ mm; (b) $y = 44$ mm.

4.93 Resolver o Prob. 4.92, considerando a viga do Prob. 4.79.

4.94 Um momento M é aplicado à viga do Prob. 4.76, em torno do eixo z , causando zonas plásticas de 25 mm de espessura na parte superior e inferior da viga. Depois do momento ser removido, determinar: (a) a tensão residual para $y = 50$ mm; (b) os pontos onde a tensão residual é nula; (c) o raio de curvatura correspondente à viga com a deformação permanente.

4.95 Resolver o Prob. 4.94, considerando a viga do Prob. 4.77.

4.96 Um momento M é aplicado na viga do Prob. 4.78 em torno do eixo z , causando zonas plásticas de 20 mm de espessura, na parte superior e inferior da viga. Depois do momento ser removido, determinar: (a) a tensão residual, para $y = 44$ mm; (b) os pontos onde a tensão residual é nula; (c) o raio de curvatura correspondente à viga com a deformação permanente.

4.97 Resolver o Prob. 4.96, considerando a viga do Prob. 4.79.

4.98 Uma barra maciça de seção retangular é feita de um material que é considerado ser elastoplástico. Expressando por M_e e ρ_e , respectivamente, o momento fletor e o raio de curvatura no início do escoamento, determinar: (a) o raio de curvatura quando um momento $M = 1,25M_e$ é aplicado à barra; (b) o raio de curvatura, depois do momento ser removido. Confrontar o resultado obtido, com o usado na relação desenvolvida no Prob. 4.101.

4.99 Resolver o Prob. 4.98, considerando que o momento aplicado à barra é $M = 1,45M_e$.

*4.100 A barra prismática AB é feita de um aço que é considerado ser elastoplástico, e com $E = 200$ GPa. Sabendo-se que o raio de curvatura da barra é $2,4$ m quando um momento $M = 350$ N·m é aplicado como mostrado, determinar: (a) a tensão de escoamento σ_e do aço; (b) a espessura do núcleo elástico da barra.

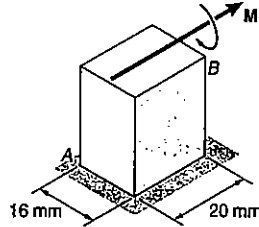


Fig. P4.100

*4.101 Uma barra retangular, inicialmente reta e sem tensão, é encurvada formando um arco de circunferência de raio ρ , por dois momentos M . Depois destes momentos serem removidos, nela foi observado que o raio de curvatura é ρ_R . Expressando por ρ_e o raio de curvatura da barra no início do escoamento, mostre que o raio de curvatura satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_e} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \right] \right\}$$

4.102 Uma barra prismática AB é feita de uma liga de alumínio, cujo diagrama tensão-deformação de tração é como mostrado. Considerando que o diagrama é o mesmo na compressão, como na tração, determine: (a) o raio de curvatura da barra, quando a máxima tensão é 250 MPa; (b) o correspondente valor do momento fletor. (Sugestão: Para a parte b, plotar σ versus y e usar um método aproximado de integração.)

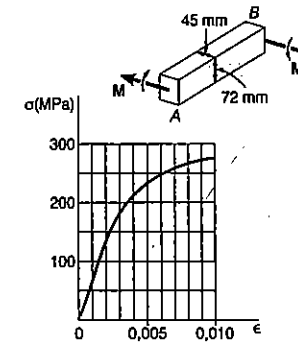


Fig. P4.102

4.103 Para a barra do Prob. 4.102, determine: (a) a máxima tensão, quando o raio de curvatura da barra for 4 m; (b) o correspondente valor do momento fletor. (Veja sugestão dada no Prob. 4.102.)

4.104 A barra prismática AB é feita de uma liga de alumínio cujo diagrama tensão-deformação de tração é como mostrado. Considerando que o diagrama é o mesmo na compressão, como na tração, determine: (a) a máxima tensão na viga, quando o raio de curvatura é 2 m; (b) o correspondente valor do momento fletor. (Veja sugestão dada no Prob. 4.102.)

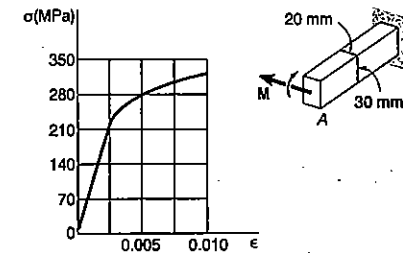


Fig. P4.104

4.105 Para a barra do Prob. 4.104, determinar: (a) o raio de curvatura da barra, quando a tensão máxima é 310 MPa; (b) o correspondente valor do momento fletor. (Veja sugestão dada no Prob. 4.102.)

4.106 Uma barra prismática de seção transversal retangular é feita de uma liga, para a qual o diagrama tensão-deformação pode ser representado pela relação, $\epsilon = k\sigma^n$ para $\sigma > 0$, e $\epsilon = -|k\sigma^n|$ para $\sigma < 0$. Se o momento M é aplicado à barra, mostrar que a tensão máxima é

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n} \frac{Mc}{I}$$

4.107 Uma barra prismática de seção transversal retangular é feita de uma liga cujo diagrama tensão-deformação, na tração e na compressão, pode ser representado pela relação $\epsilon = k\sigma^3$. Se um momento M é aplicado à barra, mostrar que a máxima tensão é

$$\sigma_m = \frac{7}{9} \frac{Mc}{I}$$

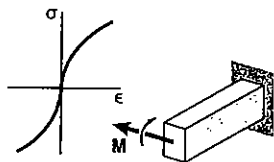


Fig. P4.106 e Fig. P4.107

4.13 CARREGAMENTO AXIAL EXCÊNTRICO EM UM PLANO DE SIMETRIA

Vimos na Sec. 1.2 que a distribuição de tensões em uma seção transversal de uma barra submetida à carga axial só pode ser considerada uniforme se as forças P e P' passarem pelo centróide da seção. Nesse caso, o carregamento se diz *centrado*. Vamos estudar agora o caso em que a linha de ação das forças aplicadas *não* passa pelo centro geométrico da seção, constituindo-se estas em carregamento *excêntrico*.

Nesta seção, vamos nos limitar a estudar barras que possuem um plano de simetria, e vamos adotar que as forças aplicadas estão nesse plano (Fig. 4.42a). Os esforços internos que agem em uma certa seção transversal podem ser representados pela força F , aplicada ao centróide C da seção, e o conjugado M que age no plano de simetria da barra (Fig. 4.42b). As condições de equilíbrio do corpo livre AC requerem que a força F seja igual e oposta a P' e que o momento conjugado M seja igual e oposto ao momento de P' em relação a C . A distância do centróide C à linha de ação AB das forças P e P' é d . Temos então

$$F = P \quad \text{e} \quad M = Pd \quad (4.49)$$

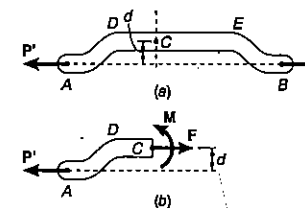


Fig. 4.42

Podemos observar que os esforços internos na seção seriam representados pela mesma força e momento, se a parte reta DE da barra AB tivesse sido destacada de AB , e submetida à ação simultânea das forças P e P' e dos conjugados M e M' (Fig. 4.43). Desse modo, a distribuição de tensões, devidas à carga excêntrica inicial pode ser obtida pela superposição da distribuição uniforme, que corresponde ao caso das forças P e P' aplicadas centradas, e da distribuição linear, provocada pela flexão dos conjugados M e M' (Fig. 4.44). Podemos escrever

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{força centrada}} + (\sigma_x)_{\text{flexão}}$$

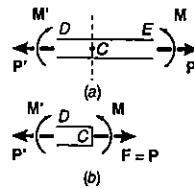


Fig. 4.43

ou retomando as Eqs. 1.1 e 4.16:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \quad (4.50)$$

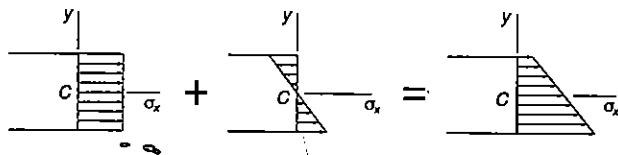


Fig. 4.44

onde A é a área da seção transversal e I seu momento de inércia centroidal, sendo y a distância de uma certa fibra da barra até o eixo que passa pelo centróide da seção transversal. A relação que foi obtida indica que a distribuição de tensões é *linear*, mas *não é uniforme*. Dependendo da forma da seção transversal, bem como da distância d da Fig. 4.42, as tensões superpostas podem ter todas o mesmo sinal, como na Fig. 4.44, ou podem ser positivas e negativas, como indica a Fig. 4.45. Neste último caso, haverá uma linha da seção transversal ao longo da qual a tensão $\sigma_x = 0$. Esta linha representa a linha neutra da seção. Vemos que a linha neutra não coincide com o eixo centroidal, pois $\sigma_x \neq 0$ quando $y = 0$.

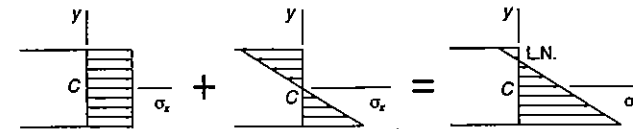


Fig. 4.45

Os resultados obtidos serão válidos apenas quando as condições de aplicabilidade do princípio da superposição (Sec. 2.12) e do princípio de Saint-Venant (Sec. 2.16) forem satisfeitas. Desse modo, as tensões que ocorrem não podem exceder o limite de proporcionalidade do material, as deformações provocadas pela flexão não podem alterar de maneira apreciável a distância d da Fig. 4.42, e a seção transversal em que se calcula as tensões não pode ficar muito perto dos pontos D e E (Fig. 4.42). A primeira dessas condições mostra claramente que o método de superposição não pode ser aplicado a materiais que sofram deformações plásticas quando da aplicação dos carregamentos.

EXEMPLO 4.7

Um elo de corrente aberto é obtido quando se flexiona uma barra de aço doce de 12 mm de diâmetro na forma indicada (Fig. 4.46). Sabendo-se que a corrente deve suportar uma carga de 800 N, determinar: (a) a tensão máxima de tração e de compressão, na parte reta do elo; (b) a distância entre os eixos centroidal e neutro, em uma certa seção transversal.

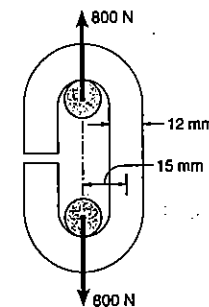


Fig. ex.4.46

(a) **Tensões máximas de tração e compressão.** Os esforços internos na seção transversal são equivalentes a uma força centrada P e a um momento fletor M (Fig. 4.47) de intensidades

$$P = 800 \text{ N}$$

$$M = Pd = (800 \text{ N})(0,015 \text{ m}) = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$$

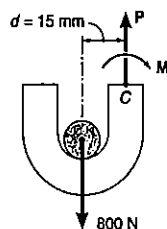


Fig. ex.4.47

A distribuição de tensões correspondente a cada efeito está representada nas partes a e b da Fig. 4.48. A distribuição devida à carga centrada P é uniforme e de valor $\sigma_0 = P/A$. Temos

$$A = \pi c^2 = \pi(0,006 \text{ m})^2 = 113,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{800 \text{ N}}{113,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 7,07 \text{ MPa}$$

A distribuição devida ao momento fletor M é linear com a tensão máxima $\sigma_m = Mc/I$. Temos

$$I = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi (0,006 \text{ m})^4 = 1,018 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(12 \text{ N} \cdot \text{m})(0,006 \text{ m})}{1,018 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 70,7 \text{ MPa}$$

Superpondo as duas distribuições vamos obter a distribuição de tensões que corresponde à carga excêntrica dada (Fig. 4.48c). Encontramos para a máxima tensão de tração e para a máxima tensão de compressão os seguintes valores:

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 7,1 + 70,7 = 77,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 + \sigma_m = 7,1 + 70,7 = -63,6 \text{ MPa}$$

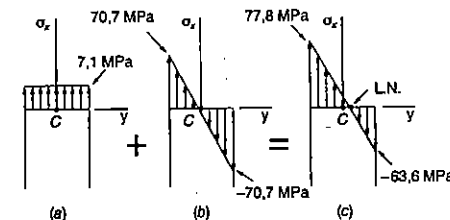


Fig. ex.4.48

(b) **Distância entre o eixo centroidal e a linha neutra.** A distância y_0 entre o eixo centroidal e a linha neutra é obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$ na Eq. 4.50, calculando-se:

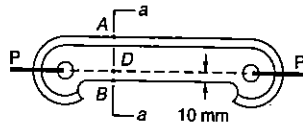
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$

$$y_0 = \left(\frac{P}{A}\right) \left(\frac{I}{M}\right) = (7,07 \text{ MPa}) \frac{1,018 \times 10^{-9} \text{ m}^4}{12 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

$$y_0 = 0,600 \text{ mm}$$

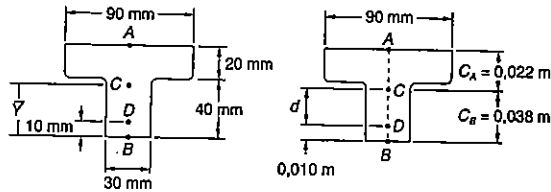
PROBLEMA RESOLVIDO 4.8

A peça indicada na figura é feita de ferro fundido e tem tensões admissíveis de 30 MPa à tração e de 120 MPa à compressão. Determinar a maior força P que pode ser aplicada à peça. (Nota: A seção em forma de T dessa peça já foi estudada no Prob. Resolvido 4.2.)



Área da seção transversal. Do Prob. 4.2 temos

$$A = 30 \text{ cm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \bar{Y} = 3,8 \text{ cm} = 0,038 \text{ m}$$



Temos agora

$$d = (0,038 \text{ m}) - (0,010) = 0,028 \text{ m}$$

Força e momento aplicados em C. A carga excêntrica P é substituída por um momento e uma força em C:

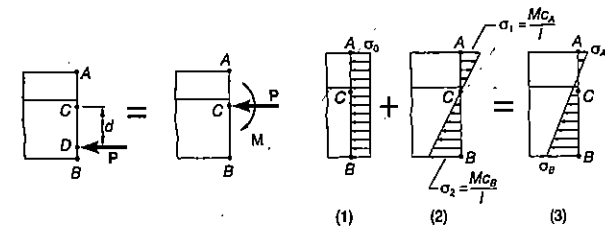
$$P = P \quad M = P(d) = P(0,028 \text{ m}) = 0,028P$$

A força P, atuando no centro geométrico da seção, provoca distribuição uniforme de tensões. O momento fletor M causa uma distribuição linear de tensões.

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333P \quad (\text{Compressão})$$

$$\sigma_1 = \frac{MC_A}{I} = \frac{(0,028P)(0,022)}{868 \times 10^{-9}} = 710P \quad (\text{Tração})$$

$$\sigma_2 = \frac{MC_B}{I} = \frac{(0,028P)(0,038)}{868 \times 10^{-9}} = 1226P \quad (\text{Compressão})$$



Superposição. A distribuição final de tensões é obtida pela superposição das distribuições de tensões devida à força centrada P e ao momento fletor M. A tração é positiva e a compressão é negativa. Temos então,

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333P + 710P = -377P \quad (\text{Tração})$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_B}{I} = -333P - 1226P = -1559P \quad (\text{Compressão})$$

Máxima força que pode ser aplicada. Determinamos a intensidade da força P que leva a uma tensão de tração igual ao valor admissível de 30 MPa, escrevendo:

$$\sigma_A = 377P = 30 \text{ MPa} \quad P = 79,6 \text{ kN}$$

Determinamos também a intensidade da força P que provoca tensão de compressão de valor igual à tensão admissível, de 120 MPa, escrevendo:

$$\sigma_B = -1559P = -120 \text{ MPa} \quad P = 77,0 \text{ kN}$$

A máxima força P que pode ser aplicada sem exceder as tensões admissíveis é o menor dos valores obtidos.

$$P = 77,0 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.108 Um pequeno bloco de madeira suporta uma carga axial de 27 kN, como indicado. Determinar a tensão no ponto A quando: (a) $b = 0$; (b) $b = 38$ mm; (c) $b = 76$ mm.

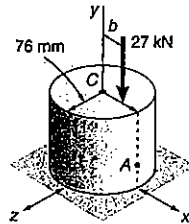


Fig. P4.108

4.109 Duas forças de 10 kN são aplicadas a uma barra retangular de 20 mm x 60 mm, como mostrado. Determinar a tensão no ponto A, quando: (a) $b = 0$; (b) $b = 15$ mm; (c) $b = 25$ mm.

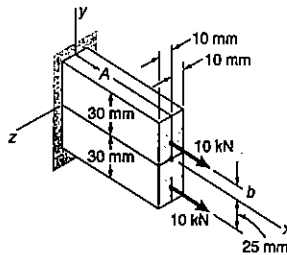


Fig. P4.109

4.110 Qualquer das três cargas axiais, de intensidade $P = 45$ kN podem ser aplicadas na extremidade de um perfil de aço laminado W200 x 31,3. Determinar a tensão no ponto A: (a) para o carregamento mostrado; (b) se apenas são aplicadas as cargas nos pontos 1 e 2.

4.111 Qualquer das três cargas axiais, de intensidade $P = 45$ kN podem ser aplicadas na extremidade de um perfil de aço laminado W200 x 31,3. Determinar a tensão no ponto A: (a) para o carregamento mostrado; (b) se apenas são aplicadas as cargas nos pontos 2 e 3.

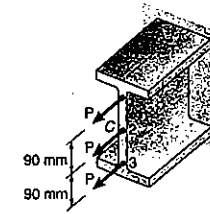


Fig. P4.110 e Fig. P4.111

4.112 Uma pequena coluna de 120 mm x 180 mm suporta três cargas axiais mostradas. Sabendo-se que a seção ABD é suficientemente afastada das cargas, para que permaneça plana, determinar a tensão no: (a) canto A; (b) canto B.

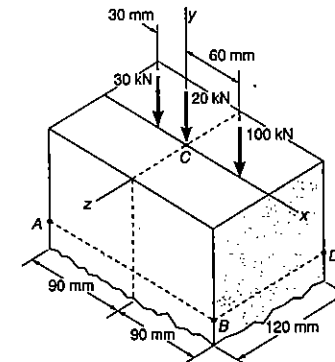


Fig. P4.112

4.113 Resolver o Prob. 4.112, assumindo que a carga de 20 kN é removida.

4.114 Um desvio h deve ser executado em uma barra circular maciça. Sabendo-se que a máxima tensão, depois desse desvio ser executado, não deve exceder três vezes a tensão na barra quando era reta, determinar: (a) o maior desvio que pode ser usado; (b) a correspondente tensão máxima na barra.

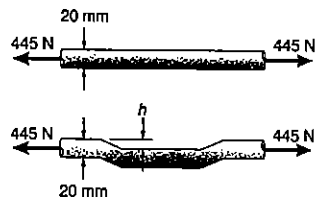


Fig. P4.114

4.115 Resolver o Prob. 4.114, considerando que a barra é substituída por um tubo de 20 mm de diâmetro externo e 16 mm de diâmetro interno.

4.116 Sabendo-se que a tensão admissível na seção ABD é 70 MPa, determinar a maior força P que pode ser aplicada ao suporte mostrado.

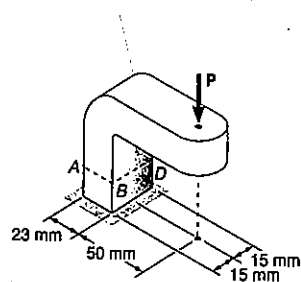


Fig. P4.116

4.117 Sabendo-se que a tensão admissível na seção $a-a$ é de 75 MPa, determinar a maior força que pode ser exercida sobre o garfo mostrado.

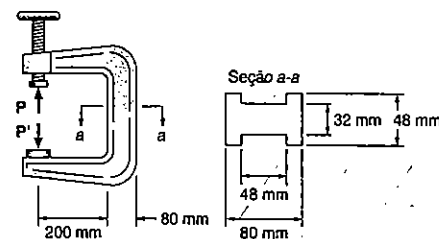


Fig. P4.117

4.118 As duas forças mostradas são aplicadas a uma placa rígida, suportada por um tubo de aço de 160 mm de diâmetro externo e 130 mm de diâmetro interno. Sabendo-se que a tensão admissível compressiva é de 75 MPa, determinar a variação de valores admissíveis para P .

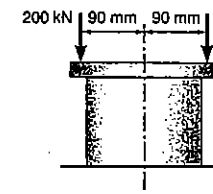


Fig. P4.118

4.119 Resolver o Prob. 4.118, considerando que a tensão admissível compressiva é reduzida para 60 MPa.

4.120 Sabendo-se que o grampo mostrado foi apertado até produzir $P = 400$ N, determinar: (a) a tensão no ponto A; (b) a tensão no ponto B; (c) a posição da linha neutra na seção $a-a$.

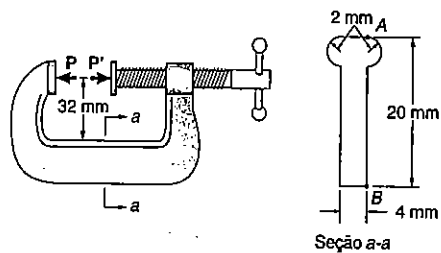


Fig. P4.120

4.121 Resolver o Prob. 4.120, considerando que o raio de cada um dos semi-círculos da seção transversal do grampo é aumentada de 2 mm para 3 mm.

4.122 A um bloco de madeira de 100 mm × 100 mm de seção transversal, são pregadas quatro pranchas de seção transversal 25 mm × 100 mm. Pede-se: (a) determinar a tensão compressiva no bloco, causada por uma carga axial centrada de 70 kN. Sabendo-se que, em cada um dos casos que se seguem, a carga axial de 70 kN é aplicada no centro da madeira 100 × 100 mm, determinar a maior tensão de compressão no bloco, se são removidas: (b) a prancha 1; (c) a prancha 1 e 2; (d) a prancha 1, 2 e 3; (e) todas as pranchas.

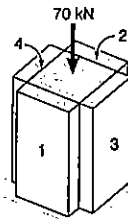


Fig. P4.122

4.123 Para que seja possível a entrada no interior de um tubo de seção quadrada de 6,35 mm de espessura, a porção BD de um dos lados do tubo foi removida. Sabendo-se que o carregamento no tubo é equivalente a duas forças axiais, iguais e

opostas, de 70 kN, atuando no centro geométrico A e E das extremidades do tubo, determinar: (a) a máxima tensão na seção a-a; (b) a tensão no ponto F. Dados: O centróide da seção transversal é o ponto C e $I = 2 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

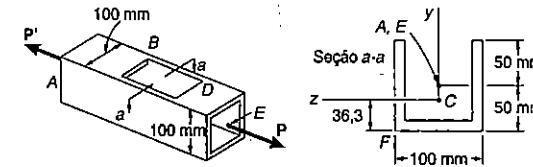


Fig. P4.123

4.124 Uma fresadora foi usada para remover uma porção de uma barra, ao longo de seu eixo. Sabendo-se que o diâmetro da barra é 20 mm, e que forças de 4 kN atuam nos centros das extremidades da barra, determinar: (a) a tensão no ponto A; (b) a tensão no ponto B; (c) a posição da linha neutra da seção a-a.

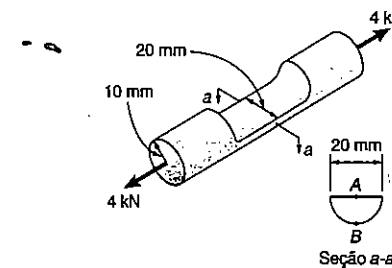


Fig. P4.124

4.125 O prisma plástico mostrado é carregado com uma força axial, atuando no ponto D de sua extremidade. Mostrar que as tensões nos pontos A e B são:

$$\sigma_A = 3\sigma_{méd}(1 - 2\alpha) \quad \sigma_B = 3\sigma_{méd}(-1 + 4\alpha)$$

onde: $\alpha = a/h$ e $\sigma_{méd} = P/(\frac{1}{2}bh)$.

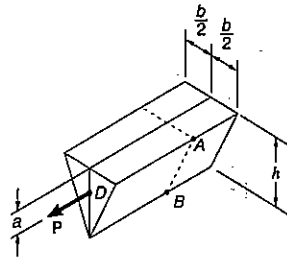


Fig. P4.125

4.126 Sabendo-se que a tensão admissível é 90 MPa, determinar a maior força P , que pode ser aplicada ao elemento de máquina mostrado.

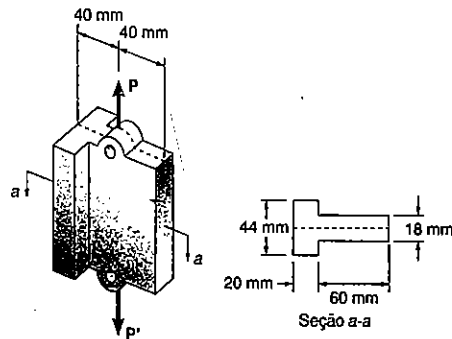


Fig. P4.126

4.127 Três placas de aço, cada uma com 20 mm x 140 mm de seção transversal, são soldadas juntas formando uma coluna curta, como indicado. No entanto, por razões arquitetônicas, um pedaço de 20 mm é removido de cada lado, de uma das abas. Sabendo-se que a carga permanece centrada, em relação à seção transversal original, e que a tensão admissível é de 150 MPa, determinar a maior força P que: (a) pode ser aplicada à coluna original; (b) pode ser aplicada à coluna modificada.

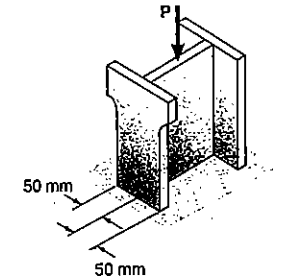


Fig. P4.127

4.128 Uma barra vertical é articulada no ponto A do suporte de ferro fundido mostrado. Sabendo-se que as tensões admissíveis do suporte são $\sigma_{adm} = +35$ MPa e $\sigma_{adm} = -80$ MPa, determinar a maior força orientada para baixo, e a maior orientada para cima, que pode ser exercida pela barra.

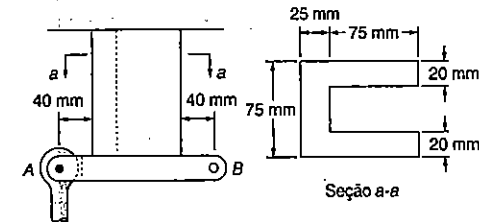


Fig. 4.128

4.129 Resolver o Prob. 4.128, considerando que a barra vertical é articulada no ponto B, ao invés do ponto A.

4.130 Uma força axial excêntrica P é aplicada, como mostrado, a uma barra de aço de 75 mm x 120 mm de seção transversal. As deformações em A e B foram medidas e acusaram os seguintes valores:

$$\epsilon_A = +600 \mu \quad \text{e} \quad \epsilon_B = +450 \mu$$

Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar: (a) a intensidade de P ; (b) a distância a da borda superior da barra até a linha de ação de P .

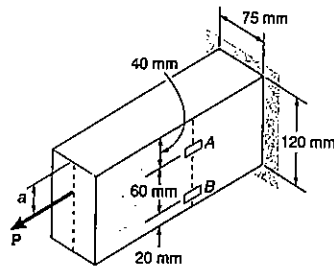


Fig. P4.130

4.131 Resolver o Prob. 4.130, considerando que as deformações medidas são:

$$\epsilon_A = +175 \mu \quad \text{e} \quad \epsilon_B = -50 \mu$$

4.132 Um perfil laminado de aço de W200 x 41, de pequeno comprimento, suporta uma placa rígida onde duas cargas P e Q são aplicadas como mostrado. As deformações nos dois pontos A e B, localizados sobre as faces externas das abas, foram medidas e são:

$$\epsilon_A = -550 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \text{e} \quad \epsilon_B = -680 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a intensidade de cada carga.

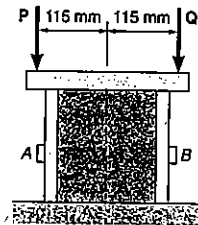


Fig. P4.132

4.133 Resolver o Prob. 4.132, considerando que as deformações medidas são:

$$\epsilon_A = +35 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \text{e} \quad \epsilon_B = -450 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

4.134 A força axial excêntrica P atua no ponto D, que está localizado a 30 mm abaixo da borda superior da barra de aço mostrada. Para $P = 90 \text{ kN}$, determinar: (a) a largura d da barra para que a tensão no ponto A seja a máxima; (b) o correspondente valor da tensão no ponto A.

4.135 Para a barra e o carregamento do Prob. 4.134, determinar a variação dos valores da largura d para que a tensão no ponto A seja de tração e igual ou menor que 30 MPa.

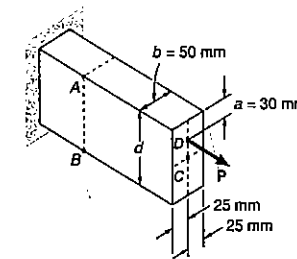


Fig. P4.134

4.14 FLEXÃO FORA DO PLANO DE SIMETRIA

Nossa análise de flexão pura se limitou até aqui às barras que possuem pelo menos um eixo de simetria, que estão submetidas a momentos flettores que atuam nesse plano de simetria. Devido à simetria dessas barras e de seu carregamento, podemos concluir que elas permanecem simétricas em relação ao plano de atuação dos momentos, e se flexionam nesse plano (Sec. 4.3). A Fig. 4.49 ilustra este fato, a parte a mostra a seção transversal de uma barra que possui dois planos de simetria, um vertical e outro horizontal, e a parte b mostra a seção transversal de uma barra com um plano de simetria, vertical. Nos dois casos o conjugado que flexiona a barra age no plano vertical de simetria da barra, e está representado pelo vetor momento M, horizontal. Nos dois casos, também, o eixo neutro da seção transversal coincide com o eixo do conjugado.

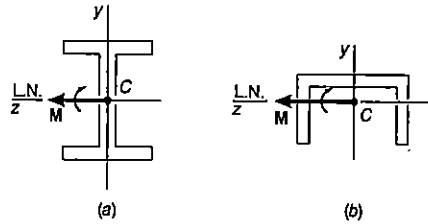


Fig. 4.49

Vamos considerar agora situações nas quais os conjugados que provocam flexão nas barras não agem em planos que coincidem com algum plano de simetria da barra, ou o caso de conjugados aplicados a barras que não possuem nenhum plano de simetria. Nessas situações, não podemos supor que a barra vá flexionar no plano de ação dos momentos. A Fig. 4.50 ilustra essas situações. Vamos adotar que os conjugados aplicados às barras atuam em planos verticais, sendo representados por vetores-momento horizontais M . Como o plano vertical não é um plano de simetria, não podemos esperar que a barra vá se flexionar nesse plano, ou que o eixo neutro da seção vá coincidir com o eixo do conjugado.

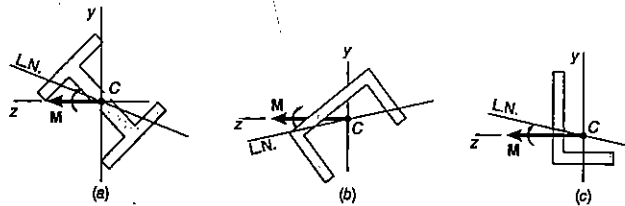


Fig. 4.50

Propomo-nos a determinar as condições sob as quais a linha neutra da seção transversal de qualquer forma coincide com o eixo do conjugado M , que representa os esforços que atuam na seção. Essa seção foi representada na Fig. 4.51, onde o vetor momento M e a linha neutra foram adotados dirigidos segundo o eixo z . Expressando agora que o sistema formado pelos esforços elementares internos é equivalente ao conjugado M , temos (Sec. 4.2):

$$\Sigma F_x = 0: \quad \int \sigma_x dA = 0 \quad (4.1)$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad \int z \sigma_x dA = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_z = M: \quad \int (-y \sigma_x dA) = M \quad (4.3)$$

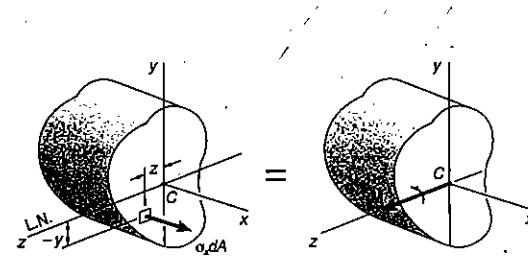


Fig. 4.51

Como já vimos anteriormente, a primeira das equações leva à conclusão de que o eixo neutro coincide com o eixo centroidal, desde que todas as tensões fiquem abaixo do limite de proporcionalidade. A última das relações acima levou-nos à relação fundamental $\sigma_x = M \cdot y / I$. A Eq. 4.2 não foi discutida na Sec. 4.2, uma vez que havíamos adotado que a seção era simétrica em relação ao eixo y . Agora estamos estudando uma seção transversal de forma qualquer, e a Eq. 4.2 se torna importante. Considerando que as tensões permaneçam abaixo do limite de proporcionalidade do material, podemos substituir, devido à distribuição linear das tensões, $\sigma_x = -\sigma_m y / c$. Levando essa expressão na Eq. 4.2, temos

$$\int z \left(-\frac{\sigma_m y}{c} \right) dA = 0$$

ou

$$\int yz dA = 0 \quad (4.51)$$

A integral na Eq. 4.51 representa o produto de inércia P_{yz} da seção transversal em relação aos eixos y e z , e será igual a zero se esses eixos forem os *eixos centrais de inércia da seção transversal*⁹. Desse modo, a linha neutra da seção vai coincidir com o eixo do conjugado M se, e somente se, o vetor momento M for dirigido segundo um dos eixos principais de inércia da seção.

As seções transversais indicadas na Fig. 4.49 são simétricas em relação a pelo menos um dos eixos coordenados. Nesse caso, o eixo y e o eixo z são os eixos principais centrais de inércia da seção. Como o vetor momento M está dirigido segundo um dos eixos principais, vemos que a linha neutra vai coincidir com o eixo do conjugado aplicado. Quando a seção transversal é girada de 90° (Fig. 4.52), o vetor momento M permanece dirigido segundo um eixo principal de inércia, de modo que a linha neutra vai coincidir de novo com o eixo do vetor momento, mesmo no caso *b*, em que o conjugado **não** atua em um plano de simetria da seção da barra.

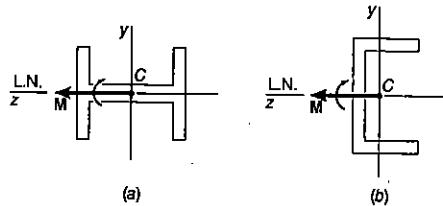


Fig. 4.52

Na Fig. 4.50, por outro lado, nenhum dos eixos coordenados é um eixo de simetria nas seções indicadas, e os eixos coordenados não são eixos principais. Assim, como o vetor momento M não é dirigido segundo um eixo principal, a linha neutra não vai coincidir com o eixo do conjugado. Todavia, toda seção possui eixos principais de inércia, mesmo sendo assimétrica, como aquela da Fig. 4.50c. Esses eixos podem ser determinados analiticamente, ou por meio do círculo de Mohr¹⁰. Se o vetor momento M estiver dirigido segundo um dos eixos principais, a linha neutra irá coincidir com o eixo do conjugado (Fig. 4.53) e as equações deduzidas nas Secs. 4.3 e 4.4 para barras simétricas podem ser usadas também na determinação das tensões do presente caso.

9 Ver Ferdinand P. Beer e E. Russell Johnston Jr. *Mecânica para Engenheiros*, 4ª ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 1984, ou *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, 5ª ed. São Paulo, Makron Books, 1994, secs. 9.7 a 9.9.

10 Idem, *ibidem*.

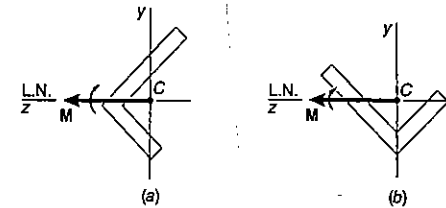


Fig. 4.53

Como veremos agora, o princípio da superposição pode ser aplicado na determinação da distribuição das tensões para o caso mais geral de flexão dos planos de simetria. Consideremos inicialmente uma barra que possui um plano vertical de simetria e que está submetida aos conjugados M e M' , que atuam em um plano que forma um ângulo θ com o plano vertical (Fig. 4.54). O vetor momento M que representa os esforços que atuam na seção transversal estudada vai formar o mesmo ângulo θ com o eixo horizontal z (Fig. 4.55). Decompondo o vetor M em dois vetores segundo as direções z e y , temos as seguintes expressões para M_z e M_y :

$$M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta \quad (4.52)$$

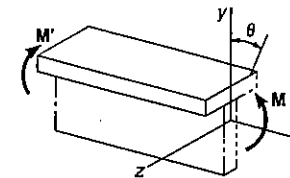


Fig. 4.54

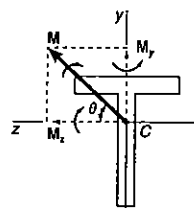


Fig. 4.55

Como y e z são os eixos principais de inércia da seção, podemos utilizar a Eq. 4.16 para determinar as tensões provocadas pela aplicação de qualquer dos conjugados representados por M_z ou M_y . O conjugado M_z atua em um plano vertical e vai flexionar a barra nesse plano (Fig. 4.56). As tensões resultantes são

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \quad (4.53)$$

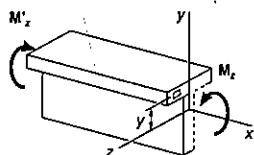


Fig. 4.56

onde I_z é o momento de inércia da seção em relação ao eixo principal centroidal z . O sinal negativo é devido ao fato de termos compressão acima do plano xz ($y > 0$) e tração abaixo desse plano ($y < 0$). Por outro lado, o conjugado M_y atua em um plano horizontal e flexiona a barra nesse plano (Fig. 4.57). As tensões resultantes são calculadas por

$$\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y} \quad (4.54)$$

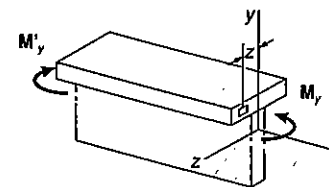


Fig. 4.57

onde I_y é o momento de inércia da seção em relação ao eixo centroidal y , e onde o sinal positivo se deve ao fato de que ocorre tração do lado esquerdo do plano vertical xy ($z > 0$) e compressão do lado direito ($z < 0$). A distribuição das tensões devidas à aplicação do conjugado original M se obtém pela superposição das distribuições das tensões definidas pelas Eqs. 4.53 e 4.54, respectivamente. Temos então

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (4.55)$$

Vemos que a expressão obtida pode também ser usada na determinação das tensões em uma seção assimétrica como aquela indicada na Fig. 4.58, uma vez que tenham sido determinados os eixos centroidais principais y e z . Por outro lado, a Eq. 4.53 só é válida dentro das condições impostas para a aplicação do princípio da superposição. Desse modo, ela só deve ser usada se as tensões combinadas não ultrapassarem o limite de proporcionalidade do material, ou se as deformações causadas por uma das componentes do conjugado não afetarem a distribuição de tensões da outra componente.

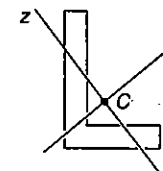


Fig. 4.58

A Eq. 4.55 mostra que a distribuição de tensões causadas pela flexão fora do plano de simetria é linear. Entretanto, como já dissemos, a linha neutra da seção vai

coincidir, de modo geral, com o eixo do conjugado. Como as tensões são nulas na linha neutra, podemos obter a equação dessa linha fazendo $\alpha_x = 0$ na Eq. 4.55. Escrevemos então:

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

ou, determinando y , com a substituição de M_z e M_y por seus valores dados na Eq. 4.52,

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \right) z \quad (4.56)$$

A equação que obtivemos é a equação de uma reta com declive $m = (I_z/I_y) \operatorname{tg} \theta$. Assim, o ângulo ϕ que a linha neutra forma com o eixo z (Fig. 4.59) é definido pela relação

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \quad (4.57)$$

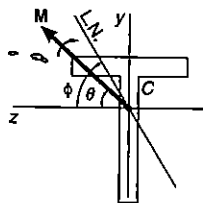


Fig. 4.59

Nessa relação, θ é o ângulo que o vetor momento M forma com o eixo z . Os ângulos ϕ e θ têm o mesmo sinal, uma vez que I_z e I_y são positivos. Além disso, vemos que $\phi > \theta$ quando $I_z > I_y$, e que $\phi < \theta$ quando $I_z < I_y$. Decorre aí que o eixo neutro está sempre localizado entre o vetor momento M e o eixo principal que corresponde ao mínimo momento de inércia.

EXEMPLO 4.8

Um conjugado de $200 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado a uma viga de madeira de seção retangular de 40 por 90 mm, em um plano que forma um ângulo de 30° com a vertical (Fig. 4.60). Determinar: (a) a tensão máxima na viga; (b) o ângulo que a superfície neutra forma com o plano horizontal.

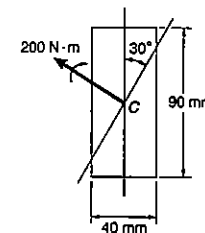


Fig. ex.4.60

(a) **Tensão máxima.** As componentes M_y e M_z do vetor momento são determinadas inicialmente (Fig. 4.61):

$$M_z = (200 \text{ N} \cdot \text{m}) \cos 30^\circ = 173,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = (200 \text{ N} \cdot \text{m}) \operatorname{sen} 30^\circ = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

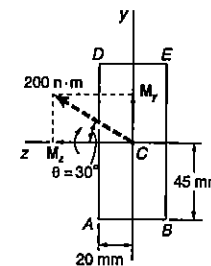


Fig. ex.4.61

Calculamos também os momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos y e z :

$$I_z = \frac{1}{12} (0,040 \text{ m})(0,090 \text{ m})^3 = 2,43 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (0,090 \text{ m})(0,040 \text{ m})^3 = 0,480 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

A maior tensão de tração provocada pelo momento M_z ocorre ao longo da aresta AB e vale

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(173,2 \text{ N} \cdot \text{m})(0,045 \text{ m})}{2,43 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3,21 \text{ MPa}$$

A maior tensão de tração provocada pelo momento M_y ocorre ao longo da aresta AD e vale

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(100 \text{ N} \cdot \text{m})(0,020 \text{ m})}{0,480 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 4,17 \text{ MPa}$$

Desse modo, a maior tensão de tração devida ao carregamento combinado ocorre em A e vale

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 3,21 + 4,17 = 7,38 \text{ MPa}$$

A maior tensão de compressão tem a mesma intensidade e ocorre no ponto E .

(b) **Ângulo formado pela superfície neutra e o plano horizontal.** O ângulo ϕ que a superfície neutra forma com o plano horizontal (Fig. 4.62) é o obtido na Eq. 4.57:

$$\text{tg } \phi = \frac{I_z}{I_y} \cdot \text{tg } \theta = \frac{2,43 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0,480 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \text{tg } 30^\circ = 2,92$$

$$\phi = 71,1^\circ$$

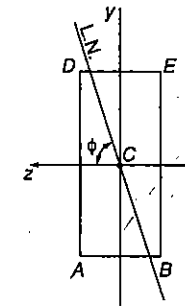


Fig. ex.4.62

A distribuição de tensões ao longo da seção é mostrada na Fig. 4.63.

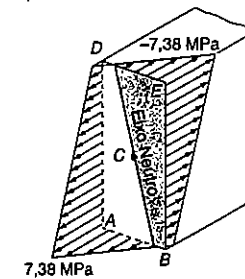


Fig. ex.4.63

4.15 CASO GERAL DE CARGA EXCÊNTRICA

Na Sec. 4.12 analisamos as tensões provocadas em uma barra por uma carga axial excêntrica atuando em um plano de simetria da barra. O caso mais geral, em que a carga não pertence a nenhum plano de simetria, será visto agora.

Consideremos uma barra de eixo reto AB submetida à ação de duas forças P e P' de mesma intensidade e sentido contrário. As duas forças constituem um carregamento excêntrico, sendo a e b as distâncias da linha de ação de P e P' aos eixos centrais principais de seção transversal. A força excêntrica P é estaticamente equiva-

lente a um sistema constituído de uma força centrada P e dos conjugados M_x e M_y , que têm momentos $M_x = P \cdot b$ e $M_y = P \cdot a$ (Figs. 4.64a e b). Do mesmo modo, a força excêntrica P' é equivalente à força centrada P e aos conjugados M_y e M_x .

Em razão do princípio de Saint-Venant (Sec. 2.16), podemos substituir o carregamento original da Fig. 4.64a pelo carregamento estaticamente equivalente da Fig. 4.64b, para a determinação da distribuição de tensões em uma seção S da barra, que não seja muito próxima a qualquer das extremidades A ou B . Além disso, enquanto forem respeitadas as condições de aplicabilidade do princípio da superposição (Sec. 2.12), as tensões devidas ao carregamento da Fig. 4.64b podem ser calculadas superpondo-se as tensões devidas à força centrada P e aos momentos M_x e M_y . A tensão provocada pela força centrada P é dada pela Eq. 1.1, e as tensões devidas aos momentos são dadas pela Eq. 4.53, uma vez que os vetores momentos estão dirigidos segundo os eixos principais da seção. Escrevemos então

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.58}$$

onde y e z são medidos a partir dos eixos principais. A relação obtida mostra que a distribuição de tensões na seção é linear.

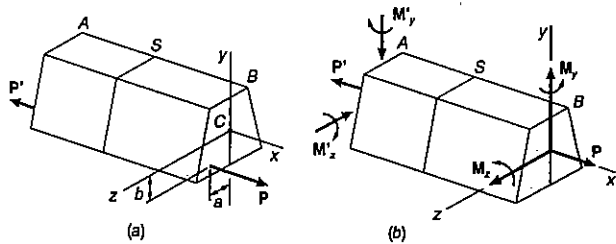


Fig. 4.64

Cada um dos termos da relação acima pode ser positivo ou negativo, dependendo do sentido das forças P e P' e da posição de sua linha de ação em relação aos eixos centroidais da seção, de modo que um cuidado especial é exigido na determinação dos sinais das tensões a serem combinadas. A tensão σ_x obtida na Eq. 4.58 pode ter o mesmo sinal em todos os pontos da seção transversal, como pode ter sinal positivo em alguns pontos e negativo em outros. Neste último caso, haverá uma linha na seção ao longo da qual a tensão será nula. Fazendo $\sigma_x = 0$ na Eq. 4.58, obtemos a equação de uma reta, que representa o eixo neutro da seção.

EXEMPLO 4.9

Um bloco de madeira de seção retangular (Fig. 4.65) recebe uma força de 4,80 kN, aplicada excêntricamente. (a) Determinar as tensões nos pontos A , B , C e D . (b) Determinar a posição da linha neutra na seção transversal.

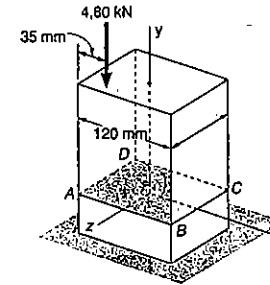


Fig. ex.4.65

(a) Tensões. O carregamento dado é constituído por um sistema equivalente, que consiste na força P centrada e nos dois conjugados M_x e M_y representados pelos vetores dirigidos segundo os eixos centroidais principais da seção (Fig. 4.66). Temos:

$$M_x = (4,80 \text{ kN})(40 \text{ mm}) = 192 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = (4,80 \text{ kN})(60 \text{ mm} - 35 \text{ mm}) = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Calculamos também as áreas e os momentos de inércia centroidal da seção transversal:

$$A = (0,080 \text{ m})(0,120 \text{ m}) = 9,60 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0,120 \text{ m})(0,080 \text{ m}^3) = 5,12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (0,080 \text{ m})(0,120 \text{ m}^3) = 11,52 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

A tensão σ_0 devida à força centrada P é negativa e uniforme ao longo da seção. Temos

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{-4,80 \text{ kN}}{9,60 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -0,5 \text{ MPa}$$

Os dois conjugados M_x e M_z produzem tensões linearmente distribuídas na seção, com valores máximos iguais, respectivamente, a

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\text{máx}}}{I_x} = \frac{(192 \text{ N} \cdot \text{m})(40 \text{ mm})}{5,12 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 1,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\text{máx}}}{I_z} = \frac{(120 \text{ N} \cdot \text{m})(60 \text{ mm})}{11,52 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 0,625 \text{ MPa}$$

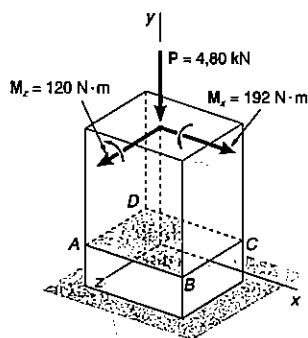


Fig. ex.4.66

As tensões nos vértices da seção são $\sigma_y = \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$, onde os sinais devem ser determinados a partir da Fig. 4.66. As tensões devidas a M_x são positivas em C e D, e negativas em A e B, e as tensões devidas a M_z são positivas em B e C, sendo negativas em A e D. Desse modo, temos

$$\sigma_A = -0,5 - 1,5 - 0,625 = -2,625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -0,5 - 1,5 + 0,625 = -1,375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0,5 + 1,5 + 0,625 = +1,625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0,5 + 1,5 - 0,625 = +0,375 \text{ MPa}$$

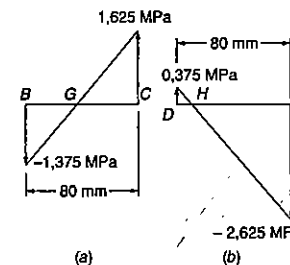


Fig. ex.4.67

(b) Posição da linha neutra. Podemos ver que a tensão se anula em um ponto G entre B e C, e um ponto H entre D e A (Fig. 4.67). Como a distribuição é linear, escrevemos

$$\frac{BG}{80 \text{ mm}} = \frac{1,375}{1,625 + 1,375} \quad BG = 36,7 \text{ mm}$$

$$\frac{HA}{80 \text{ mm}} = \frac{2,625}{2,625 + 0,375} \quad HA = 70 \text{ mm}$$

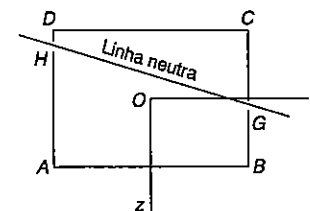


Fig. ex.4.68

A linha neutra deve passar pelos pontos G e H (Fig. 4.68). A distribuição de tensões na seção transversal está indicada na Fig. 4.69.

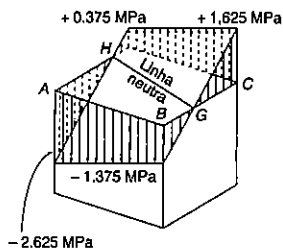
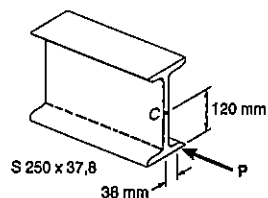


Fig. ex.4.69

PROBLEMA RESOLVIDO 4.9

Uma carga horizontal P é aplicada no ponto indicado na figura, a um perfil S250 x 37,8, de aço laminado. Sabe-se que a tensão de compressão na barra não deve ultrapassar 80 MPa. Determinar a maior força P que pode ser aplicada.



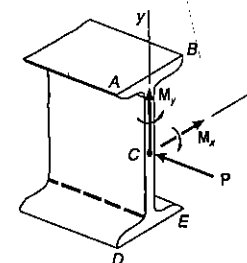
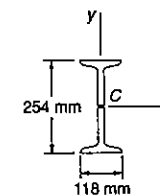
Propriedades da seção transversal. Os dados a seguir foram obtidos nas tabelas do Apêndice C.

Área:

$$A = 4806 \text{ mm}^2 = 4,8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Módulos resistentes:

$$W_x = 406 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad W_y = 48 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$



Força e momento em C. Substituímos P pelo sistema formado pela força centrada e os conjugados.

$$M_x = (0,12 \text{ m})P \quad M_y = (0,038 \text{ m})P$$

Os vetores momentos M_x e M_y são dirigidos segundo os eixos principais da seção.

Tensões normais. Os valores absolutos das tensões nos pontos A, B, C e D , devidos, respectivamente, à carga centrada P e aos conjugados M_x e M_y são:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{4,8 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 208,3P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0,12P}{406 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 295,6P$$

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,038P}{48 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 791,6P$$

Superposição. As tensões finais em cada ponto são calculadas por superposição das tensões devidas a P , M_x e M_y . O sinal de cada tensão é determinado por um exame cuidadoso do sistema força-momento da figura.

$$\sigma_A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -208,3P + 295,6P + 791,6P = 878,9P$$

$$\sigma_B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = -208,3P + 295,6P - 791,6P = -704,3P$$

$$\sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = -208,3P - 295,6P + 791,6P = 287,7P$$

$$\sigma_E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -208,3P - 295,6P - 791,6P = -1295,5P$$

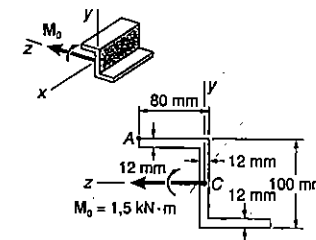
Máxima força admissível. A máxima força é aquela que provoca a tensão $\sigma_{adm} = 80 \text{ MPa}$. A máxima tensão de compressão ocorre no ponto E . Podemos escrever

$$\sigma_{adm} = \sigma_E \quad -80 \text{ MPa} = -1295,5P$$

$$P = 61,75 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

*PROBLEMA RESOLVIDO 4.10

Um conjugado de intensidade $M_0 = 1,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ age em um plano vertical, e é aplicado na viga indicada na figura. Determinar: (a) a tensão atuante em A ; (b) o ângulo formado pela linha neutra e o plano horizontal.



São dados os seguintes valores, relativos à seção transversal:

$$I_y = 3,25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = 4,18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$P_{yz} = 2,87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Eixos principais. Para a determinação dos eixos principais, desenhamos o círculo de Mohr, e encontramos os correspondentes momentos de inércia.

$$\operatorname{tg} 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2,87}{0,465} \quad 2\theta_m = 80,8^\circ \quad \theta_m = 40,4^\circ$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0,465)^2 + (2,87)^2 \quad R = 2,91 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

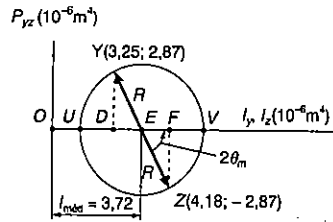
$$I_u = I_{mín} = OU = I_{méd} - R = 3,72 - 2,91 = 0,810 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_v = I_{máx} = OV = I_{méd} + R = 3,72 + 2,91 = 6,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

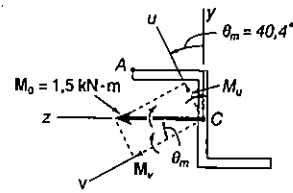
Carregamento. O conjugado aplicado M_0 é decomposto em componentes nas direções dos eixos principais.

$$M_u = M_0 \operatorname{sen} \theta_m = 1500 \operatorname{sen} 40,4^\circ = 972 \text{ N} \cdot \text{m}$$

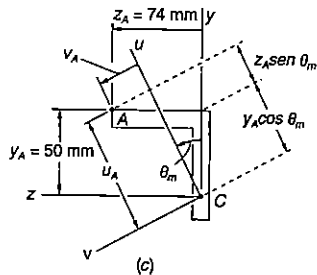
$$M_v = M_0 \operatorname{cos} \theta_m = 1500 \operatorname{cos} 40,4^\circ = 1142 \text{ N} \cdot \text{m}$$



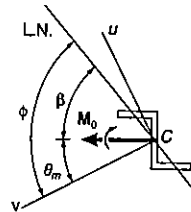
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) **Tensão no ponto A.** As distâncias do ponto A a cada um dos eixos são calculadas abaixo.

$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \sin \theta_m = (50) \cos 40,4^\circ + (74) \sin 40,4^\circ = 86,0 \text{ mm}$$

$$v_A = -y_A \sin \theta_m + z_A \cos \theta_m = (50) \sin 40,4^\circ + (74) \cos 40,4^\circ = 23,9 \text{ mm}$$

Se considerarmos separadamente a flexão segundo cada eixo principal, vemos que M_u provoca tensão de tração em A, enquanto M_v provoca tensão de compressão nesse ponto. Temos então:

$$\sigma_A = + \frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = + \frac{(972 \text{ N} \cdot \text{m})(0,0239 \text{ m})}{0,810 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(1142 \text{ N} \cdot \text{m})(0,0860 \text{ m})}{6,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$= + (28,68 \text{ MPa}) - (14,81 \text{ MPa}) \quad \sigma_A = + 13,87 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Linha neutra.** Podemos encontrar o ângulo ϕ formado pela linha neutra com o eixo u usando a Eq. 4.57,

$$\text{tg } \phi = \frac{I_v}{I_u} \text{tg } \theta_m = \frac{6,63}{0,810} \text{tg } 40,4^\circ \quad \phi = 81,8^\circ$$

O ângulo β formado pela linha neutra com o plano horizontal será então:

$$\beta = \phi - \theta_m = 81,8^\circ - 40,4^\circ = 41,4^\circ \quad \beta = 41,4^\circ \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.136 a 4.141 O momento M é aplicado a uma viga de seção transversal mostrada, em um plano formando um ângulo β com a vertical. Determinar: (a) a tensão no ponto A; (b) a tensão no ponto B; (c) o ângulo que a linha neutra forma com o plano horizontal.

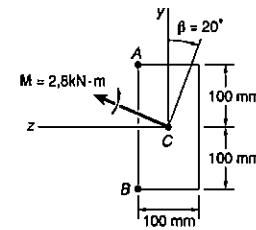


Fig. P4.136

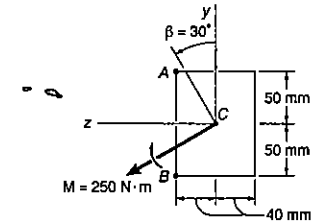


Fig. P4.137

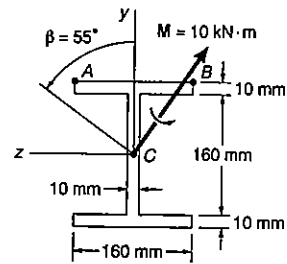


Fig. P4.138

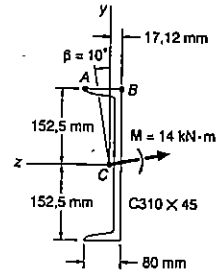


Fig. P4.139

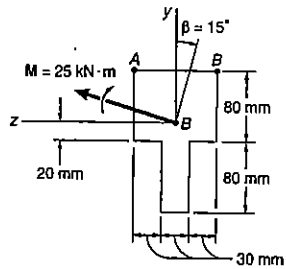


Fig. P4.140

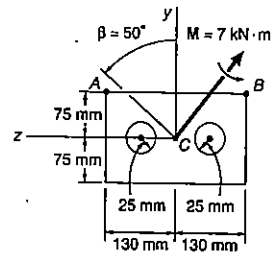


Fig. P4.141

4.142 a 4.144 O momento M atua em um plano vertical e está aplicado a uma viga orientada como mostrado. Determinar: (a) o ângulo que o eixo neutro forma com o plano horizontal; (b) a máxima tensão de tração na viga.

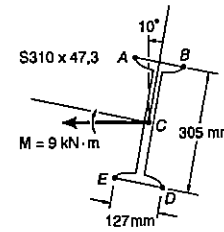


Fig. P4.142

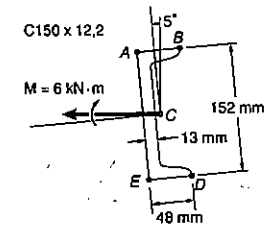


Fig. P4.143

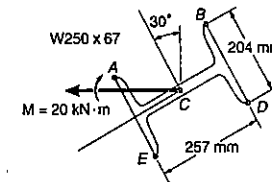


Fig. P4.144

4.145 a 4.147 O momento M atua em um plano vertical e está aplicado a uma viga orientada como mostrado. Determinar: (a) o ângulo que o eixo neutro forma com o plano horizontal; (b) a máxima tensão de tração na viga.

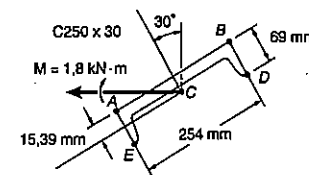


Fig. P4.145

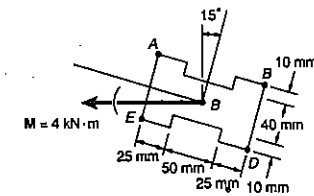


Fig. P4.146

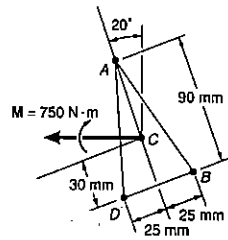


Fig. P4.147

*4.148 a *4.150 O momento M atua em um plano vertical e é aplicado a uma viga de seção transversal mostrada. Determinar a tensão no ponto A.

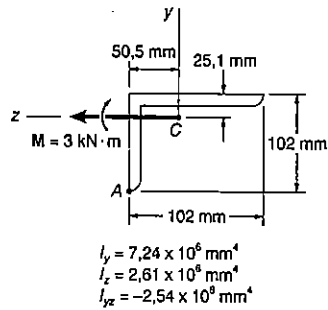


Fig. P4.148

$$I_y = 7,24 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 2,61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = -2,54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

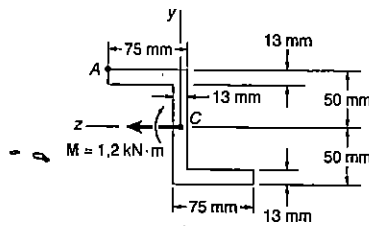


Fig. P4.149

$$I_y = 4500 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 6700 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = +4230 \text{ mm}^4$$

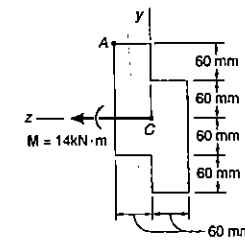


Fig. P4.150

*4.151 Para a viga indicada, determinar a tensão no ponto A, considerando que o plano no qual atua o momento M foi girado de 90° no sentido horário.

*4.152 Resolver o Prob. 4.151, considerando a viga do Prob. 4.149.

*4.153 Resolver o Prob. 4.151, considerando a viga do Prob. 4.150.

4.154 A carga de 120 kN pode ser aplicada a qualquer ponto da circunferência de raio 40 mm mostrada. Se $\theta = 20^\circ$, determinar: (a) a tensão em A; (b) a tensão em B; (c) o ponto onde o eixo neutro intercepta a linha ABD.

4.155 Sabendo-se que a carga de 120 kN pode ser aplicada a qualquer ponto da circunferência de raio 40 mm mostrada, determinar: (a) o valor de θ para que a tensão em D alcance seu maior valor absoluto; (b) a correspondente tensão em A, B e D.

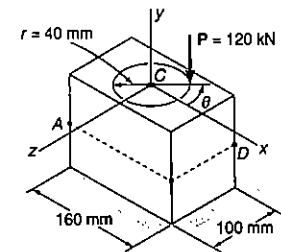


Fig. P4.154 e P4.155

4.156 Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a tensão nos pontos A e B; (b) o ponto onde a linha neutra intercepta a linha ABD.

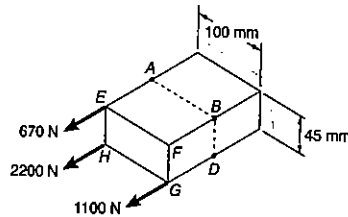


Fig. P4.156

4.157 Resolver o Prob. 4.156, considerando que a intensidade a força aplicada em G é aumentada de 1100 N para 1780 N.

4.158 Uma carga axial P é aplicada como mostrado a um curto perfil laminado de aço W200 × 35,9. Determinar a maior distância a, para que a máxima tensão de compressão não exceda a 1125 MPa.

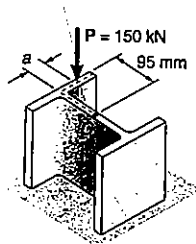


Fig. P4.158

4.159 Uma carga axial P é aplicada como mostrado a um curto perfil estrutural, em forma de T. Determinar: (a) a maior distância a, para que a tensão máxima de compressão não exceda a 120 MPa; (b) o ponto correspondente onde a linha neutra intercepta a linha AB. (Dados: $A = 4450 \text{ mm}^2$; $I_y = 9,16 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_z = 6,00 \times 10^6 \text{ mm}^4$.)

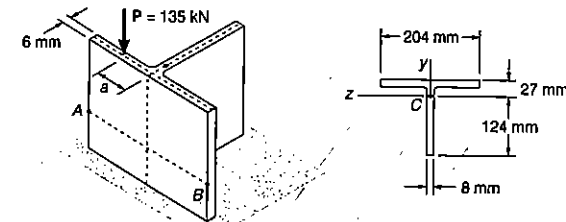


Fig. P4.159

4.160 Duas cargas horizontais são aplicadas como mostrado a um curto perfil laminado de aço C250 × 30. Sabendo-se que a tensão de tração neste perfil não deve exceder a 70 MPa, determinar a maior carga P permissível.

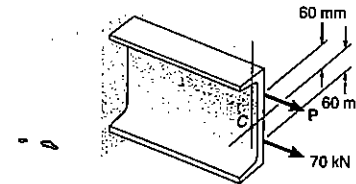


Fig. P4.160

4.161 Resolver o Prob. 4.160, considerando que a tensão de tração no perfil não deve exceder a 80 MPa.

4.162 Uma viga com a seção transversal mostrada está sujeita a um momento M_0 que atua em um plano vertical. Determinar o maior valor permissível do momento fletor M_0 , se a máxima tensão na viga não exceder a 80 MPa. Dados: $I_y = I_x = 4,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $A = 3065 \text{ mm}^2$; $k_{\text{mín}} = 24,97 \text{ mm}$. (Sugestão: Por razões de simetria, os eixos principais formam um ângulo de 45° com os eixos coordenados x e y; usar também as relações $I_{\text{mín}} = Ak_{\text{mín}}^2$ e $I_{\text{mín}} + I_{\text{máx}} = I_y + I_x$.)

4.163 A seção Z mostrada está sujeita a um momento M_0 , atuando em um plano vertical. Determinar o maior valor permissível do momento fletor M_0 , se a máxima tensão não excede 100 MPa. Dados: $I_{m\acute{a}x} = 2,28 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_{m\acute{i}n} = 0,23 \times 10^6 \text{ mm}^4$, eixos principais $\angle 25,7^\circ$ e $\angle 64,3^\circ$.

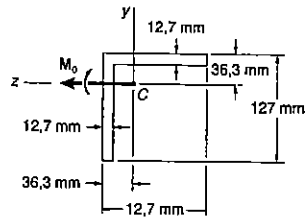


Fig. P4.162

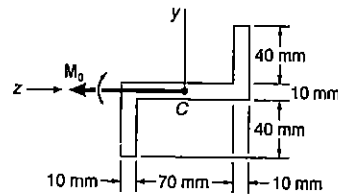


Fig. P4.163

*4.164 Uma viga com a seção transversal mostrada está submetida a um momento M_0 , que atua em um plano vertical. Determinar o maior valor permissível do momento fletor M_0 , se a máxima tensão na viga não exceder a 100 MPa. Dados: $I_y = I_z = b^4/36$ e $I_{yz} = b^4/72$.

*4.165 Uma viga com a seção transversal mostrada está submetida a um momento M_0 que atua em um plano vertical. Determinar o maior valor do momento fletor M_0 se a máxima tensão na viga não exceder a 200 MPa.

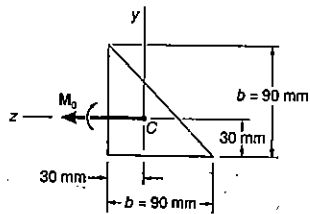


Fig. P4.164

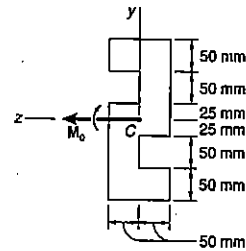


Fig. P4.165

4.166 Mostrar que, se uma viga maciça retangular é curvada por um momento aplicado no plano que contém uma das diagonais da seção retangular mostrada, a superfície neutra será ao longo da outra diagonal.

4.167 Em uma dada seção de um perfil laminado de aço S200 x 34, o efeito da gravidade é representado por um vetor-momento M_0 . Expressando por σ_0 a máxima tensão na viga quando $\theta = 0$, determinar o ângulo de inclinação θ da viga para que a máxima tensão seja $3\sigma_0$.

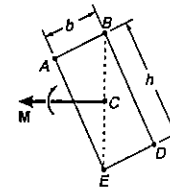


Fig. P4.166

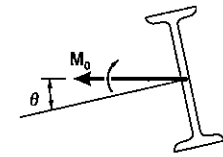


Fig. P4.167

4.168 Pedese: (a) Mostrar que a tensão em um canto A de um membro retangular será nula, se a força vertical P for aplicada num ponto localizado sobre a linha

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

(b) Mostrar também que se não ocorre tensão de tração no membro, é porque a força P está aplicada em um ponto localizado dentro da área limitada pela linha: da parte a e mais três similares correspondentes a condição de tensão nula em B, C e D. (Esta área é conhecida como núcleo central da seção transversal.)

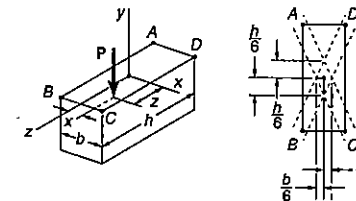


Fig. P4.168

4.169 Mostrar que: (a) Se uma força vertical P é aplicada no ponto A da seção mostrada, a equação do eixo neutro BD é

$$\left(\frac{x_A}{k_z^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{k_x^2}\right)z = -1$$

onde k_z e k_x , expressam os raios de giração da seção transversal em relação ao eixo z e ao eixo x , respectivamente; (b) Se uma força vertical Q é aplicada em qualquer ponto localizado sobre a linha BD , a tensão no ponto A será nula.

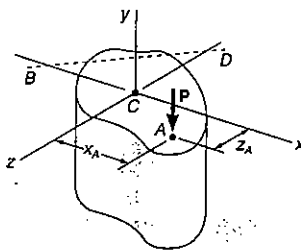


Fig. P4.169

4.170 Uma viga de seção transversal assimétrica está submetida a um momento M_z atuando em um plano vertical. Mostre que a tensão no ponto A de coordenadas y e z , é:

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2} M_z$$

onde I_y , I_z e I_{yz} expressam os momentos e produto de inércia da seção transversal, em relação aos eixos centroidais y e z .

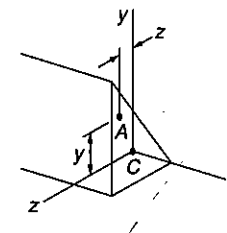


Fig. P4.170

4.171 A viga do Prob. 4.170 está submetida a um conjugado M_y , atuando em um plano horizontal. Mostre que a tensão no ponto A é

$$\sigma_A = \frac{z \cdot I_z - y \cdot I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y$$

*4.16 FLEXÃO DE BARRAS CURVAS

A análise da flexão feita até aqui se limitou a abordar o caso de barras de eixo reto. Nesta seção, vamos estudar as tensões provocadas pela flexão em barras que são curvas. Nesse estudo, serão consideradas apenas barras de seção transversal uniforme, que tenham um plano de simetria, plano esse que é ao mesmo tempo o plano que contém os conjugados aplicados à barra. Vamos supor que todas as tensões nas barras permanecem abaixo do limite de proporcionalidade do material que as compõem.

Se a curvatura inicial da barra é pequena, isto é, se o raio de curvatura é grande comparado à altura da seção transversal, podemos adotar, com boa aproximação, a mesma distribuição de tensões de uma barra com eixo reto. Nesse caso, podemos usar as fórmulas deduzidas nas Secs 4.3 e 4.4¹¹. Nos casos em que o raio de curvatura é da ordem de grandeza das dimensões da seção transversal, devemos usar um método próprio de análise, que foi apresentado pela primeira vez por E. Winkler (engenheiro alemão, 1835-1888).

Consideremos a barra curva de seção transversal uniforme indicada na Fig. 4.70. Sua seção transversal é simétrica em relação ao eixo y (Fig. 4.70b).

¹¹ V. Prob. 4.177.

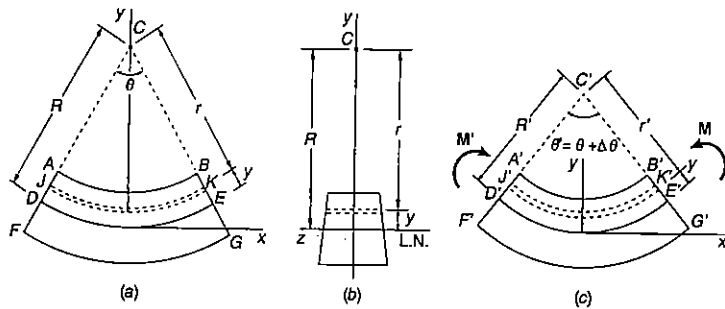


Fig. 4.70

Quando a barra se encontra isenta de tensões, as superfícies superior e inferior interceptam o plano vertical xy segundo os arcos de circunferência AB e FG , de centro em C (Fig. 4.70a). Vamos aplicar dois conjugados iguais e de sentidos opostos M e M' , que atuam no plano de simetria da barra (Fig. 4.70c). As mesmas razões discutidas na Sec. 4.3 nos levam agora a afirmar que qualquer seção plana que contenha C permaneça plana, e que os vários arcos de circunferência indicados na Fig. 4.70a serão transformados em outros arcos de circunferência concêntricos, de centro C' . Se os conjugados M e M' se aplicam no sentido indicado, a curvatura dos vários arcos irá aumentar, quer dizer, $A'C' < AC$. Podemos ver que a flexão vai diminuir o comprimento da superfície superior da barra ($A'B' < AB$) e vai aumentar o comprimento da superfície inferior da barra ($F'G' > FG$). Concluímos, através dessa observação, que deve existir uma *superfície neutra* na barra, cujo comprimento se mantém constante durante a flexão. A curva interseção da superfície neutra com o plano xy foi representada na Fig. 4.70a pelo arco DE de raio R , e na Fig. 4.70c pelo arco $D'E'$ de raio R' . Chamemos de θ e θ' os ângulos centrais correspondentes a DE e $D'E'$, respectivamente. O fato do comprimento da superfície neutra não se alterar pode ser expresso pela relação

$$R\theta = R'\theta' \quad (4.59)$$

Tomando o arco JK localizado a uma distância y acima da superfície neutra, vamos chamar de r e r' os raios desse arco antes e depois da aplicação dos conjugados. A deformação de JK pode ser calculada por

$$\delta = r'\theta' - r\theta \quad (4.60)$$

Da Fig. 4.70 vemos que

$$r = R - y \quad r' = R' - y \quad (4.61)$$

e substituindo essas expressões na Eq. 4.60, temos

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

ou, se usarmos a Eq. 4.59, fazendo $\theta' - \theta = \Delta\theta$

$$\delta = -y \Delta\theta \quad (4.62)$$

Para obtermos a deformação específica normal ϵ_x nos elementos de JK , dividimos a deformação δ pelo comprimento original do arco JK , que é $r\theta$. Escrevemos então

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y \Delta\theta}{r\theta}$$

ou, pela primeira das relações (4.61),

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta} \frac{y}{R - y} \quad (4.63)$$

Essa relação mostra que, enquanto cada seção transversal se mantém plana, as deformações específicas ϵ_x nas diversas fibras da barra *não variam linearmente* com a distância y até a superfície neutra.

Com os valores ϵ_x obtidos de (4.63), podemos encontrar as tensões normais σ_x nos diversos pontos, aplicando a lei de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$:

$$\sigma_x = -\frac{E \Delta\theta}{\theta} \frac{y}{R - y} \quad (4.64)$$

Podemos fazer também, tomando a primeira das equações (4.61)

$$\sigma_x = -\frac{E \Delta\theta}{\theta} \frac{R - r}{r} \quad (4.65)$$

A Eq. 4.64 mostra que, do mesmo modo que ϵ_x , a tensão normal σ_x *não varia linearmente* com a distância y da fibra estudada à superfície neutra. Podemos construir o gráfico de σ_x e y , obtendo um arco de hipérbole (Fig. 4.71).

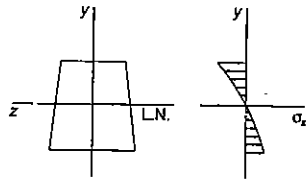


Fig. 4.71

Devemos agora determinar a localização da superfície neutra e o valor do coeficiente $E\Delta\theta/\theta$ que aparece nas Eqs. 4.64 e 4.65. Para isso, vamos lembrar que os esforços elementares que atuam em qualquer seção transversal devem ser estaticamente equivalentes ao momento fletor M . Expressamos agora, como o fizemos na Sec. 4.2, que a soma dos esforços elementares atuando na seção deve ser nula, e que a soma dos seus momentos em relação ao eixo transversal z deve ser igual ao mesmo fletor M . As relações abaixo exprimem o que foi dito:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (4.1)$$

$$\int (-y\sigma_x dA) = M \quad (4.3)$$

Na Eq. 4.1, substituímos o valor de σ_x obtido em (4.65), escrevemos

$$-\int \frac{E\Delta\theta}{\theta} \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

Segue daí que a distância R do centro de curvatura C até a superfície neutra é definida pela relação

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (4.66)$$

Podemos ver que o valor obtido para R não é igual à distância r , de C até o centróide da seção, uma vez que r é definida por uma relação diferente, que é:

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r dA \quad (4.67)$$

Concluimos então que, em uma barra curva, o eixo neutro da seção transversal não passa pelo centróide dessa seção (Fig. 4.72)¹². Algumas expressões para o raio R da superfície neutra vão ser deduzidas nos problemas seguintes. Por conveniência, essas expressões estão indicadas na Fig. 4.73.

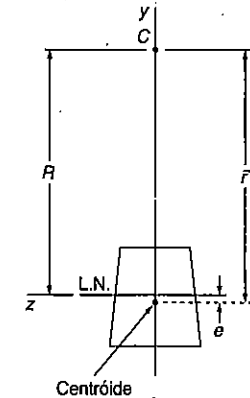


Fig. 4.72

¹² Se a Eq. 4.66 for escrita na forma alternativa abaixo, podemos perceber uma propriedade interessante da superfície neutra.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \int \frac{1}{r} dA \quad (4.66')$$

A Eq. 4.66' mostra que, se a barra for dividida em um número muito grande de fibras de área transversal dA , a curva $1/R$ da superfície neutra vai ser igual ao valor médio da curvatura $1/r$ das várias fibras.

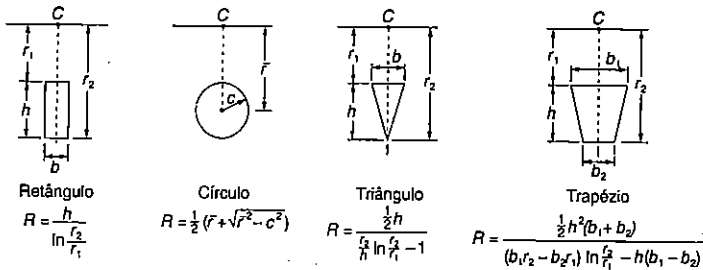


Fig. 4.73

Substituímos agora o valor de σ_x em (4.65) na Eq. 4.3, obtendo

$$\int \frac{E \Delta \theta}{\theta} \frac{R - r}{r} y \, dA = M$$

Podemos escrever também, com $y = R - r$,

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} \int \frac{(R - r)^2}{r} \, dA = M$$

Elevando ao quadrado e integrando e reduzindo os termos, vamos obter

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} \left[R^2 \int \frac{dA}{r} - 2RA + \int r \, dA \right] = M$$

Comparando a expressão acima com as Eqs. 4.66 e 4.67 vemos que o primeiro termo dentro dos colchetes é igual a RA , enquanto o último termo é igual a $\bar{r}A$. Desse modo, temos

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} (RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

e determinando o valor de $E \Delta \theta / \theta$:

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \tag{4.68}$$

Observando a Fig. 4.70, vemos que $\Delta \theta > 0$, quando $M > 0$. Desse modo $\bar{r} - R > 0$, ou $R < \bar{r}$, independe da forma da seção. Então, a linha neutra de uma seção transversal está sempre localizada entre o centróide da seção e o centro de curvatura da barra (Fig. 4.72). Chamando $\bar{r} - R = e$, escrevemos a Eq. (4.68) na forma

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \tag{4.69}$$

Substituindo o valor $E \Delta \theta / \theta$ dado acima nas Eqs. 4.64 e 4.65, vamos obter as expressões abaixo, para cálculo das tensões σ_x em uma viga curva:

$$\sigma_x = - \frac{My}{Ae(R - y)} \tag{4.70}$$

ou

$$\sigma_x = \frac{M(r - R)}{Aer} \tag{4.71}$$

Nas expressões encontradas, o parâmetro e é uma quantidade pequena, obtida da subtração de dois comprimentos de valor parecido, R e \bar{r} . Esses valores devem ser calculados com bastante precisão, de modo a obter um valor para σ_x razoavelmente correto, principalmente no caso de barras de pequena curvatura, quando os valores acima são muito grandes. Nesses casos, no entanto, é possível obter-se uma boa aproximação para σ_x , com o uso da fórmula deduzida para barras retas.

Passamos a determinar agora a mudança na curvatura da superfície neutra causada pelo momento fletor M . Na Eq. 4.59, determinamos o valor $1/R'$ da curvatura da superfície neutra no estado deformado:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} = \frac{\theta'}{\theta}$$

ou, fazendo $\theta' = \theta + \Delta \theta$ e usando a Eq. 4.69,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\Delta \theta}{\theta} \right) = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{M}{EAe} \right)$$

donde encontramos a mudança na curvatura da superfície neutra, que é

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \tag{4.72}$$

EXEMPLO 4.10

Uma barra retangular de eixo curvo tem raio $\bar{r} = 100$ mm e uma seção transversal com largura $b = 50$ mm e altura $h = 25$ mm (Fig. 4.74). Determinar a distância e entre o centróide e o eixo neutro da seção.

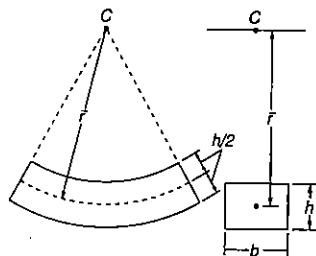


Fig. ex.4.74

Inicialmente determinaremos a expressão do raio R da superfície neutra. Sendo r_1 e r_2 , respectivamente, o raio interno e o raio externo da barra (Fig. 4.75), teremos pela Eq. 4.66:

$$R = \frac{A}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (4.73)$$

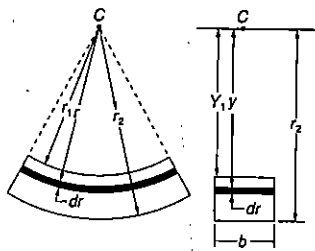


Fig. ex.4.75

Com os valores dados do problema,

$$r_1 = \bar{r} - \frac{1}{2}h = 100 - 12,5 = 87,5 \text{ mm}$$

$$r_2 = \bar{r} + \frac{1}{2}h = 100 + 12,5 = 112,5 \text{ mm}$$

Substituindo h , r_1 e r_2 na Eq. 4.73, vamos ter

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{25 \text{ mm}}{\ln \frac{112,5}{87,5}} = 99,477 \text{ mm}$$

Assim, a distância entre o eixo neutro e o eixo centroidal da seção é (Fig. 4.76):

$$e = \bar{r} - R = 100 - 99,477 = 0,523 \text{ mm}$$

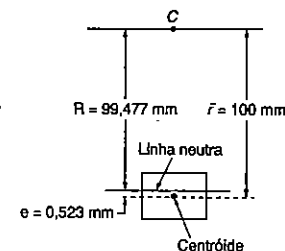


Fig. ex.4.76

Vemos que foi necessário calcular R com cinco algarismos significativos para obter e com grau de precisão aceitável.

EXEMPLO 4.11

Determinar, para a barra do Ex. 4.10, os valores máximos das tensões de tração e compressão, sabendo-se que o momento fletor na barra é $M = 500$ N · m.

Vamos usar a Eq. 4.71 com os dados do problema

$$M = 500 \text{ N} \cdot \text{m} \quad A = bh = (50 \text{ mm})(25 \text{ mm}) = 1250 \text{ mm}^2$$

e os valores de R e e obtidos no Ex. 4.10,

$$R = 99,48 \text{ mm} \quad e = 0,523 \text{ mm}$$

Inicialmente, fazemos $r = r_2 = 112,5 \text{ mm}$ na Eq. 4.71:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{M(r_2 - R)}{Aer_2} \\ &= \frac{(500 \text{ N} \cdot \text{m})(112,5 - 99,48) \times 10^{-3} \text{ m}}{(1250 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(0,523 \times 10^{-3} \text{ m})(112,5 \times 10^{-3} \text{ m})} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 88,5 \text{ MPa}$$

Fazendo agora $r = r_1$ na Eq. 4.71, com $r_1 = 87,5 \text{ mm}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{mín}} &= \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1} \\ &= \frac{(500 \text{ N} \cdot \text{m})(87,5 - 99,48) \times 10^{-3} \text{ m}}{(1250 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(0,523 \times 10^{-3} \text{ m})(87,5 \times 10^{-3} \text{ m})} \end{aligned}$$

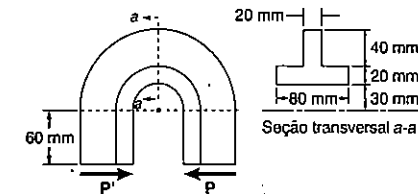
$$\sigma_{\text{mín}} = -104,7 \text{ MPa}$$

Comentário. Fazemos uma comparação entre os valores obtidos para $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$ e os valores que teríamos obtido para uma barra curva. Com a Eq. (4.15) da Sec. 4.4, escrevemos

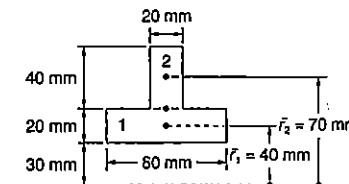
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx, mín}} &= \pm \frac{Mc}{I} \\ &= \pm \frac{(500 \text{ N} \cdot \text{m})(12,5 \times 10^{-3} \text{ m})}{\frac{1}{12} (50 \times 10^{-3} \text{ m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = \pm 96,0 \text{ MPa} \end{aligned}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 4.11

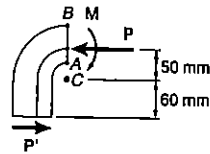
Um componente de máquina tem seção transversal em forma de T e recebe o carregamento indicado. Determinar a maior força P que pode ser aplicada ao componente, se a tensão admissível à compressão é de 50 MPa.



Centróide da seção transversal. Determinamos o centro geométrico D da seção:

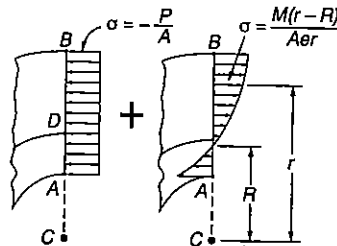


	$A_i, \text{ mm}^2$	$\bar{r}_i, \text{ mm}$	$\bar{r}_i A_i, \text{ mm}^3$	
1	$(20)(80) = 1600$	40	64×10^3	$\bar{r} \Sigma A_i = \Sigma \bar{r}_i A_i$
2	$(40)(20) = 800$	70	56×10^3	
	$\Sigma A_i = 3000$		$\Sigma \bar{r}_i A_i = 120 \times 10^3$	$\bar{r} (2400) = 120 \times 10^3$
				$\bar{r} = 50 \text{ mm} = 0,050 \text{ m}$



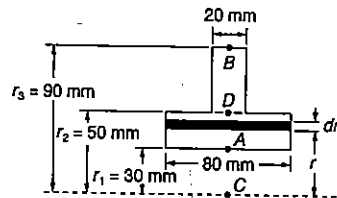
Força e momento em D. As forças internas na seção $\alpha\text{-}\alpha$ formam um sistema equivalente à força P agindo em D e a um conjugado de momento

$$M = P(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm}) = (0,110 \text{ m})P$$



Superposição. A força centrada P causa tensões uniformes de compressão na seção $\alpha\text{-}\alpha$. O momento fletor M provoca uma distribuição de tensões que varia de acordo com a Eq. 4.71. O conjugado M tende a aumentar a curvatura da barra, sendo portanto positivo (conf. Fig. 4.70). A tensão final em um ponto da seção transversal que fica a uma distância r do centro de curvatura C é

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r - R)}{Aer} \quad (1)$$



Raio de curvatura da superfície neutra. A Eq. 4.66 nos fornece o raio R:

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{2400 \text{ mm}^2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm}) dr}{r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{(20 \text{ mm}) dr}{r}}$$

$$= \frac{2400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2400}{40,866 + 11,756} = 45,61 \text{ mm}$$

$$= 0,04561 \text{ m}$$

Calculamos também $e = \bar{r} - R = (0,050 \text{ m}) - (0,04561 \text{ m}) = 0,00439 \text{ m}$

Carregamento admissível. A máxima tensão de compressão ocorre no ponto A, para o qual $r = 0,030 \text{ m}$. Para $\sigma_{adm} = 50 \text{ MPa}$, temos na Eq. 1:

$$-50 \times 10^6 \text{ MPa} = -\frac{P}{2,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(0,110P)(0,030 \text{ m} - 0,04561 \text{ m})}{(2,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0,00439 \text{ m})(0,030 \text{ m})}$$

$$-50 \times 10^6 = -417P - 5432P \quad P = 8,55 \text{ kN}$$

PROBLEMAS

4.172 Para o componente de máquinas e o carregamento mostrado, determinar a tensão no ponto A quando: (a) $h = 50 \text{ mm}$; (b) $h = 65 \text{ mm}$.

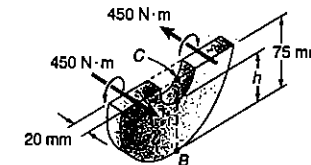


Fig. P4.172 e P4.175

4.173 Para a barra curva e o carregamento mostrado, determinar a máxima tensão de compressão quando: (a) $r = 45$ mm; (b) $r = 15$ mm.

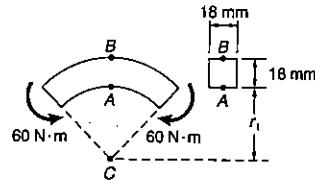


Fig. P4.173 e P4.174

4.174 Para a barra curva e o carregamento mostrado, determinar a tensão nos pontos A e B, quando: $r_1 = 8$ mm.

4.175 Para o componente de máquina e o carregamento indicado, determinar as tensões nos pontos A e B, quando $h = 60$ mm.

4.176 A barra prismática curva tem uma seção transversal de $5 \times 7,5$ mm e um raio interno de 15 mm. Para o carregamento mostrado, determinar as maiores tensões de tração e compressão.

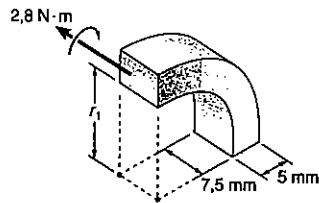


Fig. P4.176 e P4.177

4.177 Para a barra curva e o carregamento mostrado, determinar o percentual de erro introduzido no cálculo da tensão máxima, assumindo-se que a barra é reta. Considerar o caso quando: (a) $r = 5$ mm; (b) $r = 25$ mm; (c) $r = 150$ mm.

4.178 A porção curva da barra mostrada tem um raio interno de 7,6 mm. A linha de ação da força de 270 N está localizada a uma distância a do plano que contém o centro de curvatura da barra. Determinar a maior tensão de compressão quando: (a) $a = 0$; (b) $a = 30$ mm.

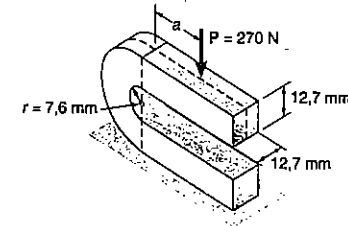


Fig. P4.178 e P4.179

4.179 Sabendo-se que a tensão admissível de compressão é 80 MPa, determinar a maior distância a permissível da linha de ação da força de 270 N, ao plano que contém o centro de curvatura da barra.

4.180 Uma conexão de aço tem a seção transversal mostrada e os furos estão dispostos segundo o ângulo central β . Sabendo-se que a tensão admissível é de 100 MPa, determinar a maior força P que pode ser aplicada, quando $\beta = 90^\circ$.

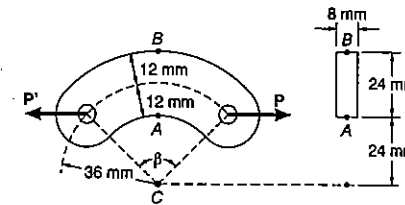


Fig. P4.180 e P4.181

4.181 Uma conexão de aço tem a seção transversal mostrada e os furos estão dispostos segundo o ângulo central β . Determinar: (a) o maior valor admissível de β ,

para que não ocorram tensões de compressão, na seção que contém os pontos A e B; (b) a correspondente intensidade e a localização da máxima tensão de tração, quando $P = 3 \text{ kN}$.

4.182 e 4.183 Um componente de máquina tem a seção transversal em forma de T, orientada como mostrado. Sabendo-se que $M = 2500 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar a tensão no: (a) ponto A; (b) ponto B.

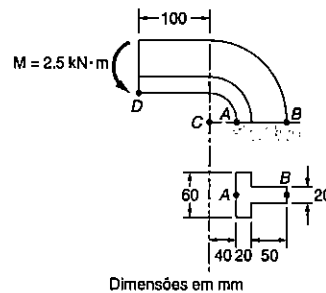


Fig. P4.182 e P4.184

4.184 e 4.185 Considerando que o momento mostrado é substituído por uma força vertical de 10 kN, aplicada no ponto D e no sentido descendente, determinar a tensão no: (a) ponto A; (b) ponto B.

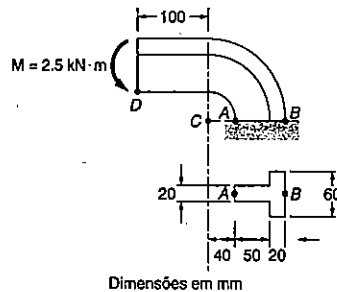


Fig. P4.183 e P4.185

4.186 Três placas são soldadas juntas, para formar a viga curva mostrada. Para $M = 1130 \text{ N} \cdot \text{m}$, determinar a tensão no: (a) ponto A; (b) ponto B; (c) centróide da seção transversal.

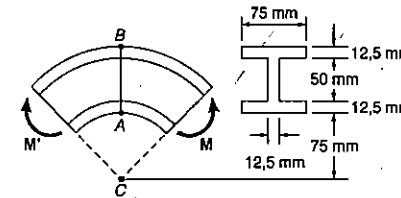


Fig. P4.186

4.187 Resolver o Prob. 4.186, considerando que a viga curva foi reprojeta, usando a mesma seção transversal, com raio interno aumentado de 75 mm para 125 mm.

4.188 O anel aberto, com uma fenda, como mostrado, tem um raio interno $r_1 = 20 \text{ mm}$ e seção circular com diâmetro $d = 15 \text{ mm}$. Sabendo-se que cada uma das forças de 530 N são aplicadas no centróide da seção transversal, determinar a tensão no: (a) ponto A; (b) ponto B.

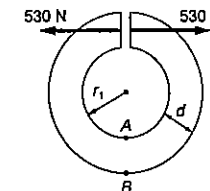


Fig. P4.188

4.189 Resolver o Prob. 4.188, considerando que o anel tem um raio interno $r = 15 \text{ mm}$ e uma seção circular de diâmetro $d = 20 \text{ mm}$.

4.190 Para o gancho mostrado, determinar a maior tensão na seção a-a, quando $b_1 = 35 \text{ mm}$ e $b_2 = 25 \text{ mm}$.

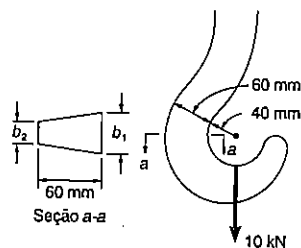


Fig. P4.190 e P4.191

4.191 Para o gancho mostrado, determinar a maior tensão na seção $a-a$, quando $b_1 = 50 \text{ mm}$ e $b_2 = 10 \text{ mm}$.

4.192 Sabendo-se que no semi-anel mostrado $h = 30 \text{ mm}$, determinar a tensão no: (a) ponto A; (b) ponto B.

4.193 Resolver o Prob. 4.192, considerando que $h = 40 \text{ mm}$.

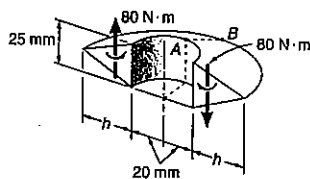


Fig. P4.192

4.194 Mostrar que, se a seção transversal de uma viga curva consiste de dois ou mais retângulos, o raio R da superfície neutra pode ser expresso como:

$$R = \frac{A}{\ln \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{b_1} \cdot \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^{b_2} \cdot \left(\frac{r_4}{r_3} \right)^{b_3} \right]}$$

onde A é a área total da seção transversal.

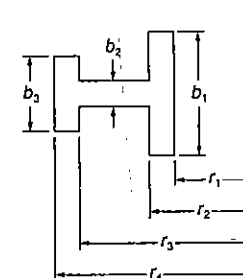


Fig. P4.194

*4.195 Usando a Eq. (4.66), desenvolva a expressão para R , da Fig. 4.73, para uma seção transversal circular.

4.196 Resolver o Prob. 4.195, considerando uma seção transversal trapezoidal.

4.197 Resolver o Prob. 4.195, considerando uma seção transversal triangular.

*4.198 Para uma viga curva de seção transversal retangular sujeita a um momento fletor M , mostrar que a tensão radial na superfície neutra é

$$\sigma_r = \frac{M}{Ae} \left[1 - \frac{r_1}{R} - \ln \frac{R}{r_1} \right]$$

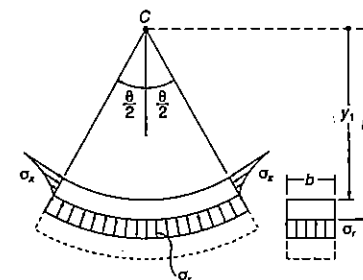


Fig. P4.198

e calcular o valor de σ_r para a viga curva dos Exemplos 4.10 e 4.11, da Sec. 4.16. (Sugestão: Considerar o diagrama de corpo livre da porção da viga localizada acima da superfície neutra.)

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado para a análise de barras em flexão pura; ou seja, nós consideramos as tensões e as deformações em membros sujeitos a um par de conjugados M e M' atuando em um mesmo plano longitudinal (Fig. 4.1).

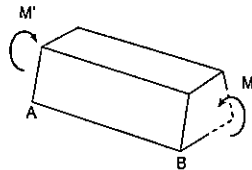


Fig. 4.1 Deformação normal em flexão

Inicialmente estudamos as barras que possuem um plano de simetria e sujeitos a conjugados atuando neste plano. Considerando as possíveis deformações na barra, nós provamos que seções transversais permanecem planas à medida que a barra é deformada (Sec. 4.4). Então notamos que uma barra em flexão pura tem uma superfície neutra ao longo da qual as deformações específicas e as tensões são nulas, e que a deformação específica normal ϵ_x varia linearmente com a distância y da superfície neutra:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (4.8)$$

onde ρ é o raio de curvatura da superfície neutra (Fig. 4.10a). A interseção da superfície neutra com uma seção transversal é conhecida como eixo neutro ou linha neutra da seção.

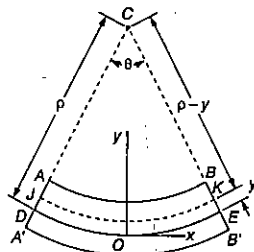


Fig. 4.10a

Para barras feitas de um material que segure a lei de Hooke (Sec. 4.5), encontramos que a tensão normal σ_x varia linearmente com a distância do eixo neutro (Fig. 4.11). Expressando por σ_m a máxima tensão, escrevemos:

$$\text{Tensão normal no regime elástico } \sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad (4.12)$$

onde c é a maior distância do eixo neutro a um ponto da seção.

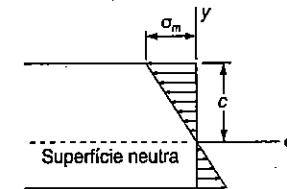


Fig. 4.11

Estabelecendo-se a soma das forças elementares, $\sigma_x dA$, igual a zero, provamos que o eixo neutro passa pelo centróide da seção transversal de uma barra em flexão pura. Então, estabelecendo-se o somatório dos momentos das forças elementares igual ao momento fletor, obtemos a fórmula da flexão elástica para a máxima tensão normal,

$$\text{Fórmula da flexão elástica } \sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (4.15)$$

onde I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo neutro. Também obtemos a tensão normal em qualquer distância y do eixo neutro:

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \quad (4.16)$$

Notando que I e c dependem unicamente da geometria da seção transversal, introduzimos o módulo resistente à flexão:

$$\text{Módulo resistente } W = \frac{I}{c} \quad (4.17)$$

e então usamos o módulo resistente para escrever uma expressão alternativa para a tensão normal máxima:

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \quad (4.18)$$

Lembrando que a curvatura de uma barra é o recíproco deste raio de curvatura, nós expressamos a *curvatura* do membro como:

$$\text{Curvatura da barra } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.21)$$

Curvatura anticlástica

Na Sec. 4.6, completamos nosso estudo de flexão de barras homogêneas que possuem um plano de simetria, através da deformação que ocorre no plano de uma seção transversal e que resulta numa *curvatura anticlástica* dos membros.

Barras feitas de materiais diferentes

Depois consideramos a flexão de barras feitas de vários materiais com *diferentes módulos de elasticidade* (Sec. 4.7). Enquanto seções transversais permanecem planas, verificamos que, em geral, o *eixo neutro não passa pelo centróide* da seção transversal composta (Fig. 4.21).

Seção transformada

Usando a relação entre os módulos de elasticidade dos materiais, nós obtemos uma *seção transformada* correspondente a uma barra equivalente feita inteiramente de um único material. Então usamos os métodos previamente desenvolvidos para determinar as tensões nesse membro homogêneo equivalente (Fig. 4.23), e então novamente usamos a relação dos módulos de elasticidade para determinar as tensões na viga composta (Probs. Resolvidos 4.3 e 4.4).

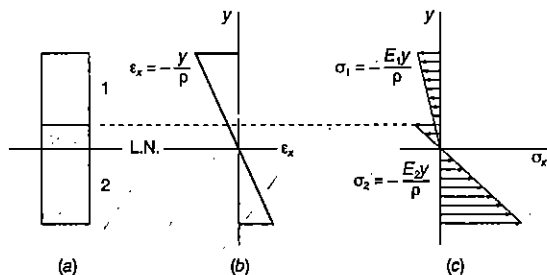


Fig. 4.21 Distribuição de deformação e tensão em barras feitas de dois materiais.

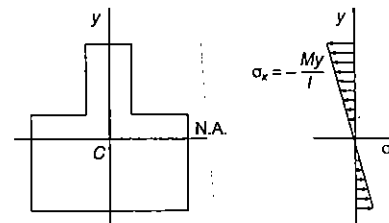


Fig.4.23 Distribuição de tensões seção transformada.

Concentração de tensões

Na Sec. 4.8, as *concentrações de tensões* que ocorrem em barras sujeitas a flexão pura foram discutidas e gráficos foram dados para a determinação dos fatores de concentração de tensão em barras chatas, com adocamentos e entalhes, presentes nas Figs. 4.27 e 4.28.

Deformações plásticas

Em seguida, investigamos as barras feitas de materiais que não seguem a lei de Hooke (Sec. 4.9). Uma viga retangular feita de um *material elastoplástico* (Fig. 4.35) foi analisada com intensidade crescente de momento fletor. O *máximo momento elástico* M_e ocorreu quando o escoamento estava iniciando na viga (Fig. 4.6). Como o momento fletor foi ainda mais aumentado, zonas plásticas desenvolveram-se e o tamanho do núcleo elástico do membro foi reduzido (Sec. 4.10). Finalmente a viga tornou-se completamente plástica e obtivemos o *máximo* ou o *momento plástico* M_p . Na Sec. 4.12, mostramos que *deformações permanentes* e *tensões residuais* permanecem em um membro, mesmo depois das cargas que causaram o escoamento, serem removidas.

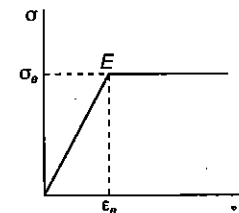


Fig. 4.35 Material elastoplástico.

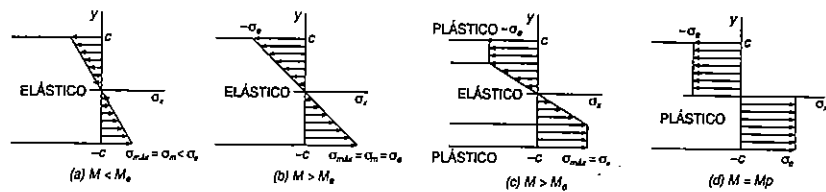


Fig. 4.36

Carregamento axial excêntrico

Na Sec. 4.13, estudamos as tensões em membros *excêntricamente carregados*, com relação ao *plano de simetria*. Nossa análise utilizou métodos desenvolvidos anteriormente. Nós substituímos a *carga excêntrica* por um sistema força-binário localizado no centróide da seção transversal (Fig. 4.42b), e então foram superpostas as tensões devidas a carga centrada e o momento fletor (Fig. 4.45):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \quad (4.50)$$

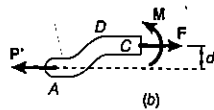


Fig. 4.42

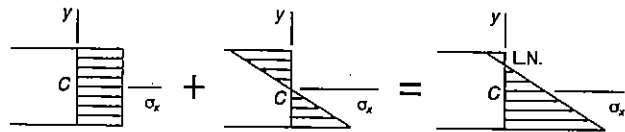


Fig. 4.45

Flexão assimétrica

A flexão de barras de *seção transversal assimétrica* foi considerada depois (Sec. 4.14). Vimos que a fórmula de flexão pode ser usada, desde que o vetor **M** seja direcionada ao longo de um dos eixos centroidais da seção transversal. Vimos que, quando necessário, decompomos **M** em suas componentes ao longo dos eixos principais e superpõem-se as tensões devido aos componentes do momento (Figs. 4.54 e 4.55).

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (4.55)$$

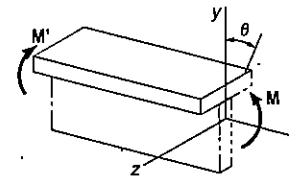


Fig. 4.54

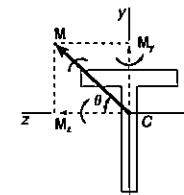


Fig. 4.55

Orientação do eixo neutro

Para o momento **M** mostrado na Fig. 4.59, determinamos a orientação da linha neutra, escrevendo:

$$\text{tg } \phi = \frac{I_z}{I_y} \text{tg } \theta \quad (4.57)$$

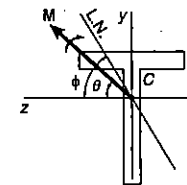


Fig. 4.59

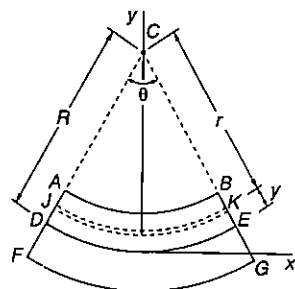
Carregamento axial excêntrico geral

O caso geral de *carregamento axial excêntrico* foi considerado na Sec. 4.15, onde novamente substituímos a carga por um sistema força-binário localizado no centróide. Nós então fizemos a superposição das tensões, devido a carga e as duas componentes do momento, ao longo dos eixos principais:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (4.58)$$

O capítulo é concluído com a análise de tensões em *membros curvos* ou *barras curvas* (Fig. 4.70a). Enquanto as seções transversais permanecem planas quando o membro é submetido à flexão, nós observamos que as *tensões não variam linearmente* e a superfície neutra não passa pelo centróide da seção. A distância R do centro de curvatura do membro à superfície neutra foi encontrada como sendo

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (4.66)$$



(a)

Fig. 4.70

onde A é a área da seção transversal. A tensão normal a uma distância y da superfície neutra foi expressa como:

$$\sigma_x = - \frac{My}{Ae(R - y)} \quad (4.70)$$

onde M é o momento fletor e e a distância do centróide da seção à superfície neutra.

PROBLEMAS DE REVISÃO

4.199 Sabendo-se que a tensão admissível para a viga mostrada é 80 MPa, determinar o momento fletor admissível M , quando: (a) $D = 150$ mm; (b) $D = 180$ mm; (c) $D = 240$ mm.

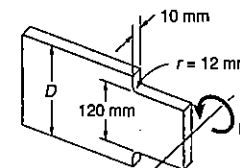


Fig. P4.199

4.200 Duas barras de aço são soldadas a uma placa de aço de 3,2 mm de espessura, formando o elemento de máquina mostrado. Sabendo-se que $Q = 22,5$ kN, determinar a maior tensão de tração no elemento. (Dado: $I_x = 3,6 \times 10^5$ mm⁴.)

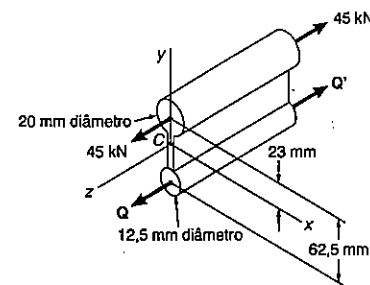


Fig. P4.200 e P4.201

4.201 Duas barras de aço são soldadas a uma placa de aço de 3,2 mm de espessura, formando o elemento de máquina mostrado. Determinar a variação de valores da carga Q , para que a tensão de tração no elemento não exceda 140 MPa. (Dado: $I_x = 3,6 \times 10^5$ mm⁴.)

4.202 Uma única força P é aplicada à barra de aço mostrada. Três sensores elétricos localizados em A , B e D indicam as seguintes deformações específicas:

$$\epsilon_A = 800 \mu \quad \epsilon_B = 400 \mu \quad \epsilon_D = 200 \mu$$

Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar: (a) a intensidade de P ; (b) a linha de ação de P .

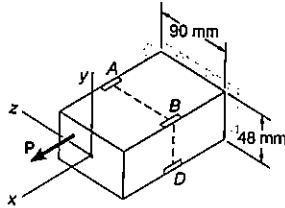


Fig. P4.202

4.203 Um momento M atua em um plano vertical e é aplicado a uma viga que tem a seção transversal mostrada. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar: (a) as máximas tensões, de tração e de compressão; (b) o raio de curvatura da viga.

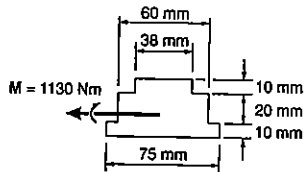


Fig. P4.203

4.204 O momento M é aplicado a uma viga de seção transversal mostrada, num plano que forma um ângulo $\beta = 30^\circ$ com a vertical. Determinar: (a) o ângulo que o eixo neutro forma com o eixo z ; (b) as máximas tensões, de tração e de compressão. (Dado: $I_y = 5 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_z = 6,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$.)

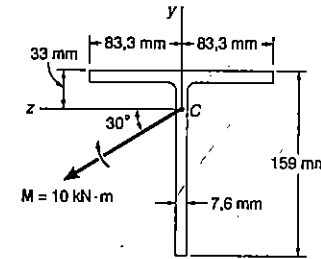


Fig. P4.204

4.205 Para o anel aberto, com uma fenda, e o carregamento mostrado, determinar a tensão no: (a) ponto A ; (b) ponto B .

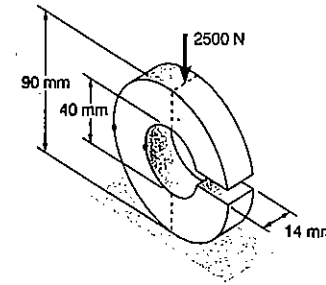


Fig. P4.205

4.206 Duas lâminas de latão são firmemente unidas a um perfil extrudado de alumínio, como mostrado. Usando os dados abaixo, determinar o maior momento fletor permitido, quando o membro composto é curvado em torno de um eixo horizontal.

	Alumínio	Latão
Módulo de elasticidade	70 GPa	105 GPa
Tensão admissível	100 GPa	160 GPa

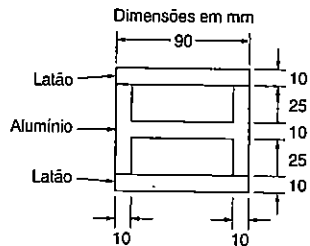


Fig. P4.206

4.207 Para o membro composto do Prob. 4.206, determinar o maior momento fletor admissível, quando o membro é curvado em torno de um eixo vertical.

4.208 Duas lâminas finas de mesmo material e mesma seção transversal são encurvadas, por momentos de mesma intensidade, e coladas juntas. Depois das duas superfícies em contato terem sido firmemente unidas, os momentos são removidos. Expressando por σ_1 a máxima tensão e por ρ_1 o raio de curvatura em cada lâmina, enquanto os momentos estão aplicados, determinar: (a) as tensões finais nos pontos A, B, C e D; (b) o raio de curvatura final.

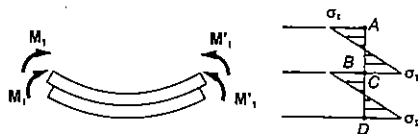


Fig. P4.208

4.209 As quatro barras mostradas têm seção transversal de mesma área. Para os carregamentos dados, mostrar que para estas barras: (a) as máximas tensões de compressão obedecem à proporção 4 : 5 : 7 : 9; (b) as máximas tensões de tração obedecem à proporção 2 : 3 : 5 : 3. (Nota: A seção transversal da barra triangular é um triângulo equilátero.)

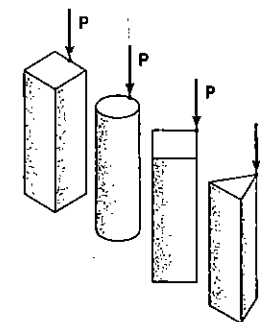


Fig. P4.209

4.210 Um sensor de deformação localizado no ponto A indica uma deformação de -400×10^{-6} mm/mm, quando um momento M é aplicado à viga de aço mostrada. Sabendo-se que M atua em um plano vertical e usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) o momento M aplicado à viga; (b) o correspondente raio de curvatura da viga.

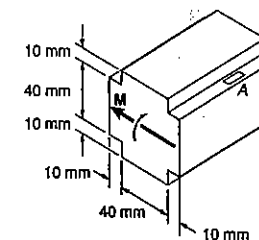


Fig. P4.210

Os problemas a seguir são para ser resolvidos com auxílio de um computador.

4.C1 Uma viga de madeira de 150×350 mm é reforçada por uma chapa de aço, nele encaixada. Usando os dados abaixo, escreva um programa de computador e use-o para calcular o maior momento fletor permissível, que pode ser aplicado à viga para valores de w , desde 90 mm até 150 mm, em intervalos de 10 mm, e com valores de t iguais a 9,5 mm, 12,5 mm e 16 mm.

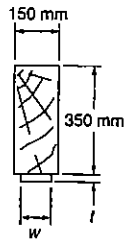


Fig. P4.C1

	Madeira	Aço
Módulo elasticidade	14 GPa	200 GPa
Tensão admissível	14 MPa	125 MPa

4.C2 Uma barra maciça de raio $c = 50$ mm é feita de um aço que é considerado ser um material elastoplástico, com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 240$ MPa. A barra é submetida a um momento fletor M que aumenta desde zero até o máximo momento elástico M_e , e em seguida, até o momento plástico M_p . Expressando por y_e a semi-espessura do núcleo elástico, escreva um programa de computador e use-o para calcular o momento fletor M , e o raio de curvatura ρ , para valores de y_e , desde 50 mm até 0, em intervalos de 10 mm. (Sugestão: Dividir a seção transversal em 100 elementos, de 1 mm de altura.)

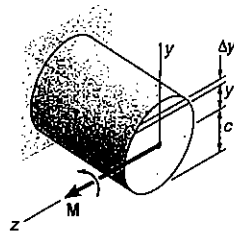


Fig. P4.C2

4.C3 O momento M é aplicado a uma viga de seção transversal mostrada. Escreva um programa de computador que, uma vez dadas as cargas, possa ser usado para calcular as máximas tensões de tração e de compressão na viga. Usar este programa para resolver os Probs. 4.8, 4.10 e 4.203a.

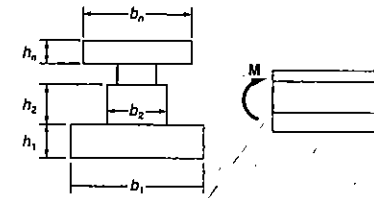


Fig. P4.C3

4.C4 Um momento M de $1,7$ kN·m é aplicado a uma viga de seção transversal mostrada, em um plano que forma um ângulo β com a vertical. Sabendo-se que y e z são os eixos centroidais principais da seção transversal, escreva um programa de computador e use-o para calcular a tensão em A , B , D e E para valores de β , desde 0 até 180° , em intervalos de 10° . (Dados: $\bar{z} = 33$ mm; $I_y = 11,4 \times 10^5$ mm⁴; $I_z = 7 \times 10^5$ mm⁴.)

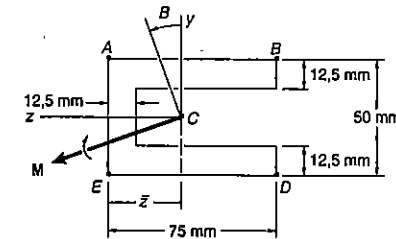
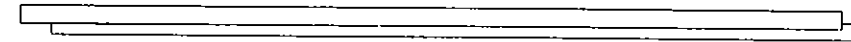


Fig. P4.C4

Capítulo 5

CARREGAMENTO TRANSVERSAL



5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, analisaremos tanto as tensões normais, quanto as tensões de cisalhamento, em barras prismáticas sujeitas a *carregamentos transversais*. Assumindo que a distribuição de tensões normais, devido a flexão, não é afetada pela presença do cisalhamento, determinaremos as forças cisalhantes, atuando nas seções horizontais de uma viga (Secs. 5.3 e 5.4).

Em seguida, determinaremos o *fluxo cisalhante* e as *tensões de cisalhamento horizontais* em vigas. Lembrando do Capítulo 1, que em um dado ponto, as tensões de cisalhamento horizontais e verticais são iguais, nós também iremos determinar as *tensões de cisalhamento sobre seções transversais* (Sec. 5.5).

Nas Secs. 5.6 e 5.7, analisaremos a intensidade e a distribuição das tensões de cisalhamento, em vigas de seção transversal retangular e em vigas compostas de perfis de aço laminados.

Considerando o cisalhamento em um corte longitudinal arbitrário (Sec. 5.8), teremos que determinar o fluxo de cisalhamento e as tensões de cisalhamento ao longo desse corte. Isto nos permitirá determinar, na Sec. 5.9, as tensões de cisalhamento em um ponto qualquer de membros simétricos com parede fina. O efeito das deformações plásticas, sobre a intensidade e a distribuição de tensões de cisalhamento, será discutido na Sec. 5.10.

Na seção seguinte do capítulo (Sec. 5.11), analisaremos a combinação de tensões, devido a esforços axiais, torcionais, flexionais e devido a carregamentos transversais, para que sejam determinadas as tensões, normal e de cisalhamento, em um ponto qualquer de um membro delgado, sujeito a condições gerais de carregamento.

Na última seção do capítulo (Sec. 5.12), definiremos e localizaremos o *centro de cisalhamento* de membros de paredes finas. Também serão determinadas as tensões de cisalhamento em membros de paredes finas, carregados assimetricamente.

5.2 CARREGAMENTO TRANSVERSAL EM BARRAS PRISMÁTICAS

Um exemplo mais comum de carregamento transversal ocorre quando uma barra horizontal, chamada *viga*, é submetida a um carregamento vertical. As cargas podem ser *concentradas* (Fig. 5.1a) ou *distribuídas* (Fig. 5.1b), ou pode ser uma combinação de ambas.

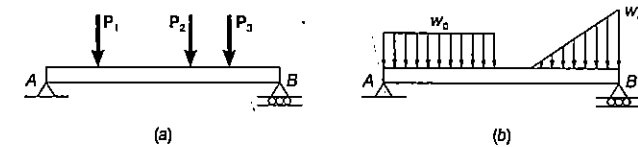


Fig. 5.1

Vamos iniciar o estudo considerando uma viga em balanço *AB*, quer dizer, uma viga com uma extremidade fixa *B*, sujeita à ação de uma força *P* na sua extremidade *A* (Fig. 5.2a). Vamos supor que a viga tem um plano vertical longitudinal de simetria, e que a força *P* está aplicada nesse plano. Podemos passar uma seção transversal em *C*, e considerar o equilíbrio do corpo livre formado pela porção *AC* (Fig. 5.2b). Vemos que as forças internas que atuam em *AC* devem ser equivalentes a uma força cortante *V* de intensidade $V = P$, e a um momento *M* de valor $M = P \cdot x$, sendo *x* a distância de *C* até a extremidade livre *A*. Pela regra de sinais especificada na Sec. 4.1, notamos que o momento fletor *M* é positivo. Vamos adotar agora uma convenção de sinais para a força cortante *V*, dando a *V* o sinal positivo quando a força cortante *V* está direcionada segundo mostra a Fig. 5.2b. Assim, *V* terá sinal positivo, quando a força cortante que é exercida no lado da viga à esquerda da seção for dirigida de cima para baixo.

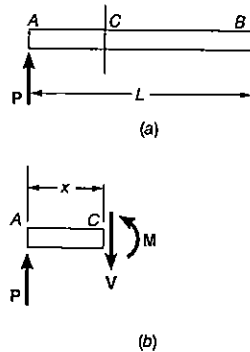


Fig. 5.2

Para exprimir que as forças elementares, normais e cortantes, que atuam na seção são equivalentes à força V e ao momento M , podemos escrever seis equações (Fig. 5.3). Três dessas equações envolvem apenas tensões normais que correspondem a forças normais elementares $\sigma_x dA$, e já foram obtidas na Sec. 4.2. Elas são as Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3, que traduzem o fato de que a soma das forças normais é nula, e que a soma dos seus momentos em relação aos eixos y e z valem, respectivamente, zero e M . No caso de carregamento transversal, o momento fletor M varia com a localização da seção considerada. Devemos agora escrever outras três equações, relacionadas às forças cortantes elementares $\tau_{xy} dA$ e $\tau_{xz} dA$. Uma dessas equações envolve os momentos dos esforços cortantes elementares em relação ao eixo x . Essa equação será abandonada como trivial, uma vez que a peça é simétrica em relação ao plano xy . As outras duas envolvem as componentes nas direções y e z das forças elementares e são:

$$\sum F_y = -V: \quad \int \tau_{xy} dA = -V \quad (5.1)$$

$$\sum F_z = 0: \quad \int \tau_{xz} dA = 0 \quad (5.2)$$

A primeira relação acima mostra que vão existir tensões verticais de cisalhamento em qualquer transversal da viga em estudo, e que essas tensões serão negativas, isto é, dirigidas para baixo. A segunda relação indica que a tensão média de cisalhamento horizontal em qualquer seção é nula. No entanto, como veremos mais adiante, isto não significa que a tensão de cisalhamento τ_{xz} deva ser necessariamente igual a zero em todos os pontos.

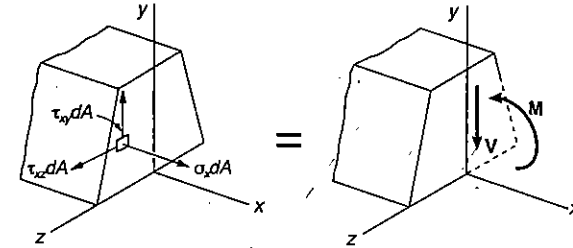


Fig. 5.3

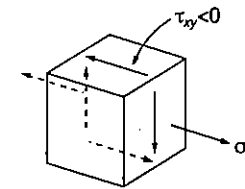


Fig. 5.4

Vamos tomar agora um cubo elementar localizado no plano vertical de simetria da viga (onde τ_{xz} deve ser nula) e estudar as tensões que se exercem em suas faces (Fig. 5.4). Como acabamos de ver, em cada face do elemento perpendicular ao eixo x estão atuando a tensão normal σ_x e a tensão de cisalhamento τ_{xy} . Sabemos, através dos Capítulos 1 e 3, que quando tensões de cisalhamento τ_{xy} atuam nas faces verticais de um elemento, aparecem tensões de mesmo valor nas faces horizontais desse elemento. Concluímos então que devem existir *tensões de cisalhamento longitudinais* em qualquer barra submetida a carregamentos transversais. Isso pode ser verificado se considerarmos uma viga em balanço constituída de várias placas superpostas, ligadas à mesma extremidade fixa (Fig. 5.5a). Quando a força transversal P é aplicada à extremidade livre da viga, vemos que as placas deslizam uma sobre a outra (Fig. 5.5b). Em uma viga feita de material homogêneo e coesivo, o deslizamento não ocorre, mas aparece uma tendência a esse deslizamento, o que mostra a existência de tensões atuando em planos horizontais na direção longitudinal, juntamente com as tensões atuantes nos planos verticais transversais. Por outro lado, se a mesma viga composta de várias placas for submetida ao efeito de um conjugado M aplicado à sua extremidade livre, as placas vão se deformar segundo arcos de circunferência concêntricos e não sofrerão deslizamento relativo (Fig. 5.5c). Isso mostra que não ocorrem tensões de cisalhamento em uma viga sujeita à flexão pura (conf. Sec. 4.3).

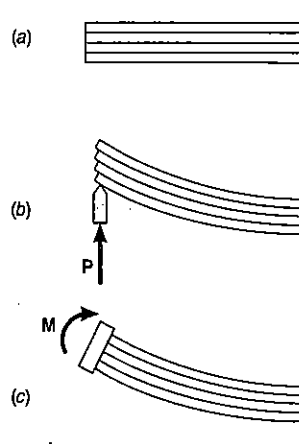


Fig. 5.5

5.3 HIPÓTESES BÁSICAS PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS

Nos capítulos anteriores, quando procuramos determinar a distribuição das tensões devidas a uma carga axial, a um momento torçor ou a um momento fletor (flexão pura), vimos que era conveniente primeiro estudar as deformações correspondentes a esses estados de carregamento. Neste capítulo vamos adotar uma outra forma de análise, pois as deformações causadas por um carregamento transversal são muito mais complexas. *Vamos considerar que a distribuição de tensões normais em uma certa seção transversal não fica afetada pelas deformações provocadas pelas tensões de cisalhamento.* De acordo com essa hipótese, que será verificada na Sec. 5.6, a distribuição de tensões normais em uma certa seção transversal deve ser a mesma quando a viga está submetida à carga transversal P (Fig. 5.6a) ou quando ela está sob a ação do conjugado M de momento $M = P \cdot x$ (Fig. 5.6b). Realmente, os dois carregamentos levam ao mesmo momento fletor na seção estudada e, apesar dos valores diferentes da força cortante ($V = P$ em um dos casos e $V = 0$ no outro), consideramos a mesma distribuição de tensões normais. Enquanto as tensões não ultrapassam o limite de proporcionalidade, podemos determinar as tensões normais com a Eq. 4.16 do Cap. 4, mesmo com carregamento transversal. Nessa equação, o momento será $M = P \cdot x$.

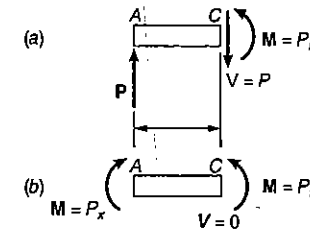


Fig. 5.6

Vamos adotar a origem do sistema de eixos coordenados no centróide da seção transversal da extremidade livre da viga, de modo que a abscissa x mede a distância de qualquer ponto até a carga P , e a ordenada y mede a distância de qualquer fibra até a superfície neutra (Fig. 5.7). Escrevemos

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = -\frac{Pxy}{I} \tag{5.3}$$

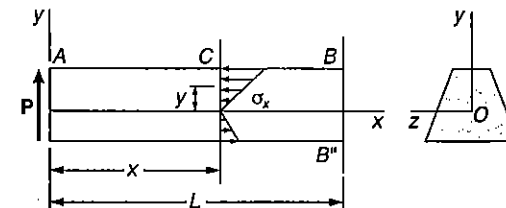


Fig. 5.7

Podemos ver que a distribuição das tensões normais em uma certa seção ($x =$ constante) é linear, como no caso da flexão pura. Ocorre agora que as tensões são proporcionais à distância x , entre a força e a seção considerada. Desse modo, a máxima tensão de compressão na viga vai ocorrer no ponto B , enquanto a tensão máxima de tração acontece em B'' , pontos que correspondem a $x = L$.

Uma vez determinada a distribuição de tensões normais na viga, podemos encontrar a distribuição de tensões de cisalhamento τ_{xy} através de uma simples condição de equilíbrio.

5.4 DETERMINAÇÃO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO EM UM PLANO HORIZONTAL

A Fig. 5.4 mostra que τ_{xy} representa, ao mesmo tempo, a componente vertical da tensão de cisalhamento em uma seção transversal perpendicular ao eixo da barra, e a componente longitudinal da tensão de cisalhamento que age em uma seção horizontal.

Faremos a determinação de τ_{xy} analisando as forças que atuam em uma seção horizontal da viga.

Vamos considerar novamente uma viga em balanço AB que suporta a força P em sua extremidade livre (Fig. 5.8). Cortamos a viga pela seção horizontal $A'C'$ que passa a uma distância y_1 acima da linha neutra e pela seção vertical CC' que passa a uma distância x da extremidade livre da viga, obtendo a porção $ACC'A$. As forças que atuam nessa porção da viga são indicadas na Fig. 5.9. Elas incluem uma parte P' da força P aplicada à viga, a força cortante V' na seção CC' , e os esforços normais $\sigma_x dA$ que agem também nessa seção e a resultante das forças horizontais provenientes da tensão de cisalhamento na face inferior do corpo livre, que chamaremos de H . Usando a Eq. 5.3 temos:

$$\sigma_x dA = -\frac{Pxy}{I} dA$$

Barras Submetidas a Carregamento Transversal

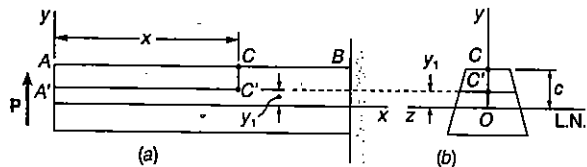


Fig. 5.8

Escrevemos agora a expressão da condição de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ para o corpo livre $ACC'A$:

$$\Sigma F_x = 0: \quad H - \int \frac{Pxy}{I} dA = 0$$

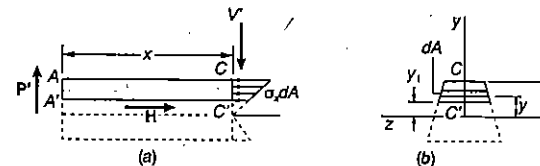


Fig. 5.9

Dessa equação, explicitando o valor de H , e sabendo que x é constante ao longo da seção transversal, temos:

$$H = \frac{Px}{I} \int_{y=y_1}^{y=c} y dA \quad (5.4)$$

A integral acima representa o momento estático da área que fica acima da linha $y=y_1$ em relação à linha neutra. Chamando de Q esse momento estático, escrevemos

$$Q = \int_{y=y_1}^{y=c} y dA \quad (5.5)$$

observando também que¹

$$Q = A\bar{y} \quad (5.5')$$

onde A é a área sombreada na seção transversal da Fig. 5.9b e \bar{y} é a distância do seu centróide até a linha neutra. Substituindo (5.5) em (5.4) podemos escrever

$$H = \frac{PQ}{I} x \quad (5.6)$$

¹ Ver Apêndice A.

A Eq. 5.6 mostra-nos que a força horizontal H que provém das tensões de cisalhamento na face inferior da porção $ACC'A'$ é proporcional ao comprimento x dessa porção. Daí decorre que, para um certo valor de y_1 , o esforço cisalhante horizontal por unidade de comprimento, H/x , é constante e igual a PQ/I . O esforço horizontal por unidade de comprimento será denominado *fluxo de cisalhamento* (por uma razão que se tornará clara na Sec. 5.8) e expresso por q . Escrevemos então

$$q = \frac{PQ}{I} \quad (5.7)$$

Teríamos obtido os mesmos resultados se tivéssemos estudado o equilíbrio do corpo livre obtido com a porção inferior da viga, $A'C''A''$ (Fig. 5.10), uma vez que os esforços horizontais de cisalhamento que as duas porções exercem uma sobre a outra são iguais e de sentidos contrários. Isso mostra que o momento estático Q da parte da seção transversal que fica abaixo da linha $y = y_1$ em relação à linha neutra (Fig. 5.10b) é igual em módulo, e de sinal contrário àquele relativo à área localizada acima da mesma linha (Fig. 5.8b). Realmente, a soma desses dois momentos estáticos é igual ao momento da área de toda a seção transversal em relação ao eixo concêntrico, e, desse modo, a soma é nula. Essa propriedade às vezes é útil para a determinação de Q . Podemos notar que o momento estático máximo ocorre para $y_1 = 0$, pois na integral (5.5) os elementos da seção acima da linha neutra contribuem com sinal positivo, enquanto os elementos abaixo a linha neutra contribuem com sinal negativo.

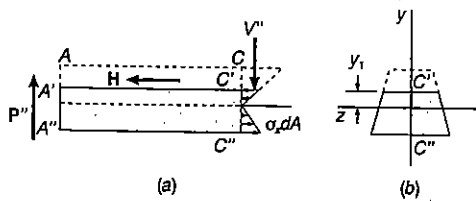


Fig. 5.10

No caso de uma viga submetida a vários carregamentos concentrados ou distribuídos (Fig. 5.11a), podemos aplicar o princípio da superposição para determinarmos o fluxo de cisalhamento q em um certo ponto C' . Na Eq. 5.7 substituímos a força P pela soma das forças que se exercem na parte da viga que fica à esquerda da seção que passa por C' . Essa soma é igual à força cortante V que age na seção (Fig. 5.11b) e escrevemos

$$q = \frac{VQ}{I} \quad (5.8)$$

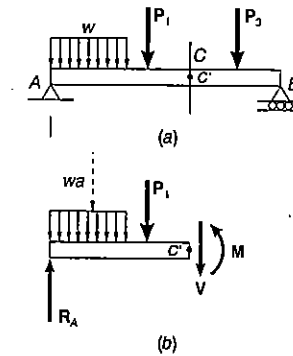


Fig. 5.11

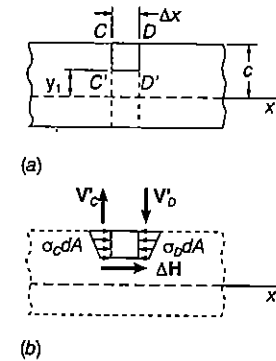


Fig. 5.12

Nessa expressão, lembramos que Q é o momento estático, em relação à linha neutra, da área localizada acima ou abaixo do ponto C' , onde o fluxo de cisalhamento é calculado, e I é o momento de inércia de toda a área da seção transversal em relação ao eixo centroidal.

Podemos observar da Eq. 5.8 que q permanece constante entre dois carregamentos sucessivos, uma vez que V também é constante. Comprovamos então que, no caso de uma viga submetida à flexão pura, produzida apenas por dois conjugados

iguais e de sentidos opostos, a força cortante V e a força horizontal por unidade de comprimento, q , são nulas².

EXEMPLO 5.1

Uma viga de madeira é constituída por três peças de 20 por 100 mm de seção transversal, que são pregadas umas às outras. O espaçamento entre os pregos é de 25 mm. Sabendo-se que a viga está submetida a uma força cortante V de 500 N, determinar a força de corte em cada prego.

Inicialmente vamos determinar a força horizontal por unidade de comprimento que se exerce na face inferior da peça superior da viga. Para isso usamos a Eq. 5.8, na qual Q é o momento estático, em relação à linha neutra, da área sombreada na Fig.

² A Eq. 5.8 pode ser obtida diretamente para o carregamento indicado na Fig. 5.11a, se considerarmos o equilíbrio da parte da viga que fica localizada acima do plano horizontal $C'D'$ e entre os planos verticais CC' e DD' (Fig. 5.12a).

Vamos chamar de σ_C e σ_D às tensões normais nas seções CC' e DD' , respectivamente, e de ΔH à força cortante horizontal que se exerce na face inferior do corpo (Fig. 5.12b). Podemos escrever

$$\Sigma F_x = 0: \Delta H - \int (\sigma_D - \sigma_C) dA = 0$$

Determinando nessa equação o valor de ΔH , e usando a Eq. 4.16 para escrever as tensões normais em função dos momentos fletores em C e D vamos ter

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_{y=y_1}^{y=c} y dA$$

A integral acima tem o seu valor dado por (5.5). Chamando de ΔM à diferença de momentos entre C e D , escrevemos

$$\Delta H = \frac{(\Delta M)Q}{I}$$

ou, dividindo os dois membros da relação por Δx , e fazendo Δx tender a zero,

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I}$$

Nessa expressão, dH/dx representa a força horizontal por unidade de comprimento, ou fluxo de cisalhamento, q , e a derivada dM/dx do momento fletor em relação a x é igual à força cortante V , como será demonstrado no item 7.3. Podemos dizer então que

$$q = \frac{VQ}{I} \tag{5.8}$$

5.14a denominada A' , e I é o momento de inércia, em relação à linha neutra, da área total da seção transversal (Fig. 5.14b). Para o cálculo de Q , multiplicamos o valor da área A' pela distância do seu centróide até a linha neutra³, obtendo

$$\begin{aligned} Q &= A'\bar{y} = (0,020 \text{ m} \times 0,100 \text{ m})(0,060 \text{ m}) = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ I &= \frac{1}{12} (0,020 \text{ m})(0,100 \text{ m})^3 \\ &\quad + 2 \left[\frac{1}{12} (0,100 \text{ m})(0,020 \text{ m})^3 \right. \\ &\quad \left. + (0,020 \text{ m} \times 0,100 \text{ m})(0,060 \text{ m})^2 \right] \\ &= 1,667 \times 10^{-6} + 2(0,0667 + 7,2)10^{-6} = 1,20 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

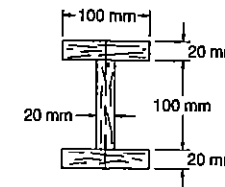


Fig. ex.5.13

Levando esses valores à Eq. 5.8, podemos escrever

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500 \text{ N})(120 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{16,20 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3704 \text{ N/m}$$

Como o espaçamento entre os pregos é de 25 mm, a força cortante em cada prego é de

$$F = (0,025 \text{ m})q = (0,025 \text{ m})(3704 \text{ N/m}) = 92,6 \text{ N}$$

³ V. Apêndice A.

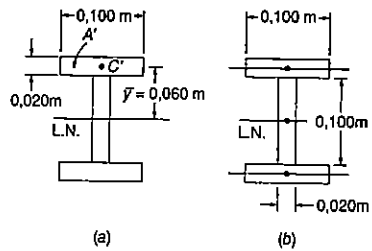


Fig. ex.5.14

5.5 DETERMINAÇÃO DA TENSÃO DE CISCALHAMENTO τ_{xy} EM UMA VIGA

Consideremos uma viga com plano vertical de simetria, submetida a um carregamento distribuído ou concentrado que atua nesse plano. A seção precedente mostrou-nos que, se V é a força cortante vertical em qualquer seção transversal, a força horizontal de cisalhamento por unidade de comprimento, ou fluxo de cisalhamento, q , em um ponto C' dessa seção é

$$q = \frac{VQ}{I} \tag{5.8}$$

onde I é o momento de inércia da seção em relação à linha neutra e Q é o momento estático definido pela Eq. 5.5. A força horizontal ΔH que se exerce em um comprimento Δx da seção horizontal que passa por C' (Fig. 5.15) é então

$$\Delta H = q \Delta x = \frac{VQ}{I} \Delta x \tag{5.9}$$

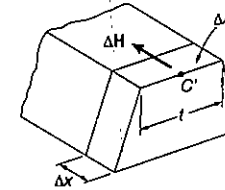


Fig. 5.15

Se dividirmos (5.9) pela área $\Delta A = t \cdot \Delta x$, vamos obter a tensão média de cisalhamento τ_{xy} . Na expressão de ΔA , t é a largura da seção horizontal. Temos então

$$\tau_{méd} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{t \Delta x}$$

ou

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} \tag{5.10}$$

Sabemos que as tensões de cisalhamento que se exercem em um plano transversal e em um plano horizontal são iguais (respectivamente, τ_{xy} e τ_{yx}). Podemos dizer então que a expressão obtida para a tensão horizontal em C' também representa o valor médio τ_{xy} ao longo da linha $C'_1 C'_2$ (Fig. 5.16).

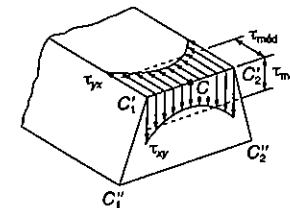


Fig. 5.16

Nas faces superior e inferior da viga $\tau_{yx} = 0$, uma vez que não há forças atuantes nessas faces. Segue daí que $\tau_{xy} = 0$ na aresta superior e na aresta inferior da seção transversal (Fig. 5.17). Devemos notar que, enquanto Q é máximo para $y = 0$, (Sec. 5.3), não podemos adiantar que a tensão $\tau_{méd}$ é máxima ao longo da linha neutra, pois a tensão média depende também da largura t da seção.

Quando a largura da viga se mantém pequena em comparação à altura da seção, as tensões de cisalhamento variam muito pouco ao longo da linha C_1C_2 e a Eq. 5.10 pode ser usada para o cálculo de τ_{xy} em qualquer ponto ao longo de C_1C_2 . Na verdade, as tensões em C_1 e C_2 são maiores que a tensão em C' , mas a teoria da elasticidade prova que⁴, para vigas de seção retangular de largura b e altura h , onde a relação $b/h < 1/4$, o valor da tensão de cisalhamento em C_1 e C_2 (Fig. 5.18) não excede mais de 0,8% do valor médio calculado para a linha neutra⁵.

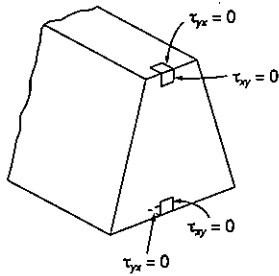


Fig. 5.17

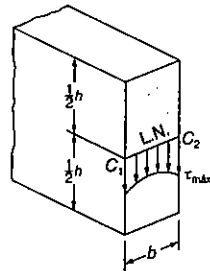


Fig. 5.18

4 V. S. P. Timoshenko e J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3ª ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 1970, sec. 124.

5 Por outro lado, para valores altos da relação b/h , o valor da tensão $\tau_{méd}$ calculado ao longo da linha neutra pode ser bem menor que a tensão máxima em C_1 e C_2 , como indica a tabela.

b/h	0,25	0,5	1	2	4	6	10	20	50
$\tau_{máx} / \tau_{méd}$	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988	2,582	3,770	6,740	15,65
$\tau_{mín} / \tau_{méd}$	0,996	0,983	0,940	0,856	0,805	0,800	0,800	0,800	0,800

5.6 TENSÕES DE CISALHAMENTO τ_{xy} EM VIGAS DE SEÇÕES TRANSVERSAIS USUAIS

Vimos na seção precedente que, para uma viga de seção retangular de largura pequena em relação à altura, onde $b \leq \frac{1}{4}h$, a variação da tensão de cisalhamento ao longo da largura é menos de 0,8% da tensão média $\tau_{méd}$. Nas aplicações práticas pode ser usada a Eq. 5.10 para a determinação da tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal, e podemos escrever

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \tag{5.11}$$

onde t é igual à largura b da viga, e onde Q representa o momento estático, em relação à linha neutra da área sombreada A' indicada na Fig. 5.19.

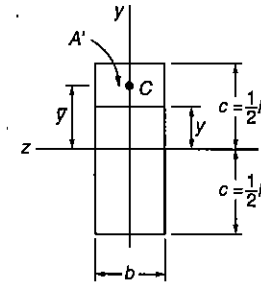


Fig. 5.19

A distância da linha neutra ao centróide C' da área A' é $y = \frac{1}{2}(c + y)$. Usando a Eq. 5.5', escrevemos

$$Q = A'\bar{y} = b(c - y)\frac{1}{2}(c + y) = \frac{1}{2}b(c^2 - y^2) \tag{5.12}$$

Lembrando, por outro lado, que $I = bh^3/12 = \frac{2}{3}bc^3$, temos

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V$$

ou, sendo a área da seção transversal igual a $A = 2bc$,

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \quad (5.13)$$

A Eq. 5.13 mostra que a distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção transversal de uma viga retangular é *parabólica* (Fig. 5.20). Como já havíamos observado, as tensões de cisalhamento são nulas no cume e na base da seção transversal ($y = \pm c$). Fazendo $y = 0$ na Eq. 5.13, podemos obter o valor da máxima tensão de cisalhamento para uma certa seção de uma *viga retangular estreita*.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3V}{2A} \quad (5.14)$$

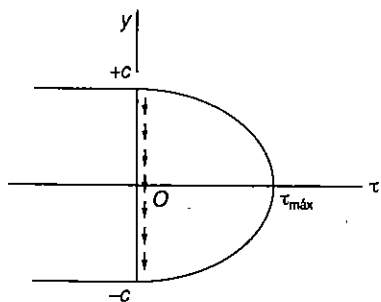


Fig. 5.20

A relação obtida indica que a máxima tensão de cisalhamento em uma viga de seção retangular é mais de 50% maior que o valor V/A , que seria obtido se, erroneamente, adotássemos uma distribuição de tensões uniforme ao longo da seção transversal.

A Eq. 5.10 pode ser usada também no estudo de perfis em forma de *I* ou perfis de abas largas. Nesses casos, podemos calcular o valor médio da tensão de cisalhamento τ_{xy} em uma fibra aa' ou bb' da seção transversal da viga (Figs. 5.21a e b). Escrevemos

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} \quad (5.10)$$

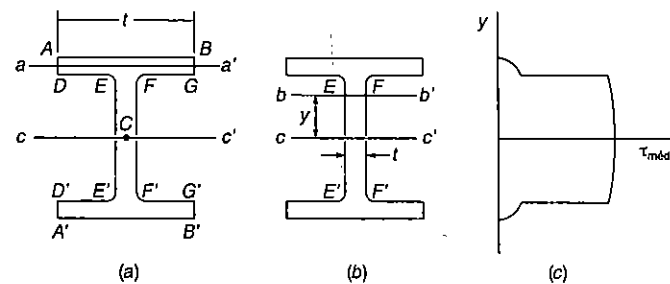


Fig. 5.21

Nessa fórmula, V é a força cortante, t é a largura da seção da fibra estudada, Q é o momento estático da área sombreada em relação à linha neutra cc' e I é o momento de inércia da seção em relação a cc' . Podemos construir o gráfico da distribuição de tensões, marcando $\tau_{méd}$ em relação a y , como indica a Fig. 5.21c. A curva obtida é descontínua nos pontos em que ocorre diferença do valor t , quando se passa das abas $ABGD$ e $A'B'G'D'$ para a alma $EFF'E'$ do perfil.

No caso da alma do perfil, a tensão de cisalhamento varia muito pouco ao longo da seção bb' , e pode ser adotada igual ao valor médio $\tau_{méd}$. Para as abas, o comportamento é diferente. Considerando, por exemplo, a linha horizontal $DEFG$, vemos que a tensão τ_{xy} é nula entre D e E e entre F e G , uma vez que esses dois segmentos fazem parte da superfície livre do perfil. Já entre E e F o valor de τ_{xy} é dado por (5.10), com $t = EF$. Na prática, considera-se que todo o esforço cortante é absorvido pela alma, e que uma boa aproximação do valor máximo da tensão de cisalhamento se obtém quando se divide V pela área da seção transversal da alma.

Uma observação que se faz necessária é que, apesar de podermos desprezar as tensões τ_{xy} nas abas do perfil, não poderemos fazer o mesmo com a componente horizontal τ_{xz} , que tem um valor apreciável. Na Sec. 5.8 será determinado o valor de τ_{xz} .

*5.7 ANÁLISE MAIS DETALHADA DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM UMA VIGA DE SEÇÃO RETANGULAR ESTREITA

Consideremos o caso de uma viga estreita de seção retangular, em balanço, submetida à força P aplicada em sua extremidade livre (Fig. 5.22). Como a força cortante V na viga é constante e de mesma intensidade da carga aplicada, P , a Eq. 5.13 leva a

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \quad (5.15)$$



Fig. 5.22

Pela Eq. 5.15 vemos que as tensões de cisalhamento dependem apenas da distância y do ponto que se estuda até a linha neutra. Assim, elas são independentes da distância ao ponto de aplicação da carga; todos os elementos localizados à mesma distância da linha neutra terão, desse modo, a mesma deformação de cisalhamento (Fig. 5.23). As seções planas não se mantêm planas, e a distância entre dois pontos D e D' localizados à mesma distância da linha neutra, em seções diferentes, permanece sempre a mesma. Isso indica que as deformações específicas normais ϵ_x e, conseqüentemente, as tensões normais σ_x não são afetadas pelas tensões de cisalhamento, justificando a hipótese feita na Sec. 5.2, para o carregamento da Fig. 5.22.

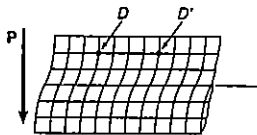


Fig. 5.23

Concluimos então que é válida a análise feita para as tensões em uma viga em balanço, com uma força concentrada P em sua extremidade. Os valores das tensões de cisalhamento são dados pela Eq. 5.15, as tensões normais são obtidas pela Eq. 5.3. Com a carga P dirigida de cima para baixo, essa equação leva a

$$\sigma_x = + \frac{Pxy}{I} \quad (5.16)$$

A validade destas conclusões depende, no entanto, das condições das extremidades da viga. Para que a Eq. 5.15 possa ser aplicada em qualquer ponto da viga, a força P deve ter distribuição parabólica ao longo da seção extrema da viga, e o apoio fixo deve ter a possibilidade de permitir a deformação de cisalhamento indicada na Fig. 5.23. O modelo que atende a essas condições está mostrado na Fig. 5.24 e é bem diferente dos casos encontrados na prática. O princípio de Saint-Venant nos garante, mesmo para condições de carregamento e de apoios diferentes, que a distribuição de tensões pode ser determinada pelas Eqs. 5.15 e 5.16, a não ser nas proximidades dos extremos da viga. Assim, encontraremos a distribuição correta das tensões em casos bem diferentes daquele indicado na Fig. 5.24.

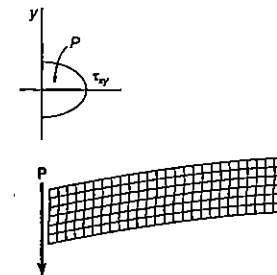


Fig. 5.24

Quando uma viga de seção retangular fica submetida a várias forças concentradas (Fig. 5.25), podemos usar o princípio da superposição para determinarmos as tensões normais e as tensões de cisalhamento em seções localizadas entre os pontos de aplicação das cargas. Os resultados obtidos não serão válidos para as seções vizinhas aos pontos de aplicação das forças, pois essas forças não se aplicam com distribuição parabólica, mas diretamente na superfície da viga.

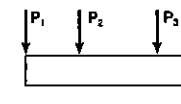


Fig. 5.25

Quando a viga estiver submetida a carregamento distribuído (Fig. 5.26), a força cortante varia com a distância da seção estudada ao ponto inicial da viga, variando também a tensão de cisalhamento em uma certa fibra y . As deformações de cisalhamento resultantes apresentam-se de forma que a distância entre dois pontos correspondentes, situados em seções transversais diferentes, tais como D_1 e D'_1 ou D_2 e D'_2 , irá depender da elevação dos pontos. Isso significa que a hipótese de que as seções planas se mantêm planas, usada na dedução das Eqs. 5.15 e 5.16, deve ser rejeitada para a condição de carregamento da Fig. 5.26. O erro envolvido é pequeno, e pode ser desprezado para as vigas comuns da prática em que a relação entre a altura e o vão se situa dentro de certos parâmetros.

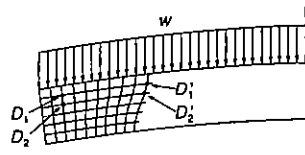
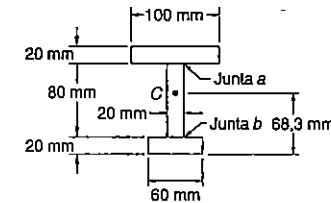
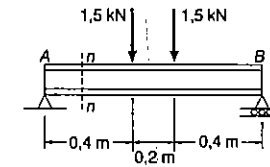


Fig. 5.26

Devemos notar também que, nas partes da viga localizadas embaixo de cargas concentradas ou distribuídas, vão ocorrer tensões normais σ_y nas faces horizontais dos cubos elementares que constituem a viga, juntamente com as tensões τ_{xy} mostradas na Fig. 5.4. O Capítulo 7 discute este assunto.

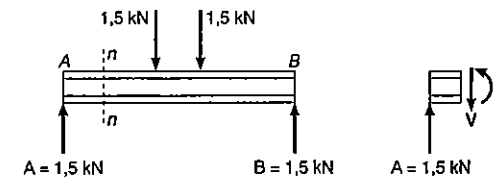
PROBLEMA RESOLVIDO 5.1

A viga AB é constituída por três peças coladas umas às outras e está submetida ao carregamento indicado, que atua em seu plano de simetria. Sabendo-se que a largura de cada junta colada é de 20 mm, determinar a tensão de cisalhamento média na seção $n-n$ da viga. O esquema indica a localização do centróide da seção transversal, e o momento de inércia da seção é $I = 8,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. A tensão de cisalhamento deve ser calculada nas juntas coladas.



Força cortante na seção $n-n$. Como a viga e seu carregamento são simétricos em relação ao centro do vão, temos $A = B = 1,5 \text{ kN} \uparrow$. Se considerarmos a parte da viga à esquerda da seção $n-n$ como corpo livre, podemos escrever

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 1,5 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 1,5 \text{ kN}$$

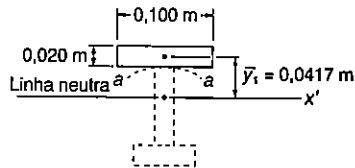


Tensão de cisalhamento na junta a . Passando uma seção $a-a$ ao longo da junta colada, separamos a seção transversal em duas partes. Vamos calcular Q determinando o momento estático da área acima da seção $a-a$ em relação à linha neutra.

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0,100 \text{ m})(0,20 \text{ m})](0,0417 \text{ m}) = 83,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Usamos a Eq. 5.10 para a determinação da tensão de cisalhamento nessa junta, com largura de 0,020 m.

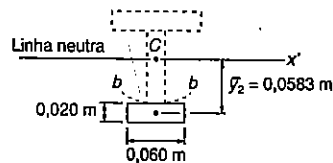
$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(83,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,020 \text{ m})} \quad \tau_{\text{méd}} = 725 \text{ kPa}$$



Tensão de cisalhamento na junta b. Dividimos a viga pela seção b-b e usamos a área abaixo dessa seção para o cálculo de Q

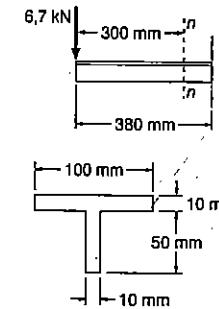
$$Q = A\bar{y}_2 = [(0,060 \text{ m})(0,20 \text{ m})](0,0583 \text{ m}) = 70,0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(70,0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,020 \text{ m})} \quad \tau_{\text{méd}} = 608 \text{ kPa}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 5.2

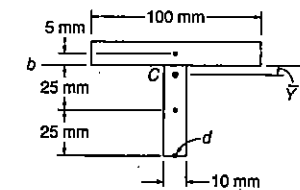
Uma peça de máquina em forma de perfil T fica submetida a uma força atuante no seu plano de simetria. Determinar: (a) a máxima tensão de compressão na seção n-n; (b) a máxima tensão de cisalhamento.



Linha neutra. A linha neutra passa pelo centróide C da seção transversal. Usando o eixo b-b como eixo de referência e adotando orientação positiva do eixo para baixo, escrevemos:

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{(0,1 \text{ m})(0,01 \text{ m})(-0,005 \text{ m}) + (0,05 \text{ m})(0,01 \text{ m})(0,025 \text{ m})}{(0,1 \text{ m})(0,01 \text{ m}) + (0,05 \text{ m})(0,01 \text{ m})}$$

$$\bar{Y} = \frac{7,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3}{1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 5,00 \times 10^{-3} \text{ m} = 5 \text{ mm}$$



Momento de inércia centroidal. Usando o teorema dos eixos paralelos.

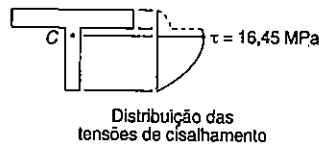
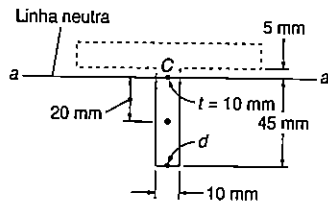
$$I = 1/12(0,1 \text{ m})(0,01 \text{ m})^3 + (0,1 \text{ m})(0,01 \text{ m})(0,005 \text{ m} + 0,005 \text{ m})^2 + 1/12(0,01 \text{ m})(0,05 \text{ m})^3 + (0,01 \text{ m})(0,05 \text{ m})(0,025 \text{ m} - 0,005 \text{ m})^2$$

$$I = 4,125 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

(a) **Tensão máxima de compressão.** Na seção $n-n$ o momento fletor vale $M = (6,7 \text{ kN})(0,3 \text{ m}) = 2,01 \text{ kN} \cdot \text{m}$. A tensão máxima de compressão ocorre no ponto d para o qual $c = 50 \text{ mm} - 5 \text{ mm} = 45 \text{ mm}$. Escrevemos:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(2,01 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,045 \text{ m})}{4,125 \times 10^{-7} \text{ m}^4} \quad \sigma_m = 219,3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Tensão de cisalhamento máxima.** O maior valor do momento estático Q é em relação à linha neutra e, na seção transversal que estudamos, a menor largura se situa na linha neutra. Desse modo, a máxima tensão de cisalhamento ocorre na fibra da linha neutra. Passando por essa fibra a seção $a-a$, dividimos a seção transversal em duas partes. Adotando para o cálculo a parte inferior à seção $a-a$, temos



$$Q = (0,045 \text{ m})(0,01 \text{ m}) \frac{(0,045 \text{ m})}{2} = 1,012 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Notando que $V = 6,7 \text{ kN}$ e que $t = 0,01 \text{ m}$, temos

$$\tau_m = \frac{VQ}{It} = \frac{(6,7 \text{ kN})(1,012 \times 10^{-5} \text{ m}^3)}{(4,125 \times 10^{-7} \text{ m}^4)(0,01 \text{ m})} = 16450 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_m = 16,45 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

5.1 Três tábuas, cada uma com seção transversal retangular de $40 \times 90 \text{ mm}$, são pregadas juntas para formar uma viga que é submetida a uma força cortante vertical de $1,1 \text{ kN}$. Sabendo-se que o espaçamento entre cada um dos pares de pregos é de 60 mm , determinar a força cortante em cada prego.

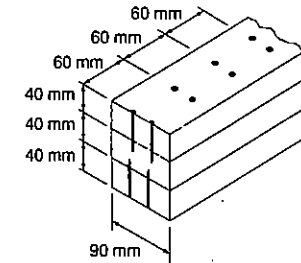


Fig. P5.1

5.2 Três tábuas, cada uma com 50 mm de espessura, são pregadas juntas para formar uma viga que é submetida a uma força cortante vertical. Sabendo-se que a força cisalhante admissível em cada prego é de 670 N , determinar a força cortante admissível, se o espaçamento entre os pregos é de $s = 75 \text{ mm}$.

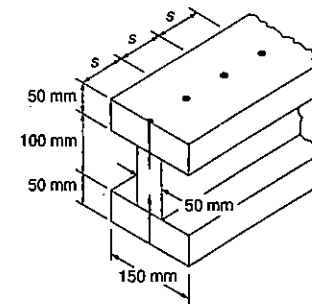


Fig. P5.2

5.3 Resolver o Prob. 5.2, considerando que o espaçamento entre os pregos é aumentado para $s = 100 \text{ mm}$.

5.4 Três tábuas são pregadas juntas para formar a viga mostrada, que é submetida a uma força cortante vertical. Sabendo-se que o espaçamento entre os pregos é $s = 75$ mm e que a força cisalhante admissível em cada prego é de 400 N, determinar a força cortante admissível, quando $w = 120$ mm.

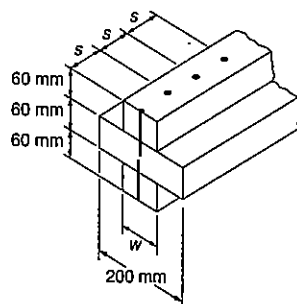


Fig. P5.4

5.5 Resolver o Prob. 5.4, considerando que a largura é diminuída para $w = 100$ mm.

5.6 O perfil de aço laminado S310×52 é reforçado com duas placas de 16×200 mm e constitui a seção transversal de uma viga. Usando parafusos de 18 mm de diâmetro e espaçados longitudinalmente de 120 mm e, sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível nos parafusos é de 90 MPa, determinar a maior força cisalhante vertical permitida.

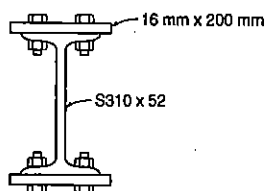


Fig. P5.6

5.7 Resolver o Prob. 5.6, considerando que duas placas de 12×200 mm são usadas para reforçar a viga mostrada.

5.8 A viga composta mostrada é constituída de dois perfis de aço laminados W150×29,8, unidos por parafusos de 16 mm de diâmetro e espaçados longitudinalmente de 150 mm. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível média nos parafusos é de 70 MPa, determinar a maior força cortante permitida.

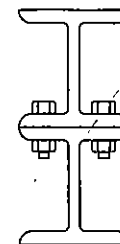


Fig. P5.8

5.9 A viga mostrada foi fabricada com dois perfis de aço laminados e duas placas, unidos por parafusos de 20 mm de diâmetro e espaçados longitudinalmente de 190 mm. Determinar a tensão de cisalhamento média nos parafusos, causada pela ação de uma força cisalhante vertical de 110 kN.

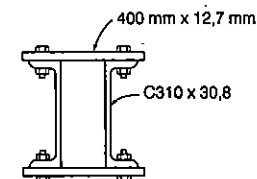


Fig. P5.9

5.10 até 5.13 Para a viga com o carregamento indicado, considerar a seção $n-n$ e determinar: (a) a maior tensão normal; (b) a tensão de cisalhamento no ponto a; (c) a maior tensão de cisalhamento.

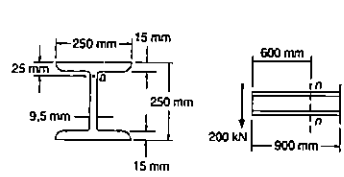


Fig. P5.10

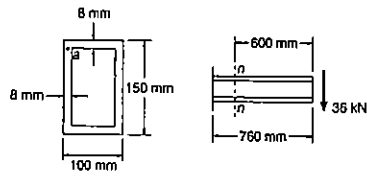


Fig. P5.11

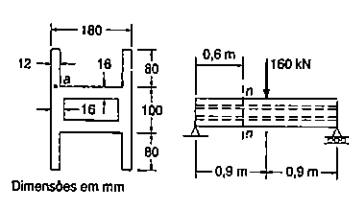


Fig. P5.12

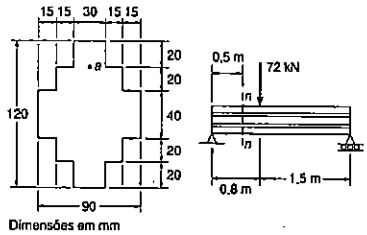


Fig. P5.13

5.14 e 5.15 Para a viga de perfil de aço laminado com abas largas e submetidas ao carregamento indicado, determinar numa seção localizada no meio do vão: (a) a maior tensão normal; (b) a maior tensão de cisalhamento, usando a aproximação $\tau_m = V/A_{alma}$ sugerida na Sec. 5.6.

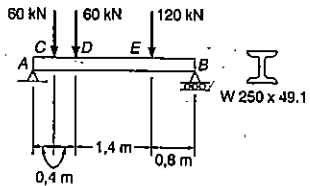


Fig. P5.14

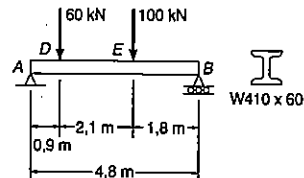


Fig. P5.15

5.16 a 5.17 Para a viga de perfil de aço laminado com abas largas e submetida ao carregamento indicado, determinar numa seção localizada no ponto médio entre os pontos D e E: (a) a maior tensão normal; (b) a maior tensão de cisalhamento, usando a aproximação $\tau_m = V/A_{alma}$ sugerida na Sec. 5.6.

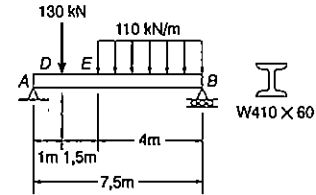


Fig. P5.16

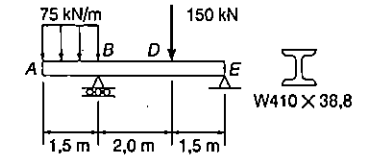


Fig. P5.17

5.18 Duas placas retangulares são soldadas a um perfil de aço laminado com abas largas, formando a viga mostrada. Determinar a maior força cortante admissível, se a tensão de cisalhamento na viga não deve exceder a 90 MPa.

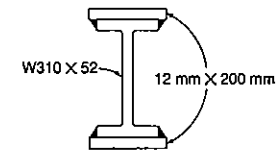


Fig. P5.18

5.19 Resolver o Prob. 5.18, considerando que as duas placas são: (a) substituídas por placas de 8 x 200 mm; (b) removidas.

5.20 Para uma viga de madeira com a seção transversal mostrada, determinar a maior força cortante vertical admissível, se a tensão de cisalhamento não deve exceder a 1035 kPa.

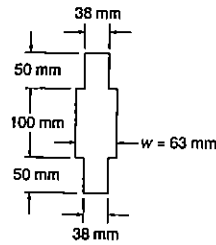


Fig. P5.20

5.21 Resolver o Prob. 5.20, considerando que $w = 50$ mm.

5.22 e 5.23 Para a viga com o carregamento indicado, considerar a seção $n-n$ e determinar a tensão de cisalhamento no: (a) ponto a; (b) ponto b.

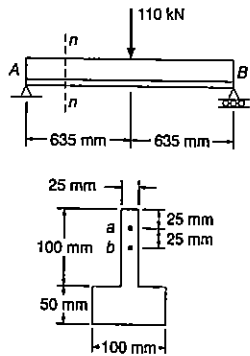


Fig. P5.22

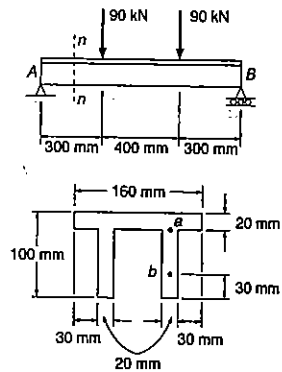


Fig. P5.23

5.24 Para a viga do Prob. 5.23, determinar a maior tensão de cisalhamento, na seção $n-n$.

5.25 Para a viga do Prob. 5.22, determinar a maior tensão de cisalhamento, na seção $n-n$.

5.8 CISALHAMENTO EM UMA SEÇÃO LONGITUDINAL ARBITRÁRIA

Na Sec. 5.4 estudamos o caso de uma viga em balanço AB submetida à força vertical P atuando no seu plano de simetria. Determinamos para essa situação a força H que se exerce na seção horizontal da parte AC da viga. Consideremos agora um corte longitudinal arbitrário $A'C'C''$ da mesma porção AC da viga (Fig. 5.27a). O corpo livre obtido dessa maneira está sujeito às seguintes forças horizontais: a resultante H dos esforços horizontais de cisalhamento que agem na seção longitudinal e os esforços normais $\sigma_x \cdot dA$ que agem na seção transversal em C . Lembrando sobre a Eq. 5.3 podemos expressar essas forças como

$$\sigma_x dA = \frac{-Pxy}{I} dA$$

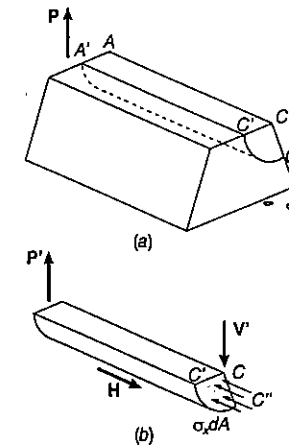


Fig. 5.27

A condição de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ nos leva à mesma equação já vista na Sec. 5.3, que é

$$H - \int \frac{Pxy}{I} dA = 0 \tag{5.4}$$

Encontramos então para o valor de H :

$$H = \frac{PQ}{I}x \quad (5.6)$$

Nessa expressão, Q representa o momento estático da área sombreada da Fig. 5.28 em relação à linha neutra da seção, e I é o momento de inércia de toda a seção.

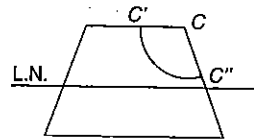


Fig. 5.28

Do que foi exposto, podemos dizer que o fluxo cisalhante, ou o esforço horizontal por unidade de comprimento, pode ser dado pela Eq. 5.7. No caso mais geral de uma viga submetida a várias forças concentradas ou distribuídas, situadas no seu plano de simetria. Temos

$$q = \frac{VQ}{I} \quad (5.8)$$

onde V indica a força cortante vertical na seção considerada.

EXEMPLO 5.2

Uma viga tem seção quadrada vazada constituída de duas tábuas de 20 x 80 mm pregadas a outras duas tábuas de 20 x 120 mm, como indica a Fig. 5.29. Sabe-se que o espaçamento entre os pregos é de 30 mm e que a viga está sujeita a uma força cortante de intensidade $V = 1200$ N. Determinar o esforço de corte em cada prego.

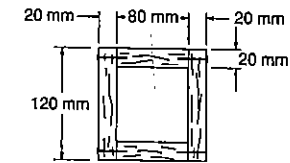


Fig. ex.5.29

Vamos isolar a tábua superior e considerar a força total por unidade de comprimento q , que atua nas suas duas faces. Para isso, usamos a Eq. 5.8, com o valor de Q representando o momento estático em relação à linha neutra da área sombreada da Fig. 5.30a e I é o momento de inércia de toda a seção transversal da viga em relação à linha neutra (Fig. 5.30b). Vamos ter

$$Q = A'\bar{y} = (0,020 \text{ m})(0,080 \text{ m})(0,050 \text{ m}) = 80 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

O momento de inércia de um quadrado de lado a em relação ao eixo centroidal é $I = a^4/12$. Escrevemos

$$I = \frac{1}{12} (0,12 \text{ m})^4 - \frac{1}{2} (0,080 \text{ m})^4 = 13,87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Substituindo esse valor na Eq. 5.8, calculamos

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(1200 \text{ N})(80 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{13,87 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 6920 \text{ N/m}$$

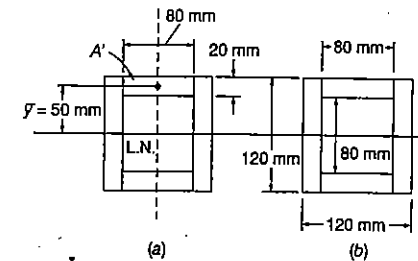


Fig. ex.5.30

As forças que atuam nas faces da tábua são iguais, pois a viga e a própria tábua superior são simétricas em relação ao plano vertical de carregamento. Desse

modo a força que age por unidade de comprimento em cada uma das faces da tábua é $1/2 q = 1/2(6920 \text{ N/m}) = 3460 \text{ N/m}$. Sendo o espaçamento entre os pregos de 30 mm, calculamos o valor da força de corte em cada prego pela expressão

$$F = (0,30 \text{ m})(3460 \text{ N/m}) = 103,8 \text{ N}$$

5.9 TENSÕES DE CISALHAMENTO EM BARRAS DE PAREDES FINAS

Na seção precedente vimos que a Eq. 5.8 pode ser usada na determinação do fluxo cisalhante q em qualquer seção longitudinal de barras submetidas a carregamento vertical atuante no plano de simetria. Do mesmo modo, podemos ampliar o uso da Eq. 5.10. Consideremos, por exemplo, um segmento de comprimento Δx de um perfil de abas largas (Fig. 5.31a), submetido à força cortante vertical V na seção transversal indicada. Se destacarmos uma porção $ABB'A'$ da aba superior do perfil, podemos calcular a força horizontal ΔH na seção cortada por

$$\Delta H = q \Delta x \tag{5.17}$$

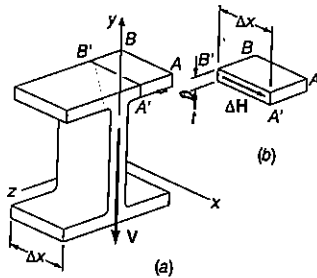


Fig. 5.31

onde q é o fluxo cisalhante na seção cortada. Substituindo o valor de q dado pela Eq. 5.8, e dividindo os dois membros da Eq. 5.17 pela área $\Delta A = t\Delta x$, obtemos mais uma vez

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} \tag{5.10}$$

Devemos notar, no entanto, que agora $\tau_{méd}$ representa o valor médio da tensão de cisalhamento τ_{xz} que atua em uma face vertical. Como a espessura t da aba é pequena, ocorre apenas uma pequena variação de τ_{xz} ao longo da seção cortada. A Fig. 5.32 nos recorda que $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ donde concluímos que a componente horizontal τ_{xz} da tensão de cisalhamento pode ser calculada em qualquer ponto da seção transversal da aba pela Eq. 5.10. Nessa equação, Q é o momento estático da área sombreada (Fig. 5.33a) em relação à linha neutra. Um resultado similar foi encontrado na Sec. 5.6 para a componente vertical τ_{xy} da tensão de cisalhamento na alma do perfil (Fig. 5.33b).

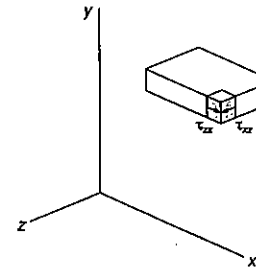


Fig. 5.32

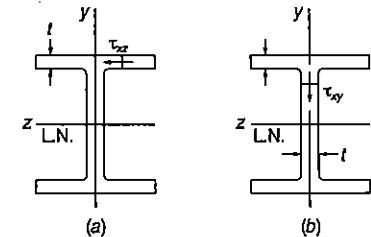


Fig. 5.33

A Eq. 5.10 pode ser usada para a determinação da tensão de cisalhamento em outras barras de paredes delgadas, tais como vigas-caixão ou vigas de seção semicircular (Figs. 5.34 e 5.35) desde que as cargas sejam aplicadas em um plano de simetria da barra.

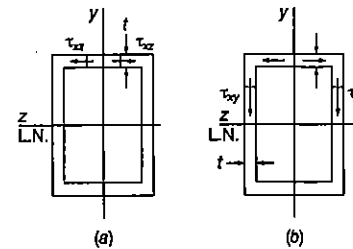


Fig. 5.34

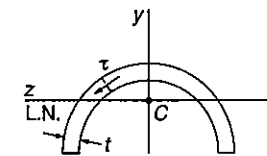
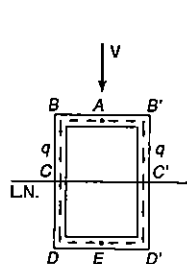


Fig. 5.35

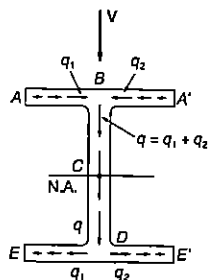
Em cada caso, o corte deve ser perpendicular à superfície da barra, e a Eq. 5.10 nos fornece a componente da tensão de cisalhamento na direção da tangente àquela superfície. (A outra componente pode ser adotada igual a zero, devido à proximidade das duas superfícies livres.)

Comparando as Eqs. 5.8 e 5.10, vemos que o produto da tensão de cisalhamento τ pela espessura t , em um ponto da seção transversal, é igual ao fluxo q . Como V e I são valores constantes para uma certa seção, q é função apenas do momento estático Q , e, desse modo, pode ser facilmente calculado para toda a seção transversal. No caso da viga-caixão, por exemplo (Fig. 5.36), podemos notar que q cresce continuamente desde zero no ponto A até um valor máximo em C e C' , na linha neutra, voltando a zero ao ser atingido o ponto E . Podemos ver também que não ocorre variação brusca na intensidade de q ao passarmos por um vértice em B, D, B' ou D' , e que o sentido de q nas partes horizontais da seção pode ser obtido facilmente de seu sentido nas partes verticais (onde o sentido coincide com o da força cortante V). Na Fig. 5.37, analisa-se o caso de um perfil de abas largas, onde os valores de q nas porções superiores AB e $A'B$ se distribuem de maneira simétrica. Ao passarmos por B , os valores de q correspondentes às duas meias abas devem ser combinados para obtermos o valor de q no topo da alma do perfil. O valor máximo de q ocorre em C , na altura da linha neutra, decrescendo até D , onde se divide em duas partes iguais para cada meia aba inferior. A designação de *fluxo cisalhante* que estamos usando para a descrição do esforço de cisalhamento por unidade de comprimento q , reflete a semelhança entre as propriedades de q citadas acima e as características do movimento de um fluido em uma canalização⁶.



Varição de q em uma seção de viga-caixão

Fig. 5.36



Varição de q em um perfil de abas largas

Fig. 5.37

⁶ Lembramo-nos que o conceito de fluxo de cisalhamento foi usado para o estudo das tensões de cisalhamento em tubos vazados de paredes finas (Sec. 3.13). Para tubos vazados o fluxo de cisalhamento é constante, o que não ocorre em barras sob ação de carregamento transversal.

Até agora nossa análise supôs que as cargas aplicadas à barra agiam em um plano de simetria dessa barra. No caso de peças estruturais que possuem dois planos de simetria, como o perfil de abas largas da Fig. 5.33 ou a viga-caixão da Fig. 5.34, qualquer força aplicada no centro geométrico da seção transversal pode ser decomposta na direção dos dois eixos de simetria. Cada componente assim obtida vai provocar flexão na barra em um plano de simetria, e a correspondente tensão de cisalhamento pode ser obtida pela Eq. 5.10. O princípio da superposição poderá ser usado para a determinação das tensões resultantes (como veremos na Sec. 5.11).

Se a barra estudada não tiver plano de simetria, ou se possuir apenas um plano de simetria que não coincide com o plano de aplicação das cargas, observa-se que a barra fica sujeita à flexão e torção ao mesmo tempo, exceto quando a carga está aplicada em um ponto específico denominado *centro de cisalhamento*. Geralmente o centro de cisalhamento não coincide com o centro geométrico da seção transversal. A determinação do centro de cisalhamento para várias formas de perfis de paredes finas será feita na Sec. 5.12.

*5.10 DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS

Consideremos uma viga AB em balanço, de comprimento L e seção transversal retangular, sendo submetida a uma força concentrada P na sua extremidade livre (Fig. 5.38). O momento fletor máximo ocorre na seção B e é igual a $M = PL$. Sendo M_e o momento máximo em regime elástico, teremos a tensão normal σ_x sempre abaixo do valor da tensão de escoamento σ_e , enquanto $PL \leq M_e$. Ao aumentarmos o valor de P além do valor M_e/L , inicia-se o escoamento nos pontos B e B' , alastrando-se na direção da extremidade livre da viga. Vamos estudar uma seção transversal CC' localizada a uma distância x do ponto A (Fig. 5.39), supondo ts que o material é elastoplástico. Nessa seção o momento fletor é $M = Px$, e a Eq. 4.38 da Sec. 4.10 fornece o valor de y_e , metade da espessura do núcleo elástico da seção:

$$Px = \frac{3}{2} M_e \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_e^2}{c^2} \right) \tag{5.18}$$

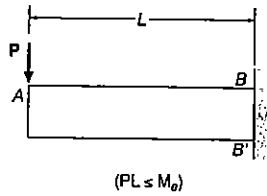


Fig. 5.38

Nessa expressão, c é a metade da altura da viga. Se desenharmos um gráfico de y_e em relação a x , obtemos a fronteira entre a região elástica e a região plastificada da viga.

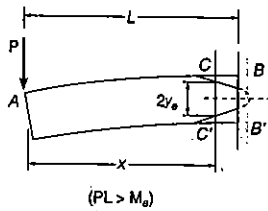


Fig. 5.39

Enquanto $PL \leq 3/2 M_e$, a parábola definida pela Eq. 5.18 intercepta a linha BB' , como mostra a Fig. 5.39. Quando PL alcança o valor $3/2 M_e$, ficando igual a M_p (momento plástico definido na Sec. 4.10), a Eq. 5.18 leva $y_e = 0$ para $x = L$. Desse modo o vértice da parábola fica situado na seção BB' , e esta seção fica totalmente plastificada (Fig. 5.40). Recordando a expressão da Eq. 4.40 vemos que o raio de curvatura da superfície neutra nesse ponto é igual a zero, o que mostra a presença de uma flexão que começa abruptamente no apoio fixo da viga. Dizemos então que se formou uma *rótula plástica* nesse ponto. A carga $P = M_p/L$ é a máxima carga que pode ser suportada pela viga.

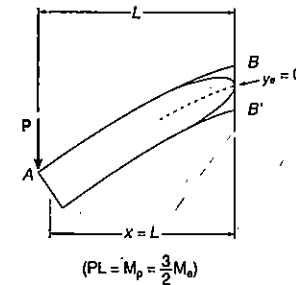


Fig. 5.40

Discutimos até aqui o comportamento da viga analisando apenas suas tensões normais. Vamos analisar agora a distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção que se tornou parcialmente plastificada. Tomemos a porção da viga $CC''D''D$ situada entre as seções transversais CC' e DD' , acima do plano horizontal $D''C''$ (Fig. 5.41a). Se a porção da viga situada inteiramente na zona plastificada, as tensões normais que agem nas faces CC' e DD' serão uniformemente distribuídas e de valor igual à tensão de escoamento σ_e (Fig. 5.41b). Para ocorrer o equilíbrio do corpo livre $CC''D''D$, é preciso que a força horizontal ΔH que age na face inferior do corpo seja nula. Segue daí que a tensão média de cisalhamento horizontal, τ_{yx} , ao longo da viga no ponto C'' é zero, bem como o valor médio da tensão de cisalhamento vertical τ_{xy} . Podemos concluir então que a força cortante vertical $V = P$ na seção CC' deve ser distribuída inteiramente na porção EE' da seção, localizada dentro da zona elástica (Fig. 5.42). Pode ser demonstrado⁷ que a distribuição das tensões de cisalhamento ao longo de EE' é a mesma que em uma viga retangular em regime elástico, de mesma largura b da viga AB e de altura igual à espessura $2y_e$ da zona elástica. Chamando de A' à área $2by_e$ da porção elástica da seção transversal, temos

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A'} \left(1 - \frac{y^2}{y_e^2} \right) \quad (5.19)$$

O valor máximo da tensão de cisalhamento ocorre para $y = 0$ e vale

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3}{2} \frac{P}{A'} \quad (5.20)$$

7 V. Prob. 5.57.

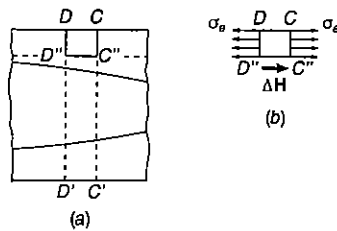


Fig. 5.41

A área A' da parte em regime elástico diminui, e $\tau_{m\acute{a}x}$ aumenta, podendo eventualmente atingir a tensão de escoamento para cisalhamento τ_y . Desse modo, o cisalhamento contribui para a ruptura da viga. Uma análise mais exata desse modo de ruptura deve levar em conta o efeito combinado das tensões normais e de cisalhamento.

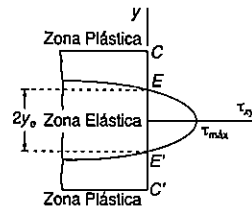


Fig. 5.42

PROBLEMA RESOLVIDO 5.3

O perfil laminado W250 x 101 está submetido a uma força cortante vertical de 220 kN. Determinar as tensões horizontais de cisalhamento no ponto a da aba superior do perfil, situado a 110 mm da borda da viga. As dimensões do perfil laminado e outras características geométricas estão nas tabelas do Apêndice C.

Solução. Separamos a parte sombreada da aba cortando-a ao longo da linha tracejada que passa pelo ponto a .

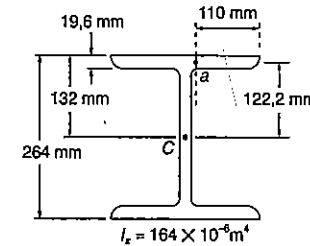
$$Q = (0,11 \text{ m})(0,0196 \text{ m})(0,1222 \text{ m})$$

$$Q = 2,64 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau = \frac{(220 \text{ kN})(2,64 \times 10^{-4} \text{ m}^3)}{(164 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,0196 \text{ m})}$$

$$\tau = 18,07 \text{ MPa}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 5.4

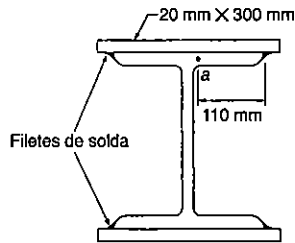
Resolver o Prob. 5.3, supondo que duas placas de 20 x 300 mm foram ligadas às abas do perfil W250 x 101, por meio de filetes contínuos de solda.

Solução. O momento de inércia centroidal do perfil composto é

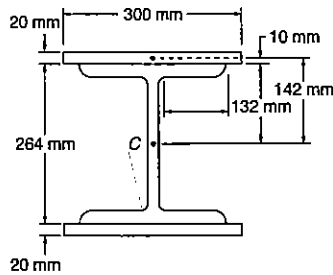
$$I = 164 \times 10^{-6} \text{ m}^4 + 2 \left[\frac{1}{12}(0,3 \text{ m})(0,02 \text{ m})^3 + (0,3 \text{ m})(0,02 \text{ m})(0,142 \text{ m})^2 \right]$$

$$I = 406 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Uma vez que as abas e as placas são ligadas apenas pelas soldas, podemos encontrar a tensão de cisalhamento em a passando uma seção através da aba em a , entre a aba e a placa, e outra vez através da aba, no ponto a' simétrico de a .



Para a área sombreada que separamos, temos



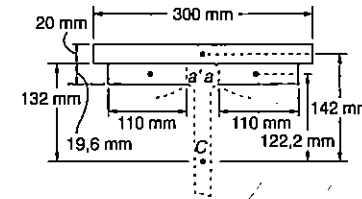
$$t = 2t_f = 2(0,0196 \text{ m}) = 0,0392 \text{ m}$$

$$Q = 2[(0,11 \text{ m})(0,0196 \text{ m})(0,1222 \text{ m})] + (0,3 \text{ m})(0,02 \text{ m})(0,142 \text{ m})$$

$$Q = 1,38 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

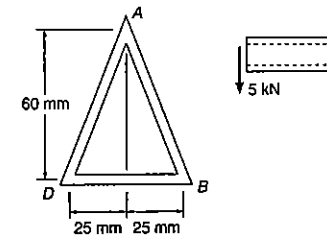
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(220 \text{ kN})(1,38 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(406 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,0392 \text{ m})} = 19076 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau = 19,076 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

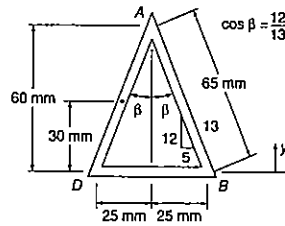


PROBLEMA RESOLVIDO 5.5

A viga de paredes delgadas indicadas é feita de alumínio, por extrusão, e tem paredes de espessura constante e igual a 3 mm. Sabendo-se que a força cortante na viga é de 5 kN, determinar: (a) a tensão de cisalhamento no ponto A; (b) a tensão de cisalhamento máxima na viga. Nota: As dimensões dadas se referem às linhas médias das paredes.



Centróide. Vemos que $AB = AD = 65 \text{ mm}$.



$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})(30 \text{ mm})]}{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})] + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})}$$

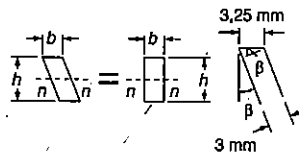
$$\bar{Y} = 21,67 \text{ mm}$$

Momento de inércia centroidal. Cada lado da viga pode ser considerado como um paralelogramo, com momento de inércia $I_{nn} = bh^3/12$, onde b é medido paralelamente ao eixo $n-n$.

$$b = (3 \text{ mm})/\cos \beta = (3 \text{ mm})/(12/13) = 3,25 \text{ mm}$$

$$I = \sum (\bar{I} + Ad^2) = 2 \left[\frac{1}{12} (3,25 \text{ mm})(60 \text{ mm})^3 + (3,25 \text{ mm})(60 \text{ mm})(8,33 \text{ mm})^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})^3 + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})(21,67 \text{ mm})^2 \right]$$

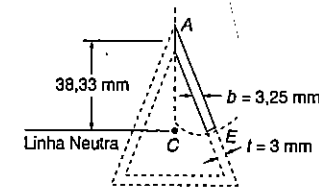
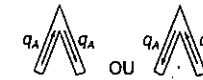
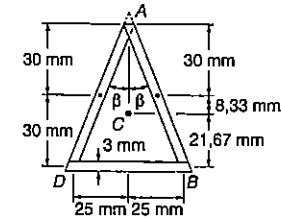
$$I = 214,6 \times 10^3 \text{ mm}^4 \quad I = 0,2146 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



(a) **Tensão de cisalhamento em A.** Se no ponto A ocorre uma tensão de cisalhamento τ_A , o fluxo de cisalhamento será $q_A = \tau_A \cdot t$, tendo o sentido indicado nas duas hipóteses da figura. No entanto, a seção transversal e o carregamento são

simétricos em relação a uma linha vertical passando por A, o que indica que o fluxo de cisalhamento também deve ser simétrico. Como nenhuma das duas hipóteses indica simetria do fluxo, concluímos que

$$\tau_A = 0 \quad \blacktriangleleft$$



o

(b) **Tensão de cisalhamento máxima.** A tensão máxima ocorre na altura da linha neutra, onde Q é máximo, uma vez que a espessura da parede é constante. Sabendo que a tensão em A é nula, cortamos a seção ao longo da linha tracejada indicada e separamos a parte sombreada da viga. Para obtermos a máxima tensão de cisalhamento, o corte na altura da linha neutra é feito perpendicular aos lados da viga, e seu comprimento é $t = 3 \text{ mm}$.

$$Q = [(3,25 \text{ mm})(38,33 \text{ mm})] \left(\frac{38,33 \text{ mm}}{2} \right) = 2,387 \text{ mm}^3$$

$$Q = 2,387 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5 \text{ kN})(2,387 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(0,2146 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,003 \text{ m})}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_E = 18,54 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

5.26 A viga de madeira, montada como indicado, é submetida a uma força cortante vertical de 5 kN. Sabendo-se que o espaçamento longitudinal dos pregos é $s = 35$ mm e que cada prego tem 65 mm de comprimento, determinar a força cisalhante em cada prego.

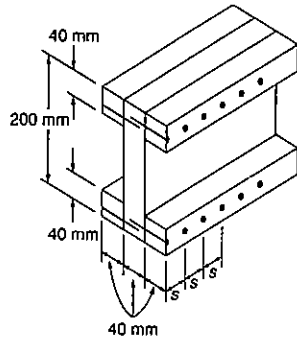


Fig. P5.26

5.27 A viga de madeira, montada como indicado, é submetida a uma força cortante vertical de 6670 N. Sabendo-se que o espaçamento longitudinal dos pregos é $s = 63,5$ mm e que cada prego tem 90 mm de comprimento, determinar a força cisalhante em cada prego.

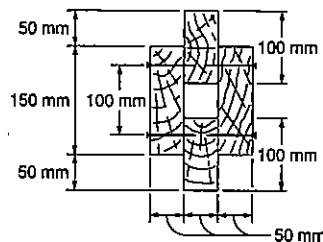


Fig. P5.27

5.28 A viga montada como indicado é feita de várias pranchas de madeira coladas juntas. Sabendo-se que a viga é submetida a uma força cortante vertical de 5340 N, determinar a tensão de cisalhamento média na junta colada: (a) em A; (b) em B.

5.29 Várias pranchas são coladas juntas para formar a caixa mostrada. Sabendo-se que a viga é submetida a uma força cortante vertical de 3 kN, determinar a tensão de cisalhamento média na junta colada: (a) em A; (b) em B.

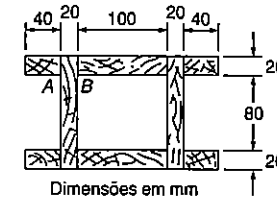
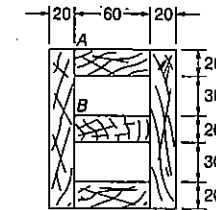


Fig. P5.28



Dimensões em mm

Fig. P5.29

5.30 A viga composta é feita pela soldagem de perfis de aço laminado C200 x 17,1, às abas de um perfil de aço laminado W250 x 80, como mostrado. Sabendo-se que a viga é submetida a uma força cortante vertical de 200 kN, determinar a força cisalhante horizontal por unidade de comprimento, em cada solda.

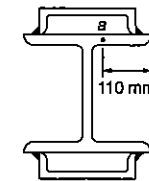


Fig. P5.30

5.31 Para a viga composta do Prob. 5.30, determinar a tensão de cisalhamento, no ponto a da aba, do perfil de abas largas mostrado.

5.32 Uma viga extrudada tem a seção transversal mostrada e está submetida a uma força cortante vertical de 45 kN. Para $t = 6,3$ mm, determinar a tensão de cisalhamento no: (a) ponto a ; (b) ponto b .

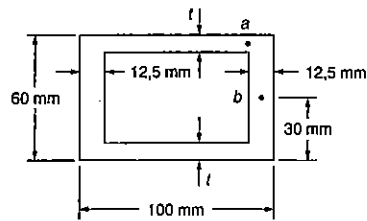


Fig. P5.32

5.33 Resolver o Prob. 5.32, considerando que a dimensão t é aumentada para 7,6 mm.

5.34 Para a viga de seção transversal mostrada, submetida a uma força cortante vertical de 25 kN, determinar a tensão de cisalhamento, quando $d = 50$ mm, no: (a) ponto a ; (b) ponto b .

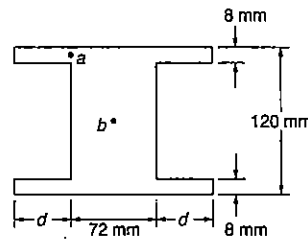


Fig. P5.34

5.35 Para a viga e carregamento do Prob. 5.34, determinar: (a) a distância d para que $\tau_a = \tau_b$; (b) a correspondente tensão nos pontos a e b .

5.36 Uma viga extrudada tem a seção transversal mostrada e uma espessura constante da parede de 5 mm. Sabendo-se que uma dada força cortante vertical V causa uma tensão de cisalhamento máxima igual a 60 MPa, determinar a tensão de cisalhamento nos quatro pontos indicados.

5.37 Sabendo-se que uma força cortante vertical V causa uma tensão de cisalhamento máxima $\tau = 75$ MPa em uma viga extrudada com a seção transversal mostrada, determinar a correspondente tensão de cisalhamento nos três pontos indicados.

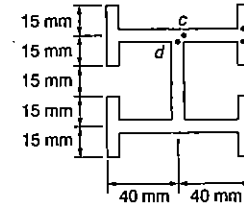


Fig. P5.36

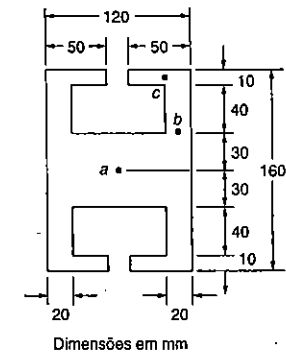


Fig. P5.37

5.38 Resolver o Prob. 5.37, considerando que a viga seja submetida a uma força cortante horizontal V .

5.39 Resolver o Prob. 5.36, considerando que a viga seja submetida a uma força cortante horizontal V .

5.40 Quatro perfis de aço cantoneira $102 \times 102 \times 9,5$ e uma placa de aço de 12×400 mm são aparafusadas juntas para formar uma viga como a seção transversal mostrada. Os parafusos são de 22 mm de diâmetro e estão espaçados longitudinalmente de 120 mm. Sabendo-se que a viga está sujeita a uma força cortante vertical de 240 kN, determinar a tensão de cisalhamento média em cada parafuso.

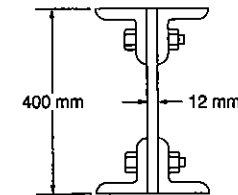


Fig. P5.40

5.41 Resolver o Prob. 5.40, considerando que a altura da placa é aumentada de 400 mm para 600 mm.

5.42 Uma viga consiste em cinco pranchas de seção transversal 40×150 mm, conectadas por parafusos de aço, com espaçamento horizontal de 230 mm. Sabendo-se que o cisalhamento na viga é vertical e igual a 8900 N e que a tensão de cisalhamento admissível em cada parafuso é de 50 MPa, determinar o menor diâmetro necessário dos parafusos.

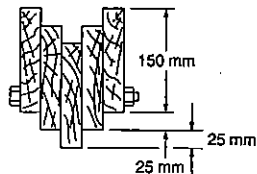


Fig. P5.42

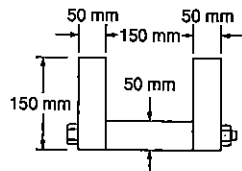


Fig. P5.43

5.44 As seções transversais de duas vigas extrudadas, cada uma com espessura da parede uniforme e igual a 6,35 mm são mostradas. Para uma força cortante vertical de 11120 N, determinar a máxima tensão de cisalhamento em cada viga.

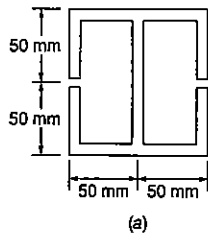


Fig. P5.44a

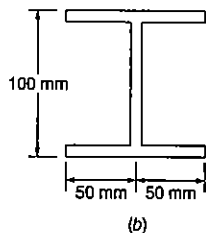


Fig. P5.44b

5.45 Uma viga extrudada tem seção transversal como mostrado e uma espessura de parede constante e igual a 3 mm. Para uma força cortante vertical de 10 kN, determinar: (a) a tensão de cisalhamento no ponto A; (b) a máxima tensão de cisalhamento na viga. Esboçar também o diagrama do fluxo de cisalhamento na seção transversal.

5.46 Uma placa de 4 mm de espessura é encurvada como mostrado e depois usada como uma viga. Para uma força cortante vertical de 12 kN, determinar: (a) a tensão de cisalhamento no ponto A; (b) a máxima tensão de cisalhamento na viga. Esboçar também o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

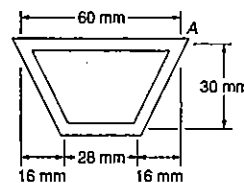


Fig. P5.45

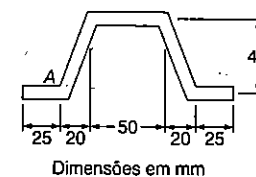


Fig. P5.46

5.47 e 5.48 Uma viga extrudada tem seção transversal como mostrado e uma espessura uniforme da parede de 4 mm. Para uma força cortante vertical de 12 kN, determinar a tensão de cisalhamento nos quatro pontos indicados e esboçar o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

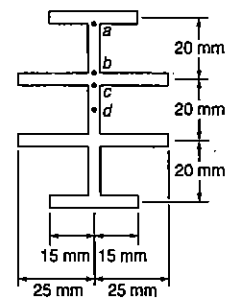


Fig. P5.47

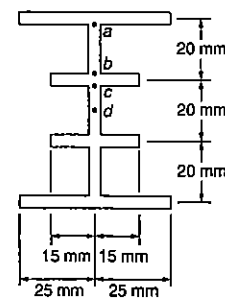


Fig. P5.48

5.49 A seção transversal de uma viga extrudada é uma seção quadrada vazada de lado $a = 75$ mm e espessura $t = 6,35$ mm. Para uma força cortante vertical de 65 kN, determinar a máxima tensão de cisalhamento na viga e esboçar o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

5.50 O projeto de uma viga requer a soldagem de quatro placas horizontais à uma placa vertical de $12,7 \times 127$ mm como mostrado. Para uma força cortante vertical V , determinar a dimensão h para que o fluxo de cisalhamento, através da superfície da solda, seja máximo.

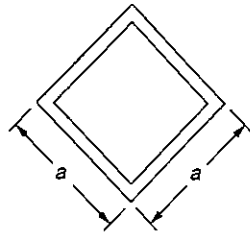


Fig. P5.49

5.51 Determinar a tensão de cisalhamento no ponto A de um tubo de parede fina como a seção transversal mostrada, casada por uma força cortante vertical V .

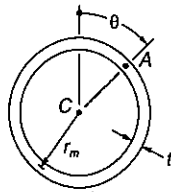


Fig. P5.51

5.52 Para uma viga feita de dois ou mais materiais com diferentes módulos de elasticidade, mostrar que a Eq. (5.10)

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

permanece válida, desde que os valores de Q e I sejam calculados usando a seção transformada da viga (veja Sec. 4.7) e desde que a espessura t seja a largura real da viga, no ponto onde a tensão τ é calculada.

5.53 e 5.54 Uma viga composta é feita de madeira e duas chapas de aço, unidas com parafusos, como mostrado. Sabendo-se que os parafusos são de 16 mm de diâmetro e espaçados longitudinalmente de 200 mm, os módulos de elasticidade valem 200 GPa e 13 GPa, para o aço e para a madeira, respectivamente, e está sujeita a uma força cortante vertical de 17,8 kN, determinar: (a) a tensão de cisalhamento média nos parafusos; (b) a tensão de cisalhamento no centro da seção transversal. (Sugestão: Usar o método indicado no Prob. 5.52.)

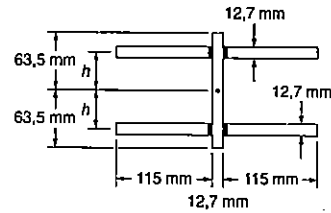


Fig. P5.50

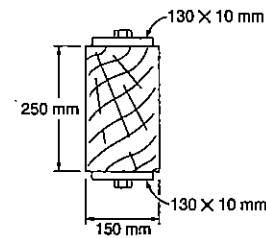


Fig. P5.53

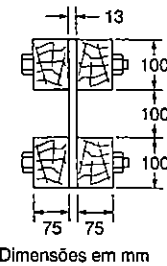


Fig. P5.54

5.55 e 5.56 Uma barra de aço ($E_a = 200$ GPa) e uma de alumínio ($E_{al} = 70$ GPa) são firmemente unidas para formar a viga composta mostrada: Para uma força cortante vertical de 20 kN, determinar: (a) a tensão média na superfície de contatos; (b) a máxima tensão de cisalhamento na viga. (Sugestão: Usar o método indicado no Prob. 5.52.)

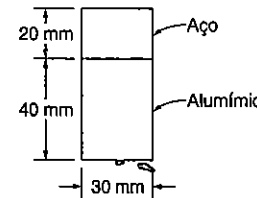


Fig. P5.55

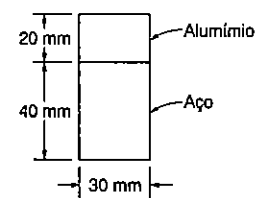


Fig. P5.56

5.57 Considerar a viga em balanço AB discutida na Sec. 5.10 e a porção ACKJ da viga, que está localizada à esquerda da seção transversal CC' e acima do plano horizontal JK, onde K é um ponto a uma distância $y < y_e$ acima da linha neutra (veja a figura). Pede-se: (a) Lembrando que $\sigma_x = \sigma_e$ entre C e E e $\sigma_x = (\sigma_e/y_e)y$ entre E e K, mostrar que a intensidade da força cisalhante horizontal H exercida na face inferior da porção da viga ACKJ é:

$$H = b \sigma_e \left(c - \frac{1}{2} y_e - \frac{1}{2} \frac{y^2}{y_e} \right)$$

(b) Observando que a tensão de cisalhamento em K é:

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{b} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial x}$$

e, lembrando que y_e é uma função de x definida pela Eq. (5.18), desenvolver também a Eq. (5.19).

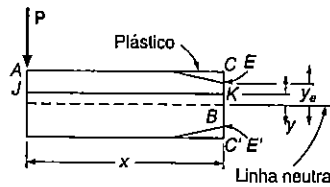


Fig. P5.57

5.11 TENSÕES DEVIDAS A COMBINAÇÕES DE CARREGAMENTO

Nos Capítulos 1 e 2 aprendemos a determinar as tensões causadas por uma carga axial centrada. No Capítulo 3, analisamos a distribuição de tensões em barras cilíndricas sujeitas a conjugados de torção. No Capítulo 4, determinamos as tensões causadas por conjugados de flexão, e, neste capítulo, as tensões provocadas por carregamento transversal. Como veremos agora, podemos combinar o conhecimento adquirido para a determinação das tensões em barras delgadas de estruturas ou componentes de máquinas sob condições bem gerais de carregamento.

Consideremos, por exemplo, a barra de eixo curvado e seção transversal circular $ABDE$, que está submetida à ação de várias forças (Fig. 5.43). Para determinarmos as tensões produzidas em um certo ponto K pelas forças aplicadas, passamos uma seção por K e determinamos o sistema de forças e momentos no centróide da seção C , necessário para manter o equilíbrio da porção ABK ⁸. Esse sistema representa os esforços internos na seção. Em geral, ele consiste de três componentes de forças e de três vetores que representam conjugados, que vamos adotar como sendo dirigidos como indica a Fig. 5.44.

⁸ O sistema de forças e conjugados em C pode ser definido como sendo equivalente às forças que agem na porção KDE da barra (v. Ex. 5.3).

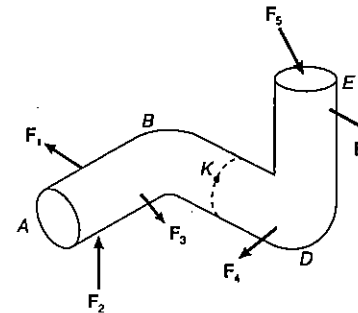


Fig. 5.43

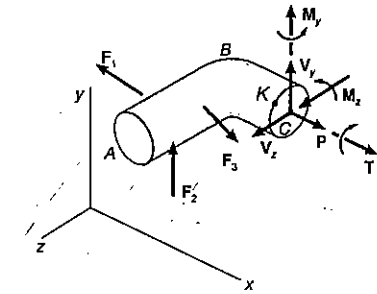


Fig. 5.44

Vemos que a força P é uma força axial, que produz tensões normais na seção. Os conjugados M_y e M_z provocam flexão na barra e também produzem tensões normais na seção. A tensão normal σ_x no ponto K é a soma das tensões produzidas pela força e conjugados indicados na Fig. 5.45a, e pode ser determinada como explica a Sec. 4.14. Por outro lado, o conjugado de torção T e as forças cortantes V_y e V_z provocam tensões de cisalhamento na seção. As componentes τ_{xy} e τ_{xz} da tensão de cisalhamento em K podem ser calculadas se somarmos as componentes de tensão que correspondem a cada um dos esforços indicados na Fig. 5.45b⁹.

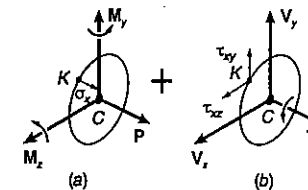


Fig. 5.45

Os resultados obtidos serão válidos dentro das condições de aplicabilidade do princípio da superposição (Sec. 2.12) e do princípio de Saint-Venant (Sec. 2.16). Isto significa que as tensões encontradas não podem exceder o limite de proporcionalidade do material, que a deformação provocada por um certo carregamento não deve afetar a determinação das tensões devidas a outro carregamento, e que a seção em estudo

⁹ Devemos nos lembrar que o conhecimento que temos só nos permite calcular o efeito das forças cortantes V_y e V_z se essas forças forem aplicadas ao longo de eixos de simetria da seção transversal da barra. Do mesmo modo, o efeito do conjugado de torção T só pode ser avaliado para os casos de eixos de seção circular, barras com seção retangular (Sec. 3.12) e membros vazados de paredes finas (Sec. 3.13).

não deve estar muito próxima de um ponto de aplicação de cargas. Pela primeira das restrições acima, fica claro que o método apresentado não pode ser aplicado em casos de deformação plástica.

EXEMPLO 5.3

Duas forças P_1 e P_2 , de intensidade $P_1 = 15 \text{ kN}$ e $P_2 = 18 \text{ kN}$, são aplicadas nas extremidades A da barra AB . Essa barra por sua vez é soldada à peça cilíndrica BD de raio $c = 20 \text{ mm}$ (Fig. 5.46). Sabe-se que a distância de A até o eixo do cilindro BD é $a = 50 \text{ mm}$. Determinar a tensão normal e a tensão de cisalhamento nos pontos H e K do cilindro. Considerar que as tensões ficam abaixo do limite de proporcionalidade do material.

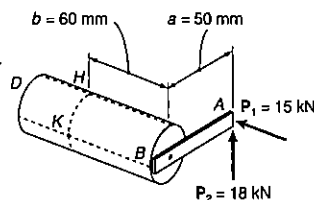


Fig. ex.5.46

Esforços internos na seção HK . Substituímos as forças P_1 e P_2 por um sistema de forças e momentos equivalente, aplicado no centróide C da seção que passa por H e K (Fig. 5.47). Esse sistema, que representa os esforços internos na seção, é formado pelos seguintes componentes:

1. Uma força axial centrada F , igual à força P_1 , de intensidade

$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$

2. Uma força cortante V igual à força P_2 , de intensidade

$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$

3. Um momento torçor T de intensidade T igual ao momento da força P_2 em relação ao eixo do cilindro BD

$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4. Um momento fletor M_y de intensidade M_y igual ao momento da força P_1 em relação a um eixo vertical que passa por C :

$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5. Um momento fletor M_z de intensidade M_z igual ao momento da força P_2 em relação a um eixo transversal horizontal passando por C :

$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

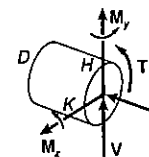


Fig. ex.5.47

Cada uma dessas forças e momentos pode provocar uma tensão normal ou de cisalhamento nos pontos H e K da seção. Nosso propósito é calcular separadamente cada uma dessas tensões, somando então as tensões normais e as tensões de cisalhamento em cada um dos pontos. Inicialmente, devemos determinar as propriedades geométricas da seção transversal, calculando:

$$A = \pi c^2 = \pi(0,020 \text{ m})^2 = 1,257 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi(0,020 \text{ m})^4 = 125,7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_c = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi(0,020 \text{ m})^4 = 251,3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Tensões no ponto H . Vemos que as tensões normais são produzidas em H pela força centrada F e pelo momento fletor M_z , enquanto o momento torçor T provoca uma tensão de cisalhamento horizontal τ_{xz} nesse ponto (Fig. 5.48). Por outro lado, o momento fletor M_y não provoca tensões normais em H , uma vez que H está situado na linha neutra correspondente a esse momento. A força cortante vertical V não provoca tensões de cisalhamento em H , pois H está situado na fibra superior da seção. Determinamos o sinal de cada tensão pela figura, encontrando:

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{carga centrada}} + (\sigma_x)_{\text{flexão}} = -\frac{F}{A} - \frac{M_z c}{I_z}$$

$$= -\frac{15 \text{ kN}}{1,257 \times 10^{-3} \text{ mm}^2} - \frac{(1080 \text{ N} \cdot \text{m})(0,020 \text{ m})}{125,7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$= -11,9 \text{ MPa} - 171,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = -183,8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = (\tau_{xz})_{\text{torção}} = \frac{Tc}{J_c} = \frac{(900 \text{ N} \cdot \text{m})(0,020 \text{ m})}{251,3 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$\tau_{zy} = 71,6 \text{ MPa}$$

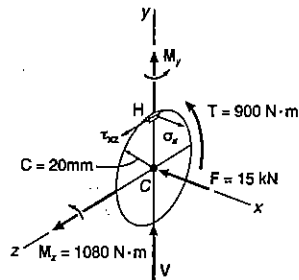


Fig. ex.5.48

Tensões no ponto K. Vemos que a tensão normal é produzida em K pela força centrada F e pelo momento fletor M_y , e que a tensão de cisalhamento vertical τ_{xy} é provocada pelo momento torçor T e pela força cortante V (Fig. 5.49). Escrevemos:

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11,9 \text{ MPa} + \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0,020 \text{ m})}{125,7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$= -11,9 \text{ MPa} + 119,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = +107,4 \text{ MPa}$$

Para determinarmos a tensão de cisalhamento devida a V , devemos calcular o momento estático Q e a largura t da área sombreada da Fig. 5.49. Para um semicírculo de raio c , temos $\bar{y} = 4c/3\pi$. Temos

$$Q = A'\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0,020 \text{ m})^3$$

$$= 5,33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

e

$$t = 2c = 2(0,020 \text{ m}) = 0,040 \text{ m}$$

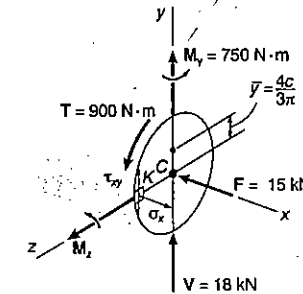


Fig. ex.5.49

Escrevemos então

$$(\tau_{xy})_V = \frac{VQ}{I_x t} = +\frac{(18 \times 10^3 \text{ N})(5,33 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(125,7 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(0,040 \text{ m})}$$

$$= +19,1 \text{ MPa}$$

Tomando agora o valor encontrado acima para $(\tau_{xy})_{\text{torção}}$, temos

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_V - (\tau_{xy})_{\text{torção}} = +19,1 \text{ MPa} - 71,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -52,5 \text{ MPa}$$

Usamos pequenos elementos quadrados nos pontos H e K da superfície do cilindro para resumir os resultados obtidos (Fig. 5.50). Foram incluídas as tensões de cisalhamento que atuam nos lados longitudinais do elemento.

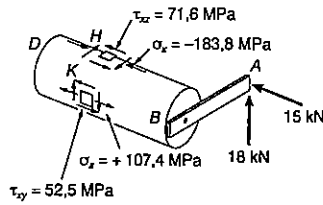
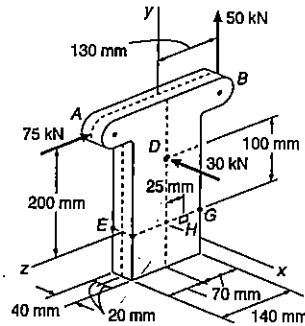


Fig. ex.5.50

PROBLEMA RESOLVIDO 5.6

Três forças são aplicadas nos pontos A, B e D de uma peça metálica de pequeno comprimento. A seção transversal horizontal da peça é retangular, com 40 x 140 mm. Determinar a tensão normal e a tensão de cisalhamento no ponto H.

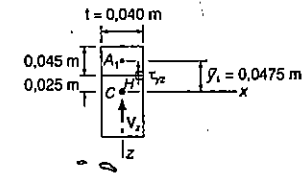
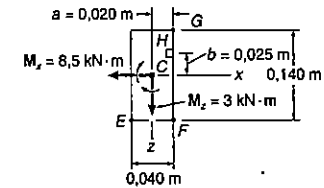


Esforços internos na seção EFG. Substituímos as três forças aplicadas pelo sistema equivalente de forças e momentos aplicados em C, centróide da seção EFG. Temos então:

$$V_x = -30 \text{ kN} \quad P = 50 \text{ kN} \quad V_z = -75 \text{ kN}$$

$$M_x = (50 \text{ kN})(0,130 \text{ m}) - (75 \text{ kN})(0,200 \text{ m}) = -8,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (30 \text{ kN})(0,100 \text{ m}) = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Vemos que não existe momento torçor em torno do eixo y. As propriedades geométricas da seção retangular são

$$A = (0,040 \text{ m})(0,140 \text{ m}) = 5,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0,040 \text{ m})(0,140 \text{ m})^3 = 9,15 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} (0,140 \text{ m})(0,040 \text{ m})^3 = 0,747 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Tensão normal em H. A tensão normal σ_y é provocada pela força centrada P e pelos momentos fletores M_x e M_z . O sinal de cada tensão pode ser encontrado analisando-se o sistema de esforços aplicado em C.

$$\sigma_y = + \frac{P}{A} + \frac{|M_z| a}{I_z} - \frac{|M_z| b}{I_z}$$

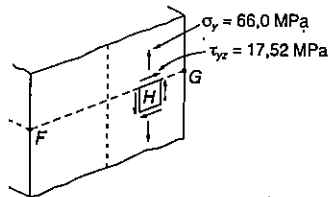
$$= \frac{50 \text{ kN}}{5,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,020 \text{ m})}{0,747 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(8,5 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,025 \text{ m})}{9,15 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_y = 8,93 \text{ MPa} + 80,3 \text{ MPa} - 23,2 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 66,0 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Tensão de cisalhamento em H. Considerando primeiramente a força cortante V_z podemos notar que ela não provoca tensões de cisalhamento em H, pois esse ponto se encontra no contorno da seção, e o momento estático em relação ao eixo z é nulo. Para a força cortante V_z temos

$$Q = A_1 \bar{y}_1 = [(0,040 \text{ m})(0,045 \text{ m})](0,0475 \text{ m}) = 85,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

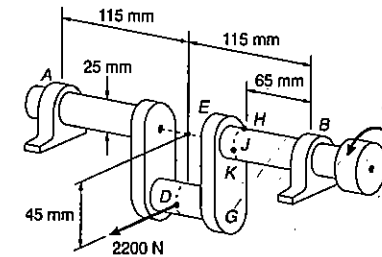
$$\tau_{yz} = \frac{V_z Q}{I_x t} = \frac{(75 \text{ kN})(85,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(9,15 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,040 \text{ m})} \quad \tau_{yz} = 17,52 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



Resumo: Indicamos as tensões σ_y e τ_{yz} em um elemento quadrado H. Podemos ver que a direção da tensão de cisalhamento na face superior do elemento é a mesma da força cortante V_z que se aplica na seção transversal.

PROBLEMA RESOLVIDO 5.7

Uma força horizontal 2200 N está aplicada no ponto D do virabrequim AB. Este por sua vez é equilibrado estaticamente por um conjugado torçor T e pelas reações de apoio em A e B. Os suportes não exercem nenhum conjugado sobre o eixo. Determinar a tensão normal e a tensão de cisalhamento nos pontos H, J, K e L, que se situam nas extremidades dos diâmetros vertical e horizontal da seção a 65 mm do apoio B.



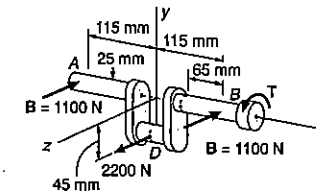
Corpo livre. Todo o virabrequim.

$$A = B = 1100 \text{ N}$$

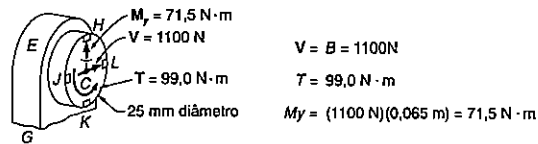
$$\Sigma M_x = 0:$$

$$-(2200 \text{ N})(0,045 \text{ m}) + T = 0$$

$$T = 99,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Esforços internos na seção transversal. Substituímos a reação em B e o conjugado torçor T por um sistema equivalente de forças e momentos aplicado ao centro C da seção transversal que contém os pontos H, J, K e L.



As propriedades geométricas da seção circular de 25 mm de diâmetro são:

$$A = \frac{\pi}{4} (0,025 \text{ m})^2 = 0,491 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

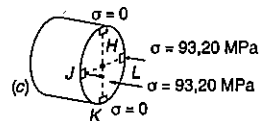
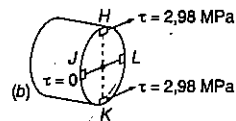
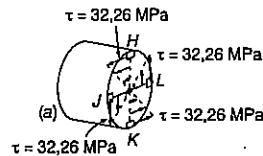
$$I = \frac{\pi}{4} (0,025 \text{ m})^4 = 1,917 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$J = \frac{\pi}{2} (0,025 \text{ m})^4 = 3,835 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Tensões provocadas pelo momento torçor T . Usando a Eq. 3.8, determinamos as tensões de cisalhamento nos pontos H, J, K e L que estão indicadas na Fig. a .

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(99,0 \text{ N} \cdot \text{m})(0,0125 \text{ m})}{0,03835 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\tau = 32,26 \text{ MPa}$$



Tensões provocadas pela força cortante V . A força cortante V não provoca tensões de cisalhamento nos pontos J e L . Para os pontos H e K , calculamos primeiramente o momento estático Q do semicírculo em relação a um eixo vertical que passe pelo centro C , determinando então as tensões causadas pela força $V = 1100 \text{ N}$. Essas tensões estão representadas na Fig. b

$$Q = \left(\frac{1}{2} \pi c^2 \right) \left(\frac{4c}{3\pi} \right) = \frac{2}{3} c^3 = \frac{2}{3} (0,0125 \text{ m})^3 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

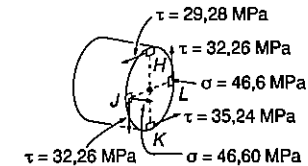
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1100 \text{ N})(1,3 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(0,01917 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,025 \text{ m})} = 2,98 \text{ MPa}$$

Tensões provocadas pelo momento fletor M_y . O momento fletor M_y atua em um plano horizontal, e não provoca tensões nos pontos H e K . As tensões nos pontos J e L são determinadas pela Eq. 4.15, e estão mostradas na Fig. c .

$$\sigma = \frac{|M_y|}{I} \cdot C = \frac{(71,5 \text{ N} \cdot \text{m})(0,0125 \text{ m})}{0,01917 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\sigma = 46,60 \text{ MPa}$$

Resumo. Somando as tensões indicadas obtemos a tensão normal e a tensão de cisalhamento totais nos pontos estudados, conforme mostra a figura abaixo.



PROBLEMAS

5.58 A alavanca AB tem uma seção retangular de $10 \times 30 \text{ mm}$. Sabendo-se que $\theta = 40^\circ$, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

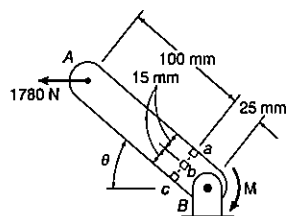


Fig. P5.58

5.59 Duas forças de 4 kN são aplicadas ao elemento de máquina AB, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no: (a) ponto a; (b) ponto b; (c) ponto c.

5.60 Duas forças de 4 kN são aplicadas ao elemento de máquina AB, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no: (a) ponto d; (b) ponto e; (c) ponto f.

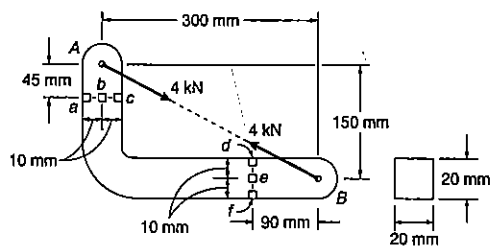


Fig. P5.59 e P5.60

5.61 A viga em balanço AB tem uma seção transversal retangular de 90 x 200 mm. Sabendo-se que a intensidade da força axial Q é 35,5 kN, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

5.62 A viga em balanço AB tem uma seção transversal retangular de 90 x 200 mm. Determinar: (a) o valor da força axial Q para que a tensão normal no ponto c seja -5,5 MPa; (b) as correspondentes tensões, normal e de cisalhamento, no ponto b.

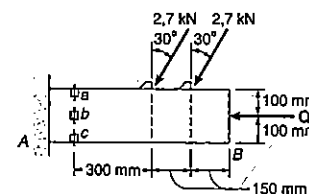


Fig. P5.61 e P5.62

5.63 O eixo mecânico de um automóvel é feito para suportar as forças e o torque mostrado. Sabendo-se que o diâmetro do eixo é de 30 mm, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no: (a) ponto H; (b) ponto K.

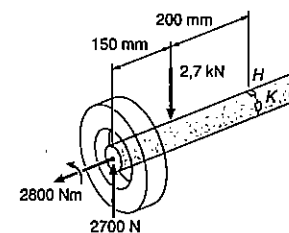


Fig. P5.63

5.64 O tubo padrão AB tem um diâmetro externo de 60 mm e uma espessura da parede de 4 mm. Sabendo-se que a tensão no cabo DE é 18 kN, determinar as tensões normal e de cisalhamento no: (a) ponto H; (b) ponto K.

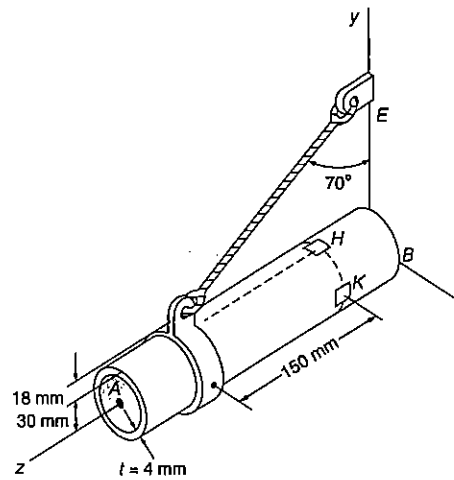


Fig. P5.64

5.65 A força vertical 5 kN é aplicada ao aro, de um disco de raio igual a 120 mm, como mostrado. Sabendo-se que o eixo AB tem um diâmetro de 80 mm, determinar as tensões normal e de cisalhamento no ponto H.

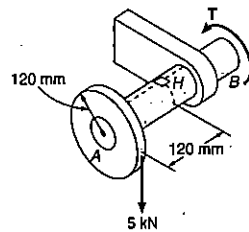


Fig. P5.65

5.66 Várias forças são aplicadas ao tubo mostrado. Sabendo-se que o tubo tem diâmetro, interno e externo, de 40 mm e de 48 mm, respectivamente, determinar as tensões normal e de cisalhamento no: (a) ponto H; (b) ponto K.

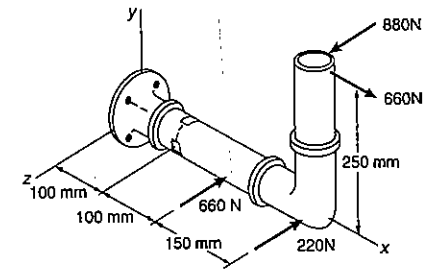


Fig. P5.66

5.67 Uma correia fina é enrolada em torno de uma barra maciça de raio c , como mostrado. Sabendo-se que uma força vertical F é aplicada na correia, determinar em termos de F , c e l , as tensões, normal e de cisalhamento, no: (a) ponto H; (b) ponto K.

5.68 Uma correia fina é enrolada em torno de uma barra maciça de raio $c = 20$ mm, como mostrado. Sabendo-se que $l = 100$ mm e $F = 5$ kN, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no: (a) ponto H; (b) ponto K.

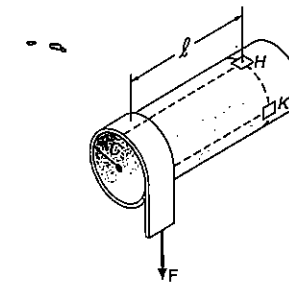


Fig. P5.67 e P5.68

5.69 Uma mola é feita de um arame circular de raio c , formando uma hélice de raio R . Determinar a máxima tensão de cisalhamento produzida pelas forças P e P' , iguais e opostas. (Sugestão: Determinar inicialmente a força cortante V e o torque T , em uma seção transversal.)

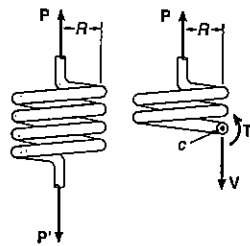


Fig. 5.69

5.70 A barra AB é conectada, através de juntas esféricas, ao colar A ao disco de raio 90 mm . O disco é soldado ao tubo DE , que tem um diâmetro externo de 80 mm e uma espessura de parede igual a 6 mm . Sabendo-se que na posição mostrada a barra AB está comprimida e exerce uma força de $8,6\text{ kN}$, no ponto B , determinar as tensões normal e de cisalhamento, no ponto H .

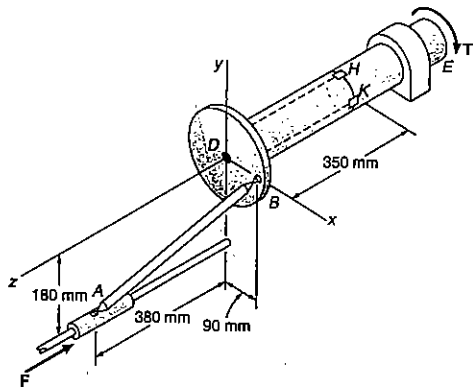


Fig. P5.70

5.71 Para o sistema do Prob. 5.70, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no ponto K .

5.72 Uma força de 4450 N é aplicada no ponto A do membro de ferro fundido mostrado. Sabendo-se que o membro tem um diâmetro de 45 mm , determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no ponto H .

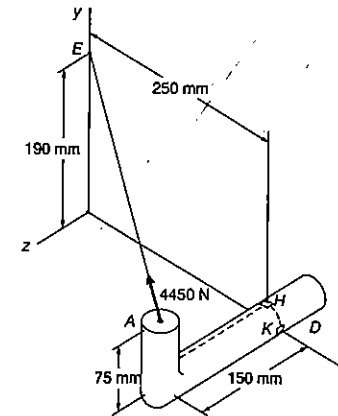


Fig. P5.72

5.73 Para o membro e carregamento do Prob. 5.72, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no ponto K .

5.74 Três forças são aplicadas à barra mostrada. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

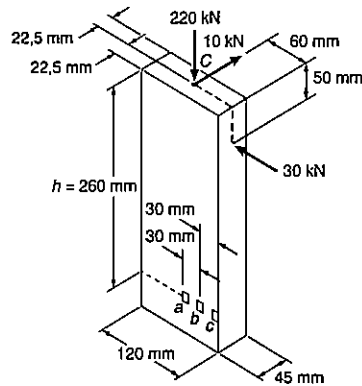


Fig. P5.74

5.75 Resolver o Prob. 5.74, assumindo que $h = 300$ mm.

5.76 Três forças são aplicadas à barra mostrada. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

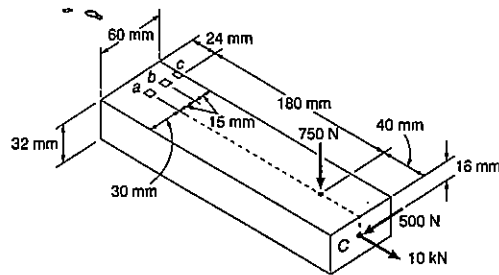


Fig. P5.76

5.77 Resolver o Prob. 5.76, assumindo que a força de 750 N é dirigida verticalmente para cima.

5.78 e 5.79 Duas forças são aplicadas ao componente de máquinas ABD, como mostrado. Sabendo-se que a seção transversal do componente é retangular com 30×45 mm, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

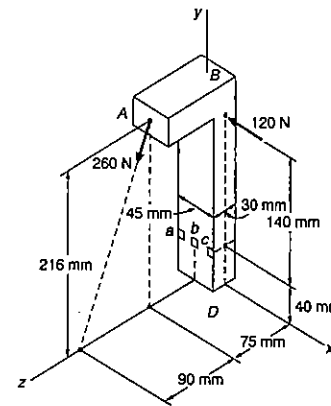


Fig. P5.78

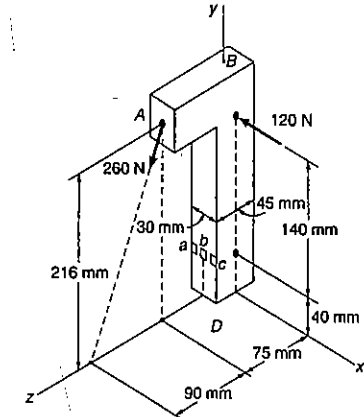


Fig. P5.79

5.80 Quatro forças são aplicadas a um perfil de aço laminado W200 x 46,1, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos a e b.

5.81 Quatro forças são aplicadas a um perfil de aço laminado W200 x 46,1, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos c e d.

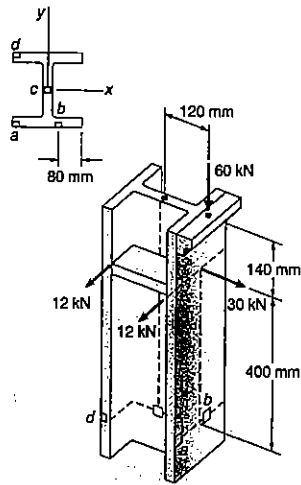


Fig. P5.80 e P5.81

5.82 Três placas de aço, cada uma com 125 mm de espessura, são soldadas juntas para formar uma viga em balanço. Para o carregamento mostrado, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos *a* e *b*. (Dados: $I_x = 5,6 \times 10^7 \text{ mm}^4$ e $I_x = 7,5 \times 10^6 \text{ mm}^4$.)

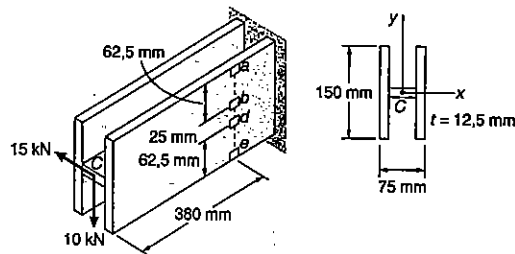


Fig. P5.82

5.83 Para a viga e carregamento do Prob. 5.82, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos *d* e *e*.

5.84 Três forças são aplicadas a um perfil de aço laminado W250 x 49,1, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos *a* e *b*.

5.85 Três forças são aplicadas a um perfil de aço laminado W250 x 49,1, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos *c* e *d*.

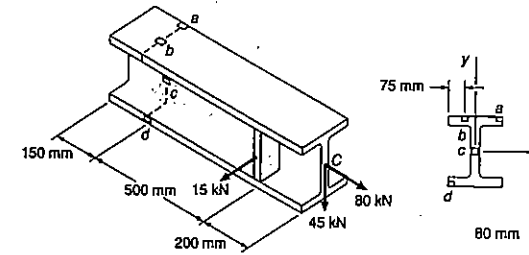


Fig. P5.84 e P5.85

5.86 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura de parede uniforme de 6,3 mm, determinar: (a) a tensão normal no ponto *a*; (b) a tensão de cisalhamento no ponto *b*.

5.87 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura de parede uniforme de 6,3 mm, determinar: (a) a tensão normal no ponto *c*; (b) a tensão de cisalhamento no ponto *d*.

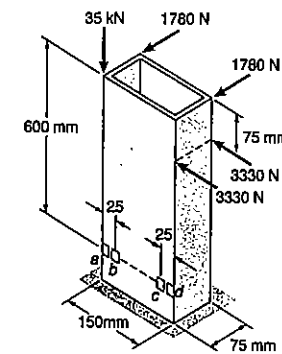


Fig. P5.86 e P5.87

5.88 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura de parede uniforme de 6 mm, determinar: (a) a tensão normal no ponto *a*; (b) a tensão de cisalhamento no ponto *b*.

5.89 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura de parede uniforme de 6 mm, determinar: (a) a tensão normal no ponto *c*; (b) a tensão de cisalhamento no ponto *d*.

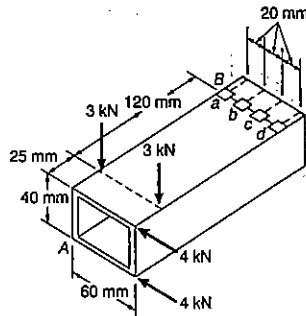


Fig. P5.88 e P5.89

5.90 Uma força de 12 kN é aplicada à extremidade livre da viga em balanço *AB*, na direção perpendicular ao eixo longitudinal da viga. Determinar a tensão normal no ponto *a*, quando: (a) $\beta = 0^\circ$; (b) $\beta = 5^\circ$.

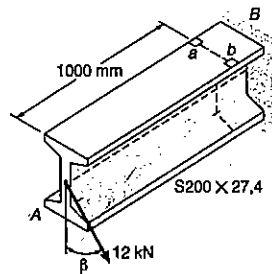


Fig. P5.90

5.91 Para a viga e o carregamento do Prob. 5.90, determinar: (a) o valor de β para que a tensão normal no ponto *b* seja zero; (b) a correspondente tensão normal no ponto *a*.

5.92 A viga em balanço *AB* deverá ser instalada, de maneira que o lado de 60 mm forme um ângulo β entre 0° e 90° com a vertical. Sabendo-se que uma força vertical de 600 N é aplicada no centro da extremidade livre da viga, determinar a tensão normal no ponto *a*, quando: (a) $\beta = 0^\circ$; (b) $\beta = 90^\circ$; (c) também achar o valor de β para que a tensão normal no ponto *a* seja máxima e o correspondente valor desta tensão.

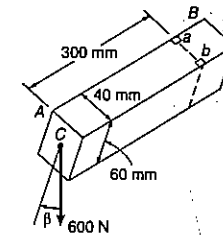


Fig. P5.92

5.93 Para a viga e o carregamento do Prob. 5.92, determinar: (a) o valor de β para que a tensão normal no ponto *b* seja zero; (b) a correspondente tensão normal no ponto *a*.

*5.94 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura da parede uniforme de 6 mm, determinar a tensão de cisalhamento em cada um dos três pontos indicados.

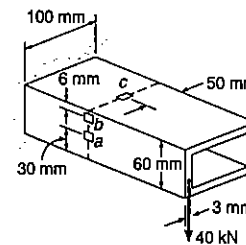


Fig. P5.94

*5.95 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura da parede uniforme de 8 mm, determinar a tensão de cisalhamento em cada um dos dois pontos indicados.

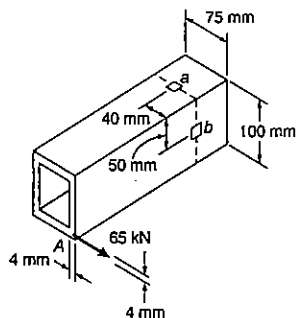


Fig. P5.95

*5.96 Resolver o Prob. 5.95, considerando que a força de 65 kN aplicada no ponto A atua verticalmente para baixo.

*5.97 Uma força P de 5 kN é aplicada a um arame, que é enrolado em torno da barra AB, como mostrado. Sabendo-se que a seção transversal da barra é um quadro de lado $d = 40$ mm, determinar a tensão de cisalhamento no ponto α .

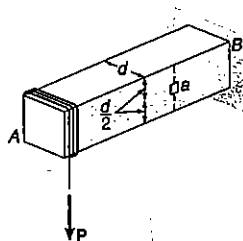


Fig. P5.97

*5.98 Determinar a tensão de cisalhamento no ponto α do bloco mostrado.

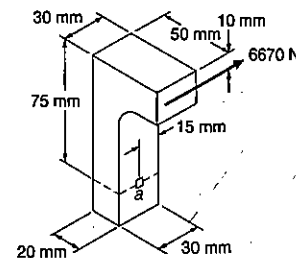


Fig. P5.98

*5.12 CARREGAMENTO ASSIMÉTRICO EM BARRAS DE PAREDES FINAS; CENTRO DE CISCALHAMENTO

Na análise que fizemos dos efeitos da carga transversal, nas Secs. 5.2 a 5.10, limitamo-nos a estudar barras com um plano vertical de simetria, submetidas a carregamentos que atuavam nesse plano. Observamos que a flexão da barra ocorrida no plano de carregamento (Fig. 5.51), e que, para qualquer seção transversal, o momento fletor M e a força cortante V (Fig. 5.52) conduziram às tensões normais e de cisalhamento definidas pelas fórmulas¹⁰,

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

e

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} \tag{5.10}$$

¹⁰ Na Sec. 5.11 foram consideradas condições mais gerais do carregamento, mas, como todas as barras tinham dois planos de simetria, o momento fletor e a força cortante da seção puderam ser decompostos na direção dos eixos de simetria.

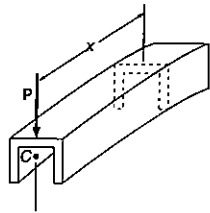


Fig. 5.51

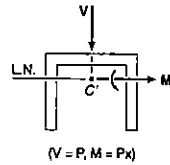


Fig. 5.52

Nesta seção, vamos analisar os efeitos do carregamento transversal em barras de paredes finas que não possuem um plano vertical de simetria. Vamos adotar, como exemplo, o perfil-canal da Fig. 5.51, que foi rodado em torno do seu eixo de 90°, de modo que a linha de ação da força P continua passando pelo centróide da seção. O vetor momento M , que representa o momento fletor em uma dada seção, ainda tem a direção de um eixo principal (Fig. 5.53), e a linha neutra irá coincidir com esse eixo (conf. Sec. 4.14). Desse modo, a Eq. 4.16 pode ser usada para o cálculo da tensão normal da seção. Por outro lado, a Eq. 5.10 não pode ser usada para a determinação da tensão de cisalhamento, uma vez que essa equação foi deduzida para barras com plano de simetria vertical (conf. Sec. 5.9). Na realidade, a barra irá sofrer flexão e torção sob a ação da carga aplicada (Fig. 5.54), e a distribuição de tensões de cisalhamento resultante será bem diferente daquela definida pela Eq. 5.10.

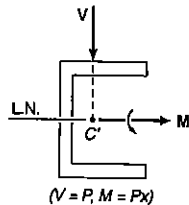


Fig. 5.53

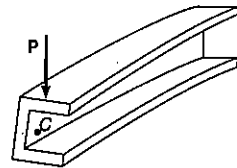


Fig. 5.54

Surge agora a seguinte questão: É possível aplicar a força P de alguma maneira que não provoque torção, mas apenas flexão, na barra da Fig. 5.54? E se houver essa possibilidade, em que ponto deve ser aplicada a força? Se a barra se flexionar sem torção, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto pode ser obtida pela Eq. 5.10. Nesse caso, Q representa o momento estático da área sombreada (Fig. 5.55a) em relação à linha neutra, e a distribuição de tensões apresenta o aspecto indicado na Fig. 5.55b, com $\tau = 0$ nos pontos A e E . A tensão de cisalhamento que atua

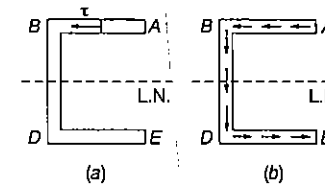


Fig. 5.55

em um elemento de seção transversal de área $dA = t \cdot ds$ (Fig. 5.56a) produz a força $dF = \tau dA$, que pode também ser calculada por $dF = q \cdot ds$, sendo q o fluxo de cisalhamento $q = \tau \cdot t = VQ/I$ no ponto em estudo. A resultante das forças que agem nos elementos da aba superior da barra é a força horizontal F (Fig. 5.56b), de intensidade

$$F = \int_A^B q \, ds \tag{5.21}$$

A barra é simétrica em relação à linha neutra, de modo que a resultante das forças que agem na aba inferior do canal é uma força F' de mesma intensidade da força F mas de sentido oposto. Concluímos que as tensões que atuam na alma BD do perfil vão ter como resultante uma força igual à força cortante V na seção:

$$V = \int_B^D q \, ds \tag{5.22}$$

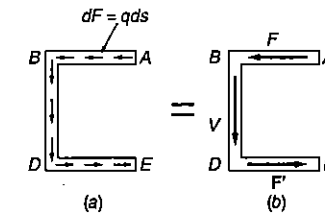


Fig. 5.56

Observando a Fig. 5.57a, vemos que as forças F e F' formam um conjugado de momento $F \cdot h$, sendo h a distância entre o centro das abas AB e DE . Podemos eliminar

o efeito desse conjugado se a força cortante V for deslocada para a esquerda de uma distância e , de modo que o momento de V em relação a B seja igual a $F \cdot h$. (Fig. 5.57b). Podemos escrever $V \cdot e = F \cdot h$ ou

$$e = \frac{Fh}{V} \quad (5.23)$$

onde se conclui que não vai ocorrer torção na barra se a força P for aplicada em um ponto distanciado de e da linha central da alma BD do perfil (Fig. 5.58).

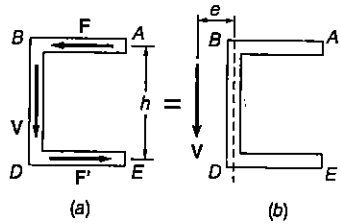


Fig. 5.57

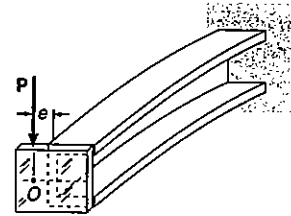


Fig. 5.58

A linha de ação da força P intercepta o eixo de simetria da seção no ponto O , denominado *centro de cisalhamento* da seção. No caso de uma força P oblíqua (Fig. 5.59a), a barra também não sofrerá efeito de torção se a força P for aplicada no centro de cisalhamento. Nesse caso, a força P é decomposta nas componentes P_x e P_y (Fig. 5.59b) que vão corresponder às condições de carregamento das Figs. 5.51 e 5.58, que não provocam torção na barra.

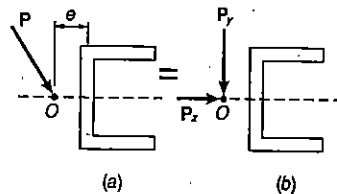


Fig. 5.59

EXEMPLO 5.4

Determinar o centro de cisalhamento O do perfil de canal da Fig. 5.60, de espessura uniforme e dimensões: $b = 100$ mm, $h = 150$ mm e $t = 3$ mm.

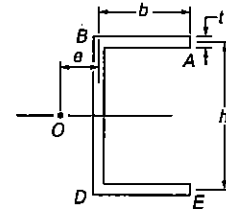


Fig. ex.5.60

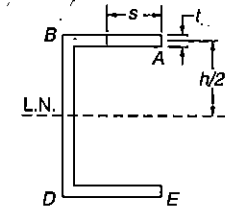


Fig. ex.5.61

Assumindo que a barra não vai torcer, determinamos inicialmente o fluxo de cisalhamento q na aba AB , a uma distância s do ponto A (Fig. 5.61). O momento estático Q da área sombreada em relação à linha neutra é $Q = (st)(h/2)$. Pela Eq. 5.8 escrevemos:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I} \quad (5.24)$$

sendo V a força cortante vertical e I o momento de inércia da seção em relação à linha neutra.

Usando a Eq. 5.21 determinamos a intensidade da força F que se exerce na aba AB , integrando o fluxo de cisalhamento q de A até B :

$$F = \int_0^b q \, ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I} \, ds = \frac{Vth}{2I} \int_0^b s \, ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \quad (5.25)$$

A distância e da linha de centro da alma BD ao centro de cisalhamento O pode ser obtida agora pela Eq. 5.23:

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I} \frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I} \quad (5.26)$$

O momento de inércia da seção é calculado como segue:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{alma}} + 2I_{\text{abas}} \\ &= \frac{1}{12}th^3 + 2 \left[\frac{1}{12}bt^3 + bt \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Se desprezarmos o termo t^3 , por ser pequeno, temos

$$I = \frac{1}{12}th^3 + \frac{1}{2}tbh^2 = \frac{1}{12}th^2(6b + h) \quad (5.27)$$

Levando essa expressão à Eq. 5.26, temos

$$e = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}} \quad (5.28)$$

Podemos ver que a distância e não depende da espessura t e varia de 0 a $b/2$, dependendo do valor da relação $h/3b$. Para a seção em estudo, temos

$$\begin{aligned} \frac{h}{3b} &= \frac{150 \text{ mm}}{3(100 \text{ mm})} = 0,5 \\ e &= \frac{100 \text{ mm}}{2 + 0,5} = 40 \text{ mm} \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.5

Determinar, para o perfil canal do Ex. 5.4, a distribuição de tensões de cisalhamento causada por uma força cortante vertical V de 800 N de intensidade, aplicada no centro de cisalhamento O (Fig. 5.62).

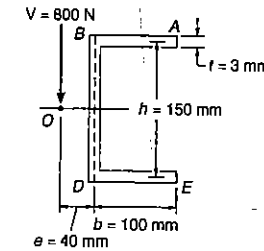


Fig. ex.5.62

Não ocorre torção, pois V está situada no centro de cisalhamento, e as tensões na aba AB são calculadas pela Eq. 5.24 do Ex. 5.4. Temos

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I} s \quad (5.29)$$

o que mostra que a distribuição de tensões na aba AB é linear. Fazendo $s = b$ e substituindo o valor de I dado pela Eq. 5.27, obtemos o valor da tensão de cisalhamento em B :

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2 \left(\frac{1}{12}th^2 \right) (6b + h)} = \frac{6Vb}{th(6b + h)} \quad (5.30)$$

Para as dimensões dadas e para $V = 800$ N, temos

$$\begin{aligned} \tau_B &= \frac{6(800 \text{ N})(0,100 \text{ m})}{(0,003 \text{ m})(0,150 \text{ m})(6 \times 0,100 \text{ m} + 0,150 \text{ m})} \\ &= 1,422 \text{ MPa} \end{aligned}$$

A distribuição de tensões de cisalhamento na alma BD é parabólica, como no caso do perfil I , e a máxima tensão de cisalhamento ocorre na linha neutra. Calculamos o momento estático da parte superior da seção transversal em relação à linha neutra (Fig. 5.63):

$$Q = bt \left(\frac{1}{2}h \right) + \frac{1}{2}ht \left(\frac{1}{4}h \right) = \frac{1}{8}ht(4b + h) \quad (5.31)$$

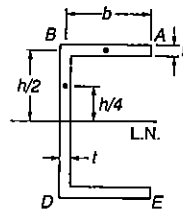


Fig. ex.5.63

Substituindo os valores de I e Q dados por (5.27) e (5.31) na expressão para cálculo da tensão de cisalhamento, temos

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{8}ht)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

ou, pelos dados do problema

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3(800 \text{ N})(4 \times 0,100 \text{ m} + 0,150 \text{ m})}{2(0,003 \text{ m})(0,150 \text{ m})(6 \times 0,100 \text{ m} + 0,150 \text{ m})} = 1,956 \text{ MPa}$$

A distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da seção canal foi indicada na Fig. 5.64.

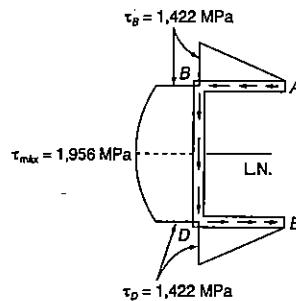


Fig. ex.5.64

EXEMPLO 5.6

Determinar para o perfil canal do Ex. 5.4, a máxima tensão de cisalhamento provocada por uma força cortante vertical V de 800 N, aplicada no centróide C da seção (Fig. 5.65). Desprezar o efeito de concentração de tensões.

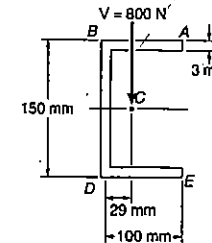


Fig. ex.5.65

O centro de cisalhamento O da seção transversal foi determinado no Ex. 5.4 onde se determinou que O está a uma distância $e = 40$ mm da linha de centro da alma BD do perfil.

Podemos substituir a força cortante V (Fig. 5.66a) por um sistema força-conjugado equivalente, aplicado no centro de cisalhamento (Fig. 5.66b). Esse sistema consiste em uma força V de 800 N e de um torque T de intensidade

$$T = V(OC) = (800 \text{ N})(40 \text{ mm} + 29 \text{ mm}) = 55,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A força de 800 N provoca flexão na barra, e a distribuição de tensões de cisalhamento na seção (Fig. 5.66c) já foi determinada no Ex. 5.5. A máxima tensão de cisalhamento encontrada para essa força foi

$$(\tau_{m\acute{a}x})_{\text{Flexão}} = 1,956 \text{ MPa}$$

O torque T provoca torção na barra, com a conseqüente distribuição de tensões indicadas na Fig. 5.66d. A analogia da membrana (Sec. 3.12) mostra que, para barras de paredes finas de espessura uniforme, a tensão causada por um momento torçor T é máxima ao longo dos lados da seção. Devemos usar a Eq. 3.43 e a Tab. 3.1, com

$$a = 0,100 + 0,150 \text{ m} + 0,100 \text{ m} = 0,350 \text{ m}$$

$$b = t = 0,003 \text{ m} \quad a/b = 116,7$$

temos $c_1 = 0,333$ e

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{Torção}} = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{55,2 \text{ N} \cdot \text{m}}{(0,333)(0,350 \text{ m})(0,003 \text{ m})^2}$$

$$= 52,6 \text{ MPa}$$

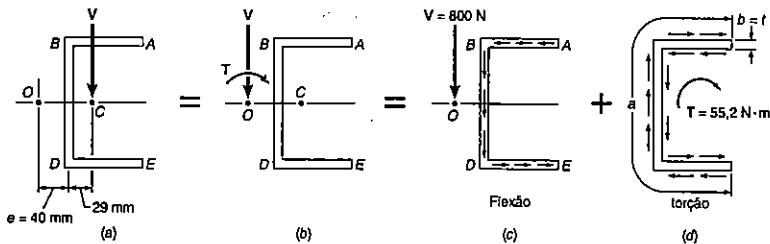


Fig. ex.5.66

A tensão máxima devida ao efeito conjunto da flexão e da torção ocorre na linha neutra, na face da alma, e vale

$$\tau_{\text{máx}} = 1,956 \text{ MPa} + 52,6 \text{ MPa} = 54,6 \text{ MPa}$$

Voltemos agora nossa atenção para o caso de barras de paredes finas que não possuem nenhum plano de simetria. Consideremos o caso de uma cantoneira submetida à ação de uma força vertical P . Se a barra fica orientada de modo que a carga P fica perpendicular a um dos eixos principais de inércia da seção (Fig. 5.67), o vetor M , que representa o momento flétor em uma certa seção, vai ser dirigido ao longo de Cz , e a linha neutra vai coincidir com esse eixo (conforme Sec. 4.14). Desse modo, a Eq. 4.16 pode ser aplicada para a determinação das tensões normais na seção. Propomos agora a determinar em que ponto deve ser aplicada a força P de modo que a Eq. 5.10 possa ser aplicada para a determinação das tensões de cisalhamento na seção, quer dizer, de modo que a barra apenas se *flexione sem torcer*.

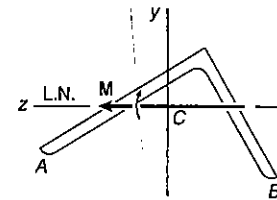


Fig. 5.67

Vamos *adotar* que as tensões de cisalhamento na seção são definidas pela Eq. 5.10. Como já fizemos anteriormente para o perfil canal, vamos expressar as forças elementares que se exercem na seção por $dF = q \cdot ds$, onde $q = VQ/I$ e Q representa o momento estático em relação à linha neutra (Fig. 5.68a). A resultante das forças elementares que atuam na porção OA da seção é a força F_1 dirigida ao longo de OA , e que a resultante das forças elementares que se exercem na porção OB é a força F_2 dirigida segundo OB (Fig. 5.68b). Como as duas forças F_1 e F_2 passam pelo ponto O , vértice da cantoneira, deduzimos que sua resultante, que é a força cortante V da seção, deve passar por O também (Fig. 5.68c). Vemos que a barra não vai ficar submetida à torção se a linha de ação da força P passar pelo vértice O da seção em que a força está aplicada.

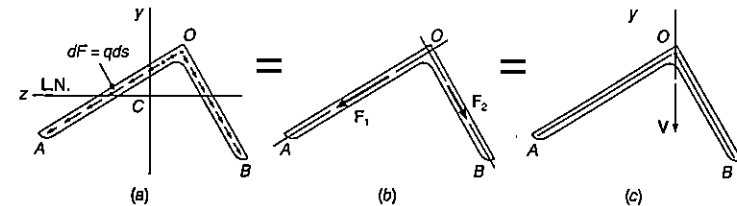


Fig. 5.68

As mesmas considerações podem ser aplicadas para o caso em que P é perpendicular ao outro eixo principal Cy da seção transversal. Como qualquer força P aplicada no vértice O , em qualquer direção, pode ser decomposta em duas componentes perpendiculares aos eixos principais, concluímos que qualquer força aplicada ao vértice da cantoneira não irá produzir torção. O vértice O é, portanto, o centro de cisalhamento da seção.

Na prática, são usadas comumente cantoneiras com uma aba vertical e outra horizontal. Do que dissemos até aqui podemos afirmar que essas barras não sofrem

torção se as forças forem aplicadas ao longo da linha de centro da sua aba vertical. A Fig. 5.69 mostra que a resultante das forças elementares que se exercem na porção OA de uma certa seção será igual à força cortante V , enquanto a resultante das forças elementares na porção horizontal OB deve ser nula:

$$\int_0^A q \, ds = V \qquad \int_0^B q \, ds = 0$$

Isso não quer dizer que *não* ocorram tensões de cisalhamento na aba horizontal. Ao decompor a força cortante V em componentes nas direções dos eixos principais da seção, calculamos a tensão de cisalhamento em cada ponto, verificando que a tensão τ se anula em apenas um ponto entre O e B (V . Problema Resolvido 5.8).

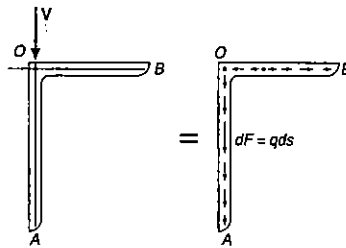


Fig. 5.69

Outro perfil de paredes finas comumente encontrado na prática é o perfil Z. A seção transversal de um perfil Z não possui nenhum eixo de simetria, mas possui um *centro de simetria* O (Fig. 5.70). Isto quer dizer que para qualquer ponto H da seção transversal corresponde um outro ponto H' , de modo que o ponto O é ponto médio do segmento HH' . É fácil de ver que o centro O de simetria coincide com o centróide da seção. Como vamos ver agora, o centro de simetria O é também o centro de cisalhamento da seção transversal.

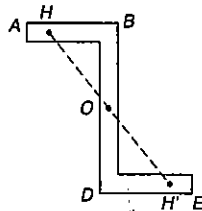


Fig. 5.70

Como fizemos para o caso da cantoneira, vamos considerar que as cargas são aplicadas em um plano perpendicular a um dos eixos principais da seção, de modo que esse eixo seja também a linha neutra da seção (Fig. 5.71). Assumimos também aqui que a barra se flexiona sem apresentar torção, de modo que as tensões de cisalhamento na seção podem ser definidas pela Eq. 5.10. Designando por Q o momento estático da porção AH da seção transversal em relação à linha neutra, e por Q' o momento estático em relação à mesma linha da porção EH' , vemos que $Q' = -Q$. Desse modo, as tensões de cisalhamento em H e H' têm a mesma intensidade e a mesma direção, o que faz com que as forças elementares nos elementos de área dA sejam iguais em H e H' . Essas forças elementares produzem momentos de mesma intensidade e de sentidos opostos em relação a O (Fig. 5.72). Como isso se verifica para qualquer par de elementos simétricos, podemos concluir que a resultante das forças elementares que se exercem na seção tem momento nulo em relação a O . Assim, a força cortante V na seção está dirigida ao longo de uma linha que passa por O . A análise que fizemos pode ser repetida para o caso de cargas aplicadas em um plano perpendicular ao outro eixo principal de inércia, donde se conclui que o ponto O é o centro de cisalhamento da seção.

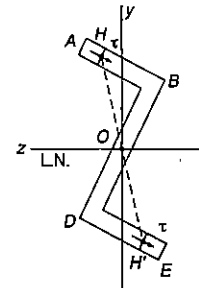
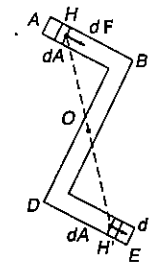


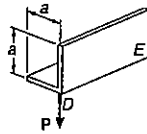
Fig. 5.71



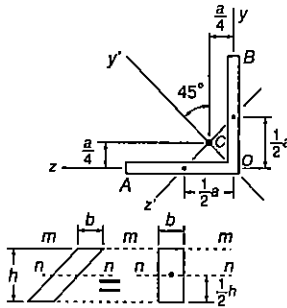
F5-72

PROBLEMA RESOLVIDO 5.8

Determinar a distribuição das tensões de cisalhamento na cantoneira DE para o carregamento indicado. A cantoneira tem espessura uniforme.



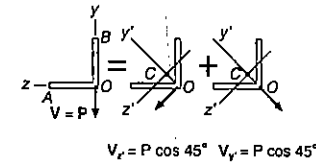
Centro de cisalhamento. Sabemos pela Sec. 5.12 que o centro de torção de uma cantoneira se localiza no vértice da seção. Como a carga P está aplicada em D , ela causa flexão sem torção na cantoneira.



Eixos principais de inércia. A figura localiza a posição do centróide C de uma certa seção transversal AOB . Como y' é um eixo de simetria, os eixos y' e z' são eixos principais de inércia da seção. Para o paralelogramo indicado na figura, temos $I_{nn} = bh^2/12$ e $I_{mm} = bh^3/3$. Se considerarmos cada aba da cantoneira como um paralelogramo, determinamos os momentos de inércia $I_{y'}$ e $I_{z'}$.

$$I_{y'} = 2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{t}{\cos 45^\circ} \right) (a \cos 45^\circ) \right] = \frac{1}{3} ta^3$$

$$I_{z'} = 2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{t}{\cos 45^\circ} \right) (a \cos 45^\circ) \right] = \frac{1}{12} ta^3$$



Superposição de efeitos. A força cortante na seção analisada é igual à carga P . Vamos decompor a força V em componentes paralelas aos eixos principais.

Tensão de cisalhamento devida a V_y . Vamos determinar a tensão de cisalhamento no ponto e da ordenada y .

$$\bar{y}' = \frac{1}{2}(a + y) \cos 45^\circ - \frac{1}{2}a \cos 45^\circ = \frac{1}{2}y \cos 45^\circ$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \frac{1}{2}t(a - y)y \cos 45^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{V_y Q}{I_{z'} t} = \frac{(P \cos 45^\circ) \frac{1}{2}t(a - y)y \cos 45^\circ}{\left(\frac{1}{12}ta^3\right)t} = \frac{3P(a - y)y}{ta^3}$$

A tensão de cisalhamento no ponto f é representada por uma função semelhante de z .

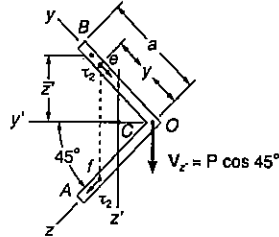
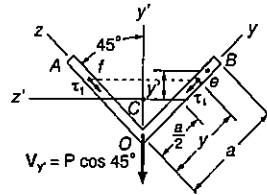
Tensão de cisalhamento devida a V_z . Consideremos novamente o ponto e .

$$\bar{z}' = \frac{1}{2}(a + y) \cos 45^\circ$$

$$Q = (a - y)t\bar{z}' = \frac{1}{2}(a^2 - y^2)t \cos 45^\circ$$

$$\tau_2 = \frac{V_z Q}{I_{y'} t} = \frac{(P \cos 45^\circ) \left[\frac{1}{2}(a^2 - y^2)t \cos 45^\circ\right]}{\left(\frac{1}{3}ta^3\right)t} = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3}$$

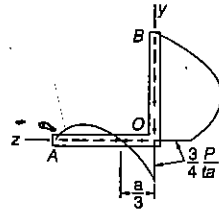
A tensão de cisalhamento em f é representada por uma função semelhante de z .



Tensões combinadas. a) Ao longo da aba vertical: A tensão de cisalhamento no ponto e é

$$\tau_e = \tau_2 + \tau_1 = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3} + \frac{3P(a - y)y}{ta^3} = \frac{3P(a - y)}{4ta^3} [(a + y) + 4y]$$

$$\tau_e = \frac{3P(a - y)(a + 5y)}{4ta^3}$$



b) Ao longo da aba horizontal: A tensão de cisalhamento no ponto f é

$$\tau_f = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3P(a^2 - z^2)}{4ta^3} - \frac{3P(a - z)z}{ta^3} = \frac{3P(a - z)}{4ta^3} [(a + z) - 4z]$$

$$\tau_f = \frac{3P(a - z)(a - 3z)}{4ta^3}$$

PROBLEMAS

5.99 e 5.100 Determinar a localização do centro de cisalhamento O, de uma viga de parede fina de espessura uniforme e com a seção transversal mostrado.

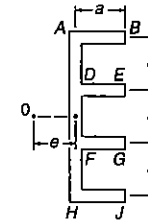


Fig. P5.99

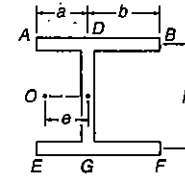


Fig. P5.100

5.101 até 5.106 Para uma viga extrudada, com a seção transversal mostrada, determinar: (a) a localização do centro de cisalhamento O; (b) a distribuição de tensões de cisalhamento, causada pela força cortante vertical V, aplicada em O.

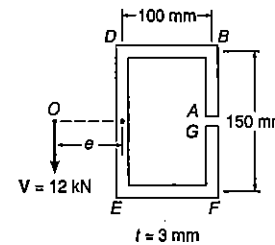


Fig. P5.101

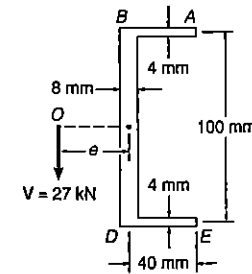


Fig. P5.102

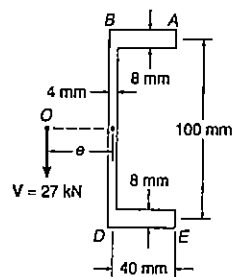


Fig. P5.103

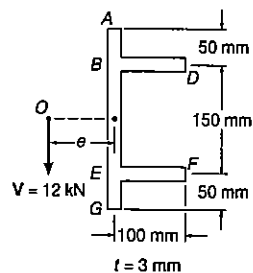


Fig. P5.104

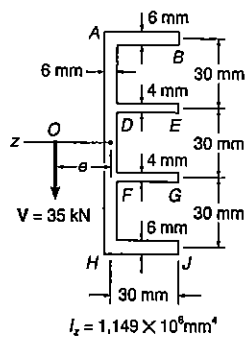


Fig. P5.105

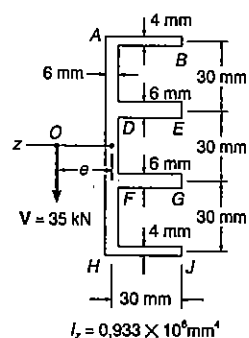


Fig. P5.106

5.107 até 5.112 Determinar a localização do centro de cisalhamento O de uma viga de parede fina de espessura uniforme e com a seção transversal mostrada.

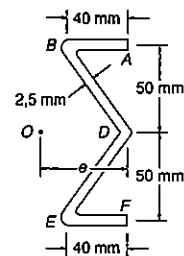


Fig. P5.107

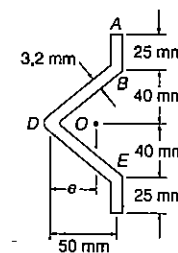


Fig. P5.108

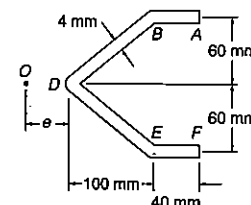


Fig. P5.109

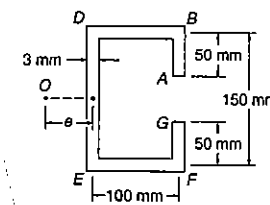


Fig. P5.110

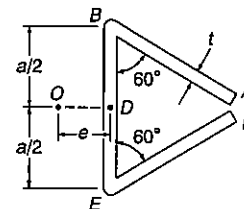


Fig. P5.111

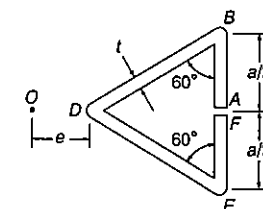


Fig. P5.112

5.113 a 5.114 Determinar a localização do centro de cisalhamento O de uma viga de parede fina de espessura uniforme e com seção transversal mostrada.

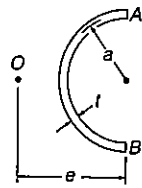


Fig. P5.113

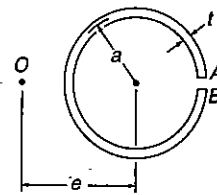


Fig. P5.114

5.115 e 5.116 Uma viga de parede fina com espessura uniforme tem a seção transversal mostrada. Determinar a dimensão b , para que o centro de cisalhamento O da viga esteja localizado no ponto indicado.

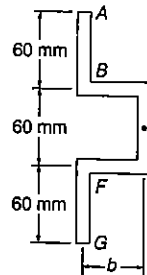


Fig. P5.115

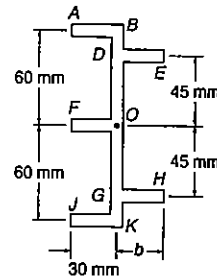


Fig. P5.116

5.117 Determinar a localização do centro de cisalhamento O da viga de parede fina com a seção transversal mostrada.

5.118 Determinar a localização do centro de cisalhamento O da viga de parede fina com espessura uniforme, da seção transversal mostrada.

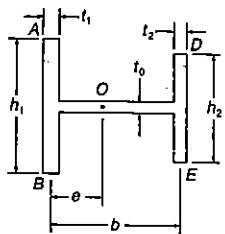


Fig. P5.117

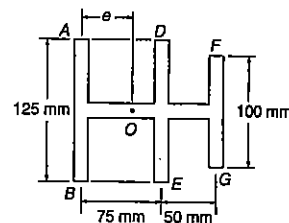


Fig. P5.118

5.119 Resolver o Prob. 5.117, quando $t_0 = t_1 = t_2 = 8$ mm, $h_1 = 75$ mm, $h_2 = 60$ mm e $b = 50$ mm.

*5.120 Uma placa de aço de 160 mm de largura e 8 mm de espessura é dobrada para formar o perfil mostrado. Sabendo-se que a carga vertical P atua em um ponto localizado na superfície média da alma, determinar: (a) o torque T que irá torcer o perfil; (b) a máxima tensão de cisalhamento no perfil dobrado, causada pela carga P .

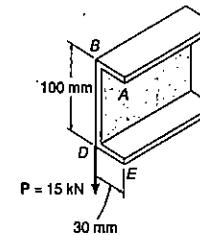


Fig. P5.120

*5.121 Resolver o Prob. 5.120, considerando que a espessura da placa é de 6 mm e é dobrada para formar o perfil mostrado.

*5.122 A viga em balanço AB consiste de metade de um tubo de parede fina, com raio médio de 30 mm e espessura da parede de 9,5 mm. Sabendo-se que a carga vertical P passa através do centróide C da seção transversal da viga, determinar: (a) o torque que irá causar torção na viga sujeita a carga P ; (b) a máxima tensão de cisalhamento na viga causada pela carga P .

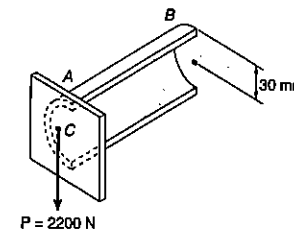


Fig. P5.122

***5.123** Resolver o Prob. 5.122, considerando que a espessura da viga em balanço de parede fina é reduzida para 6,35 mm.

5.124 Para o perfil cantoneira e o carregamento mostrado no Prob. Resolvido 5.8, verificar que $\int q dz = 0$, ao longo da perna horizontal da cantoneira.

5.125 Para o perfil cantoneira e o carregamento mostrado no Prob. Resolvido 5.8, verificar que $\int q dy = P$, ao longo da perna vertical da cantoneira.

5.126 Para o perfil cantoneira e o carregamento mostrado no Prob. Resolvido 5.8, pede-se: (a) determinar os pontos onde a tensão de cisalhamento é máxima e seus correspondentes valores de tensão; (b) verificar que os pontos obtidos estão localizados sobre a linha neutra, correspondente ao carregamento dado.

5.127 A viga em balanço consiste de perfil "U" de espessura uniforme. Sabendo-se que a carga P atua no centro de cisalhamento O e no plano da seção de extremidade da viga, determinar a tensão de cisalhamento no: (a) ponto B' ; (b) ponto D' .

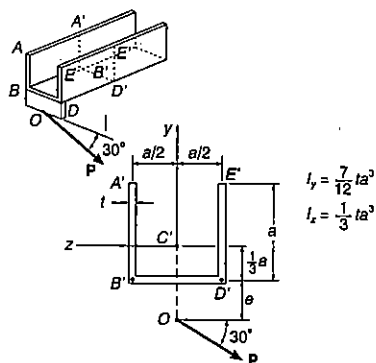


Fig. P5.127

***5.128** Para a viga em balanço e o carregamento do Prob. 5.127, determinar o ponto onde a tensão de cisalhamento é máxima e o correspondente valor da tensão: (a) ao longo da linha $B'D'$ da alma; (b) ao longo da linha $D'E'$ de uma perna.

***5.129** Para a viga em balanço e o carregamento do Prob. 5.127, usando os resultados do Prob. 5.128, verificar que os pontos onde a tensão de cisalhamento é máxima estão localizados sobre a correspondente linha neutra, para o carregamento dado.

***5.130** Determinar a distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da linha $D'B'$ na perna horizontal do perfil cantoneira com o carregamento mostrado. Os eixos x' e y' são eixos centroidais principais da seção transversal.

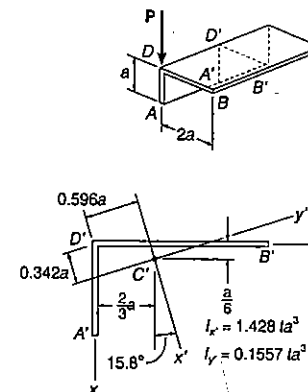


Fig. P5.130

***5.131** Para o perfil e o carregamento do Prob. 5.130, determinar a distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da linha $D'A'$ da perna vertical.

***5.132** Mostrar que para o perfil cantoneira e o carregamento dado: (a) a distribuição de tensões de cisalhamento em cada perna é parabólica, com $\tau = 0$ em A e B ; (b) a tensão de cisalhamento na perna horizontal é também zero, no ponto E de abscissa $x = a/3$, e é máxima no ponto F de abscissa $x = 2a/3$. (Sugestão: a resultante das forças cisalhantes na perna horizontal deve ser nula.)

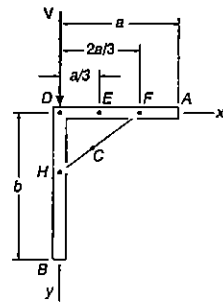


Fig. P5.132

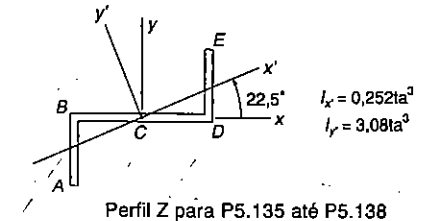
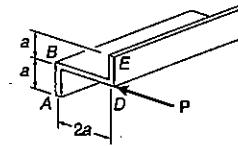
*5.133 Para o perfil cantoneira e o carregamento do Prob. 5.132, mostrar que a tensão de cisalhamento na perna vertical é máxima no ponto *H*, de ordenada $y = 2b/(4 + \beta)$, onde β é a relação A_h/A_v , das áreas horizontal e vertical, da seção transversal das pernas. (Sugestão: Os pontos *F* e *H*, onde a tensão de cisalhamento é máxima, estão localizados sobre a linha neutra, e esta linha passa através do centróide *C* da seção transversal.)

*5.134 Para o perfil cantoneira e o carregamento do Prob. 5.132, mostrar que a máxima tensão de cisalhamento na perna vertical é

$$\tau_m = \frac{3V}{2bt} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)^2}{(1 + \beta)\left(1 + \frac{1}{4}\beta\right)}$$

onde t é a espessura da perna vertical e β é a relação entre A_h/H_v , das áreas horizontal e vertical, da seção transversal das pernas. (Sugestão: Usar os resultados obtidos na parte *a* do Prob. 5.132 e no Prob. 5.133, e o fato que a resultante das forças cisalhantes na perna vertical é igual a V .)

*5.135 e 5.136 A viga em balanço mostrada consiste em um perfil em forma de "Z", de espessura uniforme. Para o carregamento mostrado, determinar a distribuição de tensões de cisalhamento na perna vertical *DE*. Os eixos x' e y' são centroidais e principais da seção transversal.



Perfil Z para P5.135 até P5.138

Fig. P5.135 e P5.137

*5.137 e 5.138 A viga em balanço mostrada consiste em um perfil em "Z", de espessura uniforme. Para o carregamento mostrado, determinar a distribuição de tensões de cisalhamento na alma horizontal *BD*. Os eixos x' e y' são centroidais e principais da seção transversal.

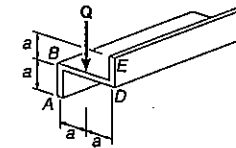


Fig. P5.136 e P5.138

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo é voltado para o estudo de forças internas e tensões em barras prismáticas, causadas por *carregamentos transversais*.

Distribuição de tensões normais

Na Sec. 5.2, nós consideramos uma viga em balanço com uma força cortante V constante, devida a uma carga simples aplicada na extremidade livre, e consideramos que forças e tensões longitudinais existem, ao longo da viga. Tendo determinado na Sec. 5.3 a distribuição de tensões normais devido a flexão, considerando que essas tensões não são afetadas pela presença do cisalhamento, nós consideramos, na Sec. 5.4, a porção da viga mostrada na Fig. 5.8 e determinamos a força cisalhante H exercida na face horizontal mais inferior (Fig. 5.9):

$$H = \frac{PQ}{I} x \quad (5.6)$$

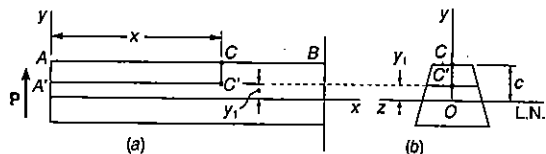


Fig. 5.8

Fluxo cisalhante

Nós então definimos o *fluxo cisalhante* q em um dado ponto C de uma seção transversal como sendo a força cisalhante por unidade de comprimento nesse ponto. Escrevemos:

$$q = \frac{VQ}{I} \quad (5.8)$$

onde V é a força cortante ou força cisalhante na seção considerada, I é o momento de inércia centrodial da seção da viga, e Q é o momento estático da área acima do ponto C , em relação à linha neutra da seção transversal. Somos então capazes de calcular as forças horizontais internas nas vigas sujeitas ao cisalhamento (Exemplo 5.1).

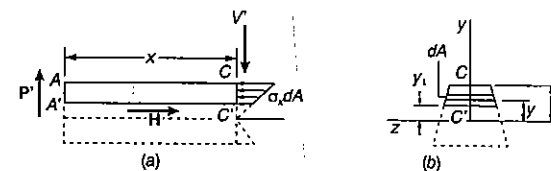


Fig. 5.9

Carregamento transversal

Na Sec. 5.5, determinamos a tensão de cisalhamento média horizontal em um dado ponto C' (Fig. 5.16):

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} \quad (5.10)$$

onde t é a largura da seção transversal no ponto C' .

Tensões cisalhantes verticais

Lembrando do Cap. 1, onde em um dado ponto as tensões de cisalhamento, no plano transversal e horizontal, são iguais em intensidade, nós notamos que a expressão acima também representa a tensão de cisalhamento média vertical, ao longo de uma dada linha horizontal C_1C_2 .

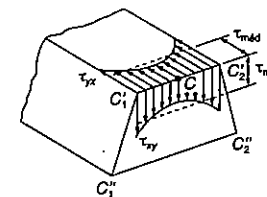


Fig. 5.16

Máxima tensão de cisalhamento de uma viga retangular

Nas Secs. 5.6 e 5.7, analisamos as tensões de cisalhamento ao longo de cortes horizontais, em uma viga de seção transversal retangular. Notamos que a distribuição de tensões de cisalhamento é parabólica e a máxima tensão ocorre no centro da seção:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (5.14)$$

onde A é a área da seção transversal.

Máxima tensão de cisalhamento em vigas de abas largas

Para vigas de abas largas, nós temos que uma boa aproximação para a máxima tensão de cisalhamento pode ser obtida dividindo-se a força cortante V pela área da alma.

Fluxo cisalhante e tensões de cisalhamento numa seção longitudinal

Considerando na Sec. 5.8 um corte longitudinal arbitrário, ao longo de uma barra prismática, notamos que o fluxo cisalhante através do corte poderia ainda ser obtido da Eq. (5.8). Então discutimos (Sec. 5.9) a distribuição de tensões em barras simétricas de paredes finas e notamos que a Eq. (5.10) ainda é válida:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} \quad (5.10)$$

No caso de uma viga de abas largas, por exemplo, a Eq. (5.10) pode ser usada para determinar a tensão de cisalhamento τ_{xz} na aba e a tensão de cisalhamento τ_{xy} na alma (Fig. 5.33). Em ambos os casos, por exemplo, t representa a espessura da parede do corte e Q é o momento estático da área isolada do corte, em relação à linha neutra da seção transversal.

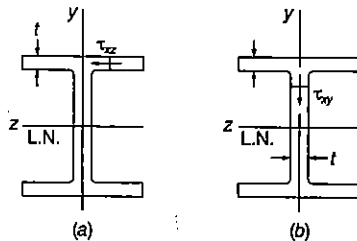


Fig. 5.33

Deformações plásticas

Na Sec. 5.10, consideramos o efeito das deformações plásticas sobre a intensidade e a distribuição das tensões de cisalhamento. Do Cap. 4, lembramos que, uma vez iniciada a deformação plástica, carregamentos adicionais irão produzir zonas plásticas, que avançam dentro do núcleo elástico de uma viga. Depois, demonstrando que tensões de cisalhamento podem ocorrer somente no núcleo elástico de uma viga, notamos que tanto um acréscimo no carregamento, como o resultado do decréscimo do tamanho do núcleo elástico, contribuem para um acréscimo das tensões de cisalhamento.

Nos capítulos precedentes, nós aprendemos a determinar as tensões em barras prismáticas causadas por carregamentos axiais (Cap. 1), torcionais (Cap. 3) e flexionais (Cap. 4), e neste capítulo determinamos as tensões produzidas por carregamentos transversais. Na Sec. 5.11, combinamos este conhecimento para determinar as tensões em barras sujeitas às condições mais gerais de carregamentos.

Por exemplo, para se determinar as tensões no ponto K do membro $ABDE$ mostrado na Fig. 5.43, os carregamentos aplicados foram substituídos por um sistema equivalente força-momento, no centróide C da seção transversal que contém o ponto K (Fig. 5.44). As correspondentes tensões, normal e de cisalhamento, em K foram então determinadas para cada uma das forças binárias aplicadas em C . No ponto K a tensão normal total foi obtida pela combinação das tensões causadas pelo carregamento axial e pelo momento fletor. Analogamente, as tensões de cisalhamento causadas pelo torque e pelas forças cortantes foram combinadas para obter a tensão de cisalhamento total, no ponto K .

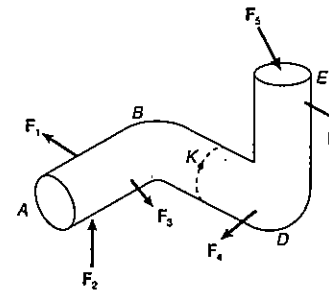


Fig. 5.43

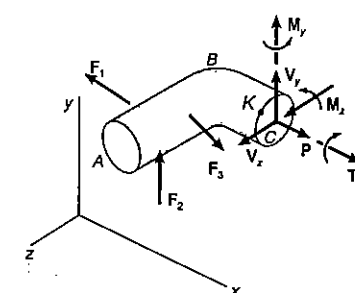


Fig. 5.44

Para uma barra prismática que não é carregada em seu plano de simetria, nós sabemos que em geral ocorrem tanto a flexão como a torção. Na Sec. 5.12, aprendemos a localizar um ponto O da seção transversal, conhecido como *centro de cisalhamento*, onde as cargas devem ser aplicadas para que a barra venha a fletir, sem torção (Fig. 5.58). Notamos que, para cargas aplicadas no centro de cisalhamento de uma seção, as seguintes fórmulas permanecem válidas:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \text{e} \quad \tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It}$$

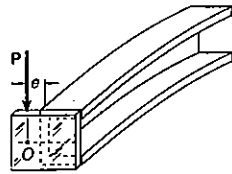


Fig. 5.58

Usando o princípio da superposição, somos capazes de determinar as tensões em barras de paredes finas assimétricas, tal como perfis C laminados, cantoneiras de abas iguais ou desiguais, e vigas extrudadas (Exemplo 5.6 e Prob. Resolvido 5.8).

PROBLEMAS DE REVISÃO

5.139 Dois perfis laminados de aço W130 x 23,8 podem ser soldados em A e B, de qualquer uma das três maneiras mostradas, para formar uma viga composta. Sabendo-se que para cada uma das soldas a força cisalhante admissível horizontal é de 480 kN/m, determinar, para cada arranjo, a máxima força cortante vertical admissível para a viga composta.

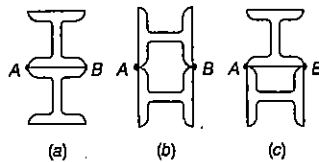


Fig. P5.139

5.140 Duas pranchas grossas de 50 x 150 mm de seção transversal são conectadas através de parafusos de fenda, para formar uma viga que é submetida a uma força vertical de 1800 N. Sabendo-se que a força cisalhante admissível é de 1600 N em cada parafuso, determinar: (a) o maior espaçamento longitudinal permissível para os parafusos de fenda; (b) a correspondente tensão de cisalhamento máxima na viga.

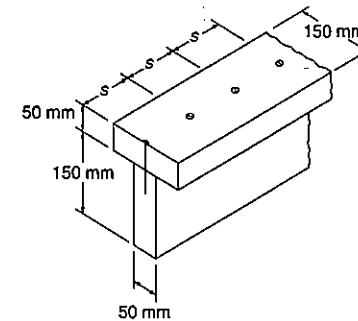


Fig. P5.140

5.141 Para a viga com carregamento mostrado, e considerando a seção $\alpha\text{-}\alpha$, determinar: (a) a maior tensão normal; (b) a maior tensão de cisalhamento.

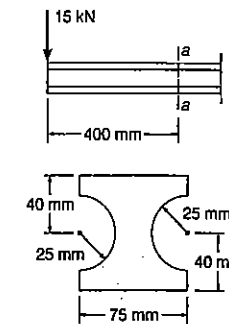


Fig. P5.141

5.142 Uma coluna é fabricada aparafusando-se firmemente dois perfis laminados C250 × 22,8 a duas placas, como mostrado. Determinar a tensão de cisalhamento no ponto *a*, causada por uma força cortante de 120 kN, aplicada ao longo do eixo *y*.

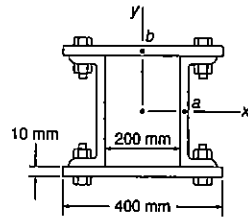


Fig. P5.142 e P5.143

5.143 Uma coluna é fabricada aparafusando-se firmemente dois perfis laminados C250 × 22,8 a duas placas, como mostrado. Determinar a tensão de cisalhamento no ponto *b*, causada por uma força cortante de 120 kN, aplicada ao longo do eixo *x*.

5.144 Três forças são aplicadas a uma viga constituída de um perfil laminado W150 × 29,8, como mostrado. Determinar as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

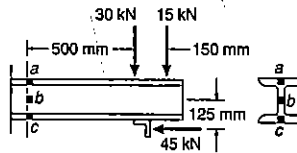


Fig. P5.144

5.145 Resolver o Prob. 5.14, considerando que a carga vertical de 150 kN é removida.

5.146 A viga caixão mostrada é feita de quatro pranchas firmemente coladas. Sabendo-se que na junta colada a tensão admissível de cisalhamento é de 830 kPa, determinar: (a) a maior força cortante vertical permissível na viga; (b) a correspondente tensão de cisalhamento máxima na viga.

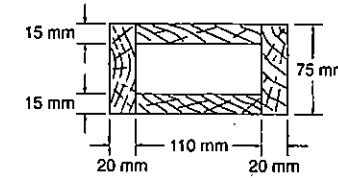


Fig. P5.146

5.147 Para a viga caixão do Prob. 5.146, determinar: (a) a maior força cortante horizontal permissível na viga; (b) a correspondente tensão de cisalhamento máxima na viga.

5.148 Duas forças são aplicadas a um tubo AB, como mostrado. Sabendo-se que o tubo tem diâmetros, interno e externo, iguais a 35 mm e 42 mm, respectivamente, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, no: (a) ponto *a*; (b) ponto *b*.

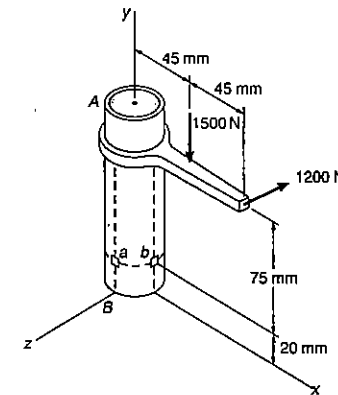


Fig. P5.148

5.149 Resolver o Prob. 5.148, considerando que a força de 1500 N é dirigida para cima.

5.150 Para uma viga extrudada de seção transversal mostrada, determinar: (a) a localização do centro de cisalhamento *O*; (b) a distribuição das tensões de cisalhamento, causadas por uma força vertical *V* de 2,5 kN aplicada em *O*.

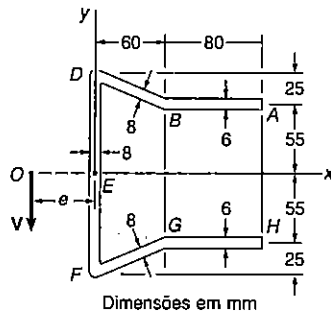


Fig. P5.150

Os problemas que se seguem são para serem resolvidos com o auxílio de um computador.

5.C1 Uma viga tem a seção transversal mostrada e está submetida a uma força cortante vertical V . Escrever um programa de computador que, para quaisquer cargas e dimensões especificadas, possa ser usado para calcular a tensão de cisalhamento ao longo da linha, entre duas quaisquer áreas retangulares adjacentes da seção transversal. Usar o programa para resolver o: (a) Prob. 5.22; (b) Prob. 5.23; (c) Prob. 5.11b e c; (d) Prob. 5.12b e c; (e) Prob. 5.13b e c.

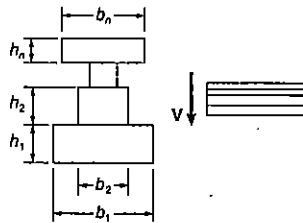


Fig. P5.C1

5.C2 Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular as tensões, normal e de cisalhamento, nos pontos com coordenadas dadas y e z , localizadas na superfície de um elemento de máquina, que tem uma seção transversal

retangular. As forças internas são conhecidas e equivalentes ao sistema força-momento mostrado, que está localizado no centróide da seção transversal. Usar este programa para calcular as tensões no: (a) Prob. 5.74; (b) Prob. 5.76.

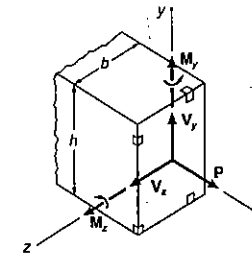


Fig. P5.C2

5.C3 Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular as tensões, de cisalhamento e normal, nos pontos A , B , C e D localizados na superfície externa de um elemento de máquina, que tem uma seção transversal anelar, como mostrado. As forças internas são conhecidas e equivalentes ao sistema força-momento mostrado, que está localizado no centróide da seção transversal. Usar este programa para calcular as tensões no: (a) Prob. 5.64; (b) Prob. 5.66; (c) Probs. 5.70 e 5.71; (d) Probs. 5.72 e 5.73.

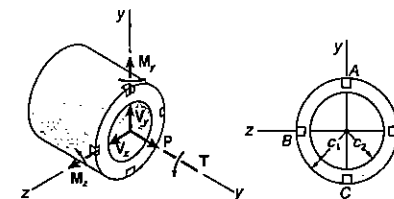


Fig. P5.C3

5.C4 A seção transversal de uma viga extrudada é simétrica em relação ao eixo x e consiste em vários segmentos retos, como mostrado. Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar: (a) a localização do centro de cisalhamento O ; (b) a distribuição de tensões de cisalhamento causadas pela aplicação de uma força vertical em O . Usar este programa para resolver os Probs. 5.102, 5.108 e 5.150.

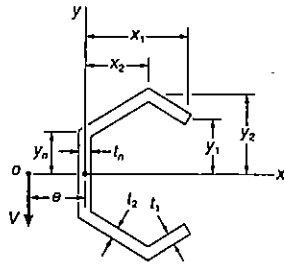


Fig. P5.C4

5.C5 A coluna curta AB é solicitada por uma força F , cuja linha de ação forma um ângulo β com a horizontal. Escrever um programa de computador, e utilizando os dados abaixo, usá-lo para calcular (a) a tensão normal no ponto a para valores de β , desde 0° até 60° , em intervalos de 5° ; (b) a maior tensão de compressão que ocorre no ponto a ; (c) o correspondente valor de β .

Perfil	F	L	d
W150 x 18	15 kN	750 mm	100 mm
W100 x 19,3	13 kN	500 mm	125 mm

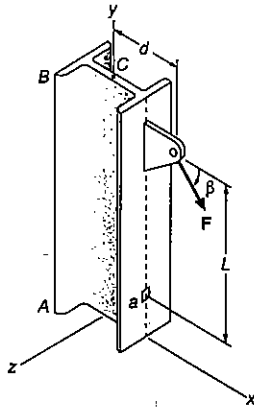


Fig. P5.C5

Capítulo 6

ANÁLISE DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES

6.1 INTRODUÇÃO

Nós vimos na Sec. 1.8 que o estado mais geral de tensões, em um dado ponto Q , pode ser representado por seis componentes. Três destas componentes, σ_x , σ_y e σ_z , definem as tensões normais exercidas nas faces de um pequeno elemento cúbico, centrado em Q e de mesma orientação que os eixos coordenados (Fig. 6.1a), e as outras três, τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} , são as componentes de tensões de cisalhamento no mesmo elemento. Da mesma maneira como destacamos anteriormente, o mesmo estudo de tensões poderá ser representado por um conjunto diferente de componentes, se os eixos coordenados sofrerem uma rotação (Fig. 6.1b). Nosso propósito na primeira parte deste capítulo é determinar como as componentes de tensão se transformam, quando ocorre uma rotação dos eixos coordenados. A segunda parte do capítulo se propõe a determinar, de maneira similar, a análise da transformação das componentes das deformações específicas.

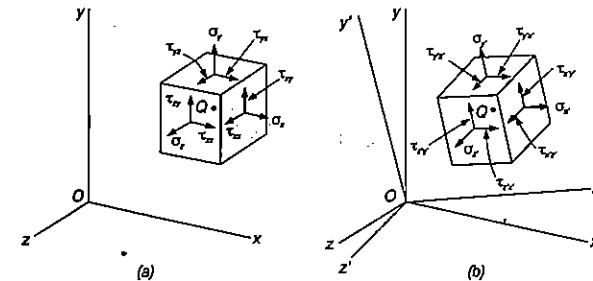


Fig. 6.1

Nossa discussão sobre a transformação das tensões será tratada principalmente com *tensões planas*, isto é, para situações em que duas das faces do cubo elementar se encontram isentas de tensões. Se adotarmos o eixo z perpendicular a estas faces, temos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, e as únicas componentes de tensão que permanecem são σ_x , σ_y e τ_{xy} (Fig. 6.2). Esta situação ocorre em uma placa fina submetida a forças atuando no plano médio da espessura placa (Fig. 6.3). Também ocorre na superfície livre de um elemento estrutural, ou um componente de máquina, ou seja, em qualquer ponto da superfície deste elemento ou componente, que não está sujeito a aplicação de uma força externa (Fig. 6.4).

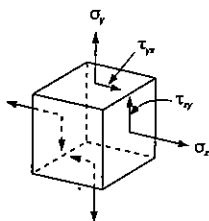


Fig. 6.2

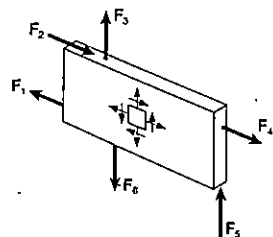


Fig. 6.3

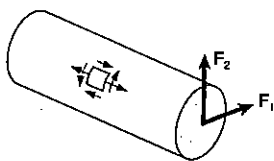


Fig. 6.4

Considerando na Sec. 6.2 um estado plano de tensões em um dado ponto Q , caracterizado pelas componentes de tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , associadas com o elemento mostrado na Fig. 6.5a, aprenderemos a determinar as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas ao elemento, depois deste ter sido girado de um ângulo θ , em torno do eixo z (Fig. 6.5b). Na Sec. 6.3, iremos determinar o valor de θ_p de θ para o qual as tensões $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$ são, respectivamente, máxima e mínima. Estes valores das tensões normais são as denominadas *tensões principais* no ponto Q , e as faces correspondentes do elemento definem os *planos principais de tensão* daquele ponto. Também determinaremos o valor θ_s do ângulo de rotação, para que a tensão de cisalhamento seja máxima, assim como também os valores correspondentes dessa tensão.

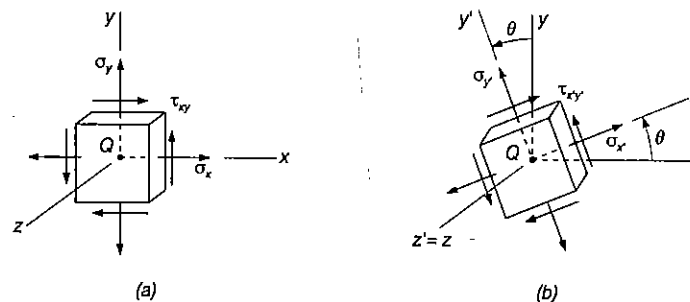


Fig. 6.5

Um método alternativo para a solução dos problemas envolvendo a transformação de tensões planas está baseado no uso do *Círculo de Mohr*, que será apresentado na Sec. 6.4. Nós iremos notar que, qualquer que seja o método escolhido, poderemos determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento, produzidas pela combinação de carregamentos, em qualquer ponto sobre a superfície livre de um elemento estrutural ou componente de máquina. Certamente, aprenderemos na Sec. 5.12 como determinar as componentes de tensão produzidas pela combinação de carregamentos sobre um elemento, como aquele mostrado na Fig. 6.4; com estas componentes teremos condições de determinar as máximas tensões, normal e de cisalhamento, que atuam no ponto.

Na Sec. 6.5, iremos considerar um *estado tridimensional de tensões* em um dado ponto e desenvolver uma fórmula para a determinação da tensão normal nesse ponto, segundo um plano com orientação arbitrária. Na Sec. 6.6, iremos considerar a rotação de um elemento cúbico, em torno de cada um dos eixos principais de tensão, e notaremos que as correspondentes transformações de tensão podem ser descritas por três diferentes círculos de Mohr. Nós iremos também observar que, no caso de um *estado plano de tensões* em um dado ponto, o valor máximo da tensão de cisalhamento obtida anteriormente, considerando as rotações no plano das tensões, pode não representar necessariamente a máxima tensão de cisalhamento nesse ponto. Isto nos fará distinguir entre tensões máximas de cisalhamento *no plano* e *fora do plano*.

Os *critérios de escoamento* para materiais dúteis, no estado plano de tensões, serão desenvolvidos na Sec. 6.7. Para prever se um material irá escoar em algum ponto crítico, quando sujeito a certas condições de carregamento, iremos determinar as tensões principais σ_a e σ_b naquele ponto e verificaremos se σ_a e σ_b e a tensão de escoamento σ_c do material satisfazem a alguns dos critérios comumente usados, tais como: o *critério da máxima tensão de cisalhamento* e o *critério da máxima energia da distorção*. Na Sec. 6.8, *critérios de fratura* ou *ruptura* para materiais quebradiços ou frágeis, sujeitos a um estado plano de tensões, serão desenvolvidos de forma similar;

eles envolverão as tensões principais σ_a e σ_b , em algum ponto crítico, e a tensão σ_I do material. Os dois critérios que iremos discutir serão: o *critério da tensão normal máxima* e o *critério de Mohr*.

Os *vasos de pressão de paredes finas* fornecem uma importante aplicação de análise do estado plano de tensões. Na Sec. 6.9, nós discutiremos as tensões, tanto em vasos de pressão cilíndricos, como em esféricos.

Nas Secs. 6.10 e 6.11, iremos discutir as *transformações das deformações específicas planas* e o *círculo de Mohr para deformações planas*. Na Sec. 6.12, consideraremos a análise tridimensional de deformações específicas e veremos que o círculo de Mohr pode também ser usado para determinar a máxima deformação específica de cisalhamento, em um dado ponto. Dois casos particulares têm especial interesse e não poderão ser confundidos: o caso de *estado plano de deformações* e o caso de *estado plano de tensões*.

Finalmente, na Sec. 6.13, discutiremos o uso dos *extensômetros elétricos (strain gages)* para medidas de deformação específica normal, sobre a superfície de um elemento estrutural ou componente de máquina. Veremos que as componentes ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , caracterizando o estado de deformação específica em um certo ponto, podem ser obtidas com os resultados das medidas feitas com três extensômetros, formando uma *roseta de deformação*.

6.2 ESTADO PLANO DE TENSÕES

Vamos adotar que o ponto Q está submetido a um estado plano de tensões (com $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$), que é representado pelas componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} , relativas ao cubo elementar da Fig. 6.5a. Queremos agora determinar as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, referentes ao cubo elementar que foi rodado de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 6.5b), expressando essas componentes em função de σ_x , σ_y , τ_{xy} e θ .

Para determinarmos a tensão normal $\sigma_{x'}$, e a tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$, que atuam na face perpendicular ao eixo x' , vamos considerar o prisma elementar de faces perpendiculares aos eixos x , y e x' (Fig. 6.6a). Chamando de ΔA a área da face inclinada, calculamos as áreas das faces horizontal e vertical por $\Delta A \cos \theta$ e $\Delta A \sin \theta$, respectivamente. Com isso, as forças elementares que atuam nessas faces são aquelas mostradas na Fig. 6.6b. Não ocorrem forças atuando nas faces triangulares do prisma elementar, pois adotamos que as componentes de tensões nessas faces são nulas. Calculando as componentes dessas forças em relação aos eixos x' e y' temos as seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{x'} = 0: \quad & \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta \\ & - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_{y'} = 0: \quad & \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta \\ & - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

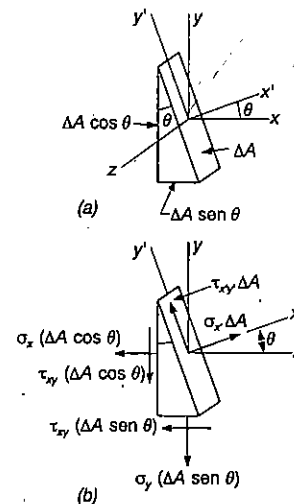


Fig. 6.6

Na primeira equação tiramos o valor de $\sigma_{x'}$, e na segunda o valor de $\tau_{x'y'}$, encontrando

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \tag{6.1}$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tag{6.2}$$

Usando as relações trigonométricas abaixo

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \tag{6.3}$$

e

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{6.4}$$

reescrevemos a Eq. 6.1 da seguinte maneira:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

ou

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6.5)$$

Usando as relações (6.3), reescrevemos a Eq. 6.2 na forma

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6.6)$$

Para encontrarmos a expressão da componente $\sigma_{y'}$, vamos substituir na Eq. 6.5 o ângulo θ por $\theta + 90^\circ$, que é o ângulo formado por y' e x . Como $\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$ e $\sin(2\theta + 180^\circ) = -\sin 2\theta$, temos

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6.7)$$

Somando membro a membro as Eqs. (6.6) e (6.7), obtemos

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad (6.8)$$

Como $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$, verificamos que a soma das tensões normais em um elemento submetido a um estado plano de tensões independe da orientação desse elemento¹.

6.3 TENSÕES PRINCIPAIS; TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA

As Eqs. 6.5 e 6.6 obtidas na seção precedente são as equações paramétricas de uma circunferência. Isso quer dizer que se adotarmos um sistema de eixos coordenados e marcarmos o ponto M de abscissa $\sigma_{x'}$ e ordenada $\tau_{x'y'}$, para qualquer valor do parâmetro θ , vamos sempre obter um ponto que se encontra em uma circunferência. Podemos

¹ Conforme nota da p. 132.

demonstrar essa propriedade eliminando θ entre as Eqs. 6.5 e 6.6; para isso, transpomos para o primeiro membro da Eq. 6.5 o termo $(\sigma_x + \sigma_y)/2$, elevando ao quadrado os dois membros da equação. Em seguida, quadramos os dois membros da Eq. 6.6, somando membro a membro as duas expressões obtidas dessa forma. Vamos ter

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (6.9)$$

Fazendo agora

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.10)$$

escrevemos a identidade (6.9) na forma

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{méd}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (6.11)$$

que é a equação de uma circunferência de raio R com centro no ponto C de abscissa $\sigma_{\text{média}}$ e ordenada 0 (Fig. 6.7). Como a circunferência é simétrica em relação ao eixo horizontal, iríamos obter o mesmo resultado se tivéssemos marcado o ponto N de abscissa $\sigma_{x'}$ e ordenada $-\tau_{x'y'}$ (Fig. 6.8). Usaremos essa propriedade na Sec. 6.4.

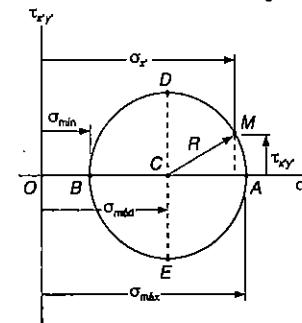


Fig. 6.7

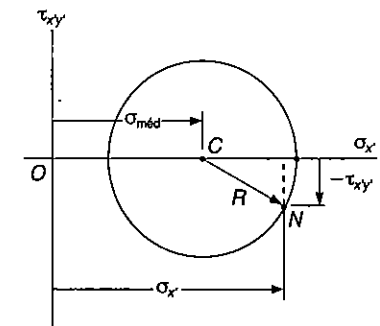


Fig. 6.8

Os pontos *A* e *B* em que a circunferência intercepta o eixo horizontal (Fig. 6.7) tem um interesse especial: o ponto *A* corresponde ao máximo valor da tensão normal σ_x , enquanto o ponto *B* corresponde ao menor valor dessa tensão. Ao mesmo tempo, os dois pontos correspondem a um valor nulo da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$. Desse modo, o valor θ_p do parâmetro θ que corresponde aos pontos *A* e *B* pode ser obtido da Eq. 6.6, fazendo $\tau_{x'y'} = 0$. Escrevemos²

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.12)$$

Essa equação define dois valores $2\theta_p$ com diferença de 180° ou dois valores de θ_p com diferença de 90° . Qualquer um desses valores pode ser usado na determinação da orientação do cubo elementar correspondente (Fig. 6.9). As faces do cubo elementar obtido dessa maneira definem planos chamados *planos principais* no ponto *Q*. As tensões normais $\sigma_{m\acute{a}x}$ e $\sigma_{m\acute{i}n}$ que agem nesses planos são chamadas *tensões principais* no ponto *Q*. O valor de θ_p na Eq. 6.12 foi determinado fazendo-se $\tau_{x'y'} = 0$, donde se conclui que não ocorrem tensões de cisalhamento nos planos principais.

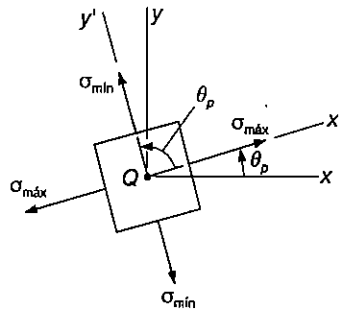


Fig. 6.9

Da Fig. 6.7, observamos que

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_{m\acute{e}d} + R \quad \text{e} \quad \sigma_{m\acute{i}n} = \sigma_{m\acute{e}d} - R \quad (6.13)$$

Com os valores de $\sigma_{m\acute{e}d}$ e R dados pela Eq. 6.10 escrevemos:

² Podemos obter a mesma relação derivando σ_x na Eq. 6.5, e igualando a zero a derivada $d\sigma_x/d\theta = 0$.

$$\sigma_{m\acute{a}x, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.14)$$

Embora seja possível dizer por inspeção qual dos dois planos principais está submetido a $\sigma_{m\acute{a}x}$ e qual está submetido a $\sigma_{m\acute{i}n}$, precisamos substituir um dos valores de θ_p na Eq. 6.5 para determinarmos qual dos dois planos recebe o maior valor de tensão normal.

Analisando novamente o círculo da Fig. 6.7, vemos que os pontos *D* e *E* localizados no diâmetro vertical do círculo correspondem ao maior valor da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$. Os pontos *D* e *E* têm a mesma abscissa $\sigma_{m\acute{e}d} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, e os valores θ_c do parâmetro θ que correspondem a esses pontos podem ser obtidos fazendo-se $\sigma_x = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ na Eq. 6.5. Com isso, a soma dos dois últimos termos da equação deve ser zero. Assim, para $\theta = \theta_c$, escrevemos³

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_c + \tau_{xy} \sin 2\theta_c = 0$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\theta_c = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (6.15)$$

Essa equação define dois valores de $2\theta_c$ com diferença de 180° , e dois valores de θ_c com diferença de 90° . Qualquer um desses valores pode ser usado para a determinação da orientação do elemento que corresponde à tensão de cisalhamento máxima (Fig. 6.10). A Fig. 6.7 mostra que o máximo valor da tensão de cisalhamento é igual ao raio R da circunferência. Lembrando a segunda das Eqs. 6.10 escrevemos

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.16)$$

³ Essa relação também pode ser obtida derivando $\tau_{x'y'}$ na Eq. 6.6, e igualando a zero a derivada $d\tau_{x'y'}/d\theta = 0$.

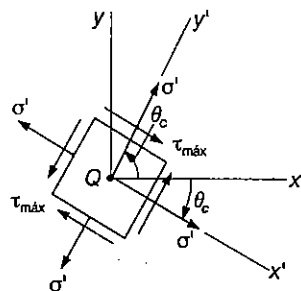


Fig. 6.10

Como já foi dito anteriormente, a tensão normal que corresponde à condição de tensão máxima de cisalhamento é

$$\sigma' = \sigma_{m\acute{e}dia} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (6.17)$$

Comparando as Eqs. 6.12 e 6.15, vemos que a $\text{tg } 2\theta_c$ é o inverso negativo da $\text{tg } 2\theta_p$. Isto quer dizer que os ângulos θ_c e $2\theta_p$ têm diferença de 90° e, portanto, os ângulos θ_c e θ_p são separados de 45° . Assim, os planos de máxima tensão de cisalhamento formam ângulos de 45° com os planos principais. Ficam confirmados os resultados obtidos na Sec. 1.7 para o caso de força axial centrada (Fig. 1.36) e na Sec. 3.4 para o caso de torção (Fig. 3.19).

Devemos estar cientes de que a análise de transformação das tensões no estado plano se limitou ao caso de rotações no plano das tensões. Se o cubo elementar da Fig. 6.5 girar em torno de outro eixo que não o eixo z, suas faces podem ficar sujeitas a tensões de cisalhamento maiores do que aquelas dadas pela Eq. 6.16. Como veremos na Sec. 6.5, isso vai ocorrer quando as tensões principais definidas pelas Eq. 6.14 tiverem o mesmo sinal, sendo ambas de tração ou de compressão. Nesses casos, o valor dado pela Eq. 6.16 é chamado tensão máxima de cisalhamento no plano.

EXEMPLO 6.1

Determinar, para o estado plano de tensões indicado na Fig. 6.11: (a) os planos principais; (b) as tensões principais; (c) a máxima tensão de cisalhamento e a correspondente tensão normal.

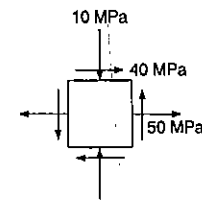


Fig. ex.6.11

(a) **Planos principais.** Adotando a convenção de sinais habitual, exprimimos as componentes de tensão por

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

Substituindo os valores acima na Eq. 6.12, encontramos

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53,1^\circ \quad \text{e} \quad 180^\circ + 53,1^\circ = 233,1^\circ$$

$$\theta_p = 26,6^\circ \quad \text{e} \quad 116,6^\circ$$

(b) **Tensões principais.** A Fórm. 6.14 leva a

$$\sigma_{m\acute{a}x, m\acute{i}n} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa} \quad \sigma_{m\acute{i}n} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Na Fig. 6.12 estão esquematizados os planos principais e as tensões principais. Substituindo $\theta = 26,6^\circ$ na Eq. 6.5 verificamos que a tensão normal da face BC do cubo elementar é a máxima tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53,1^\circ + 40 \text{ sen } 53,1^\circ \\ &= 20 + 30 \cos 53,1^\circ + 40 \text{ sen } 53,1^\circ = 70 \text{ MPa} = \sigma_{m\acute{a}x} \end{aligned}$$

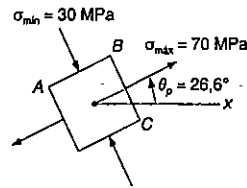


Fig. ex.6.12

(c) Tensão de cisalhamento máxima. A Fórm. 6.16 leva a

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Uma vez que $\sigma_{m\acute{a}x}$ e $\sigma_{m\acute{i}n}$ têm sinais opostos, o valor obtido para $\tau_{m\acute{a}x}$ representa realmente o valor máximo da tensão de cisalhamento no ponto considerado. Para determinarmos o sentido das tensões de cisalhamento e a orientação dos planos de tensão máxima, passamos uma seção ao longo do plano diagonal AC do elemento da Fig. 6.12. As faces AB e BC do cubo elementar estão situadas nos planos principais, de modo que o plano diagonal AC é um dos planos de tensão máxima de cisalhamento (Fig. 6.13). Além disso, as condições de equilíbrio do prisma elementar ABC exigem que a tensão de cisalhamento seja dirigida como indica a figura. A Fig. 6.14 mostra, então, o cubo elementar que corresponde à máxima tensão de cisalhamento. A tensão normal em cada face do cubo elementar é dada pela Eq. 6.17:

$$\sigma' = \sigma_{m\acute{e}d} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

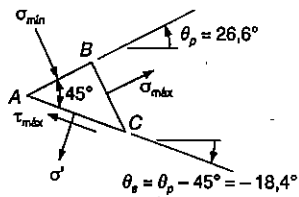


Fig. ex.6.13

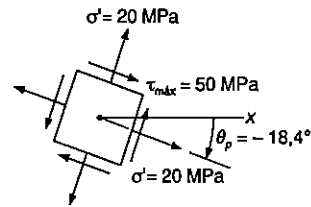
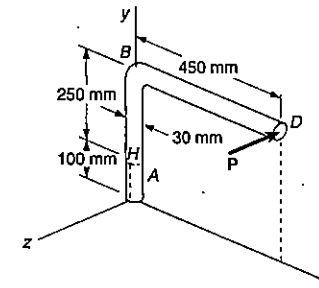


Fig. ex.6.14

PROBLEMA RESOLVIDO 6.1

Uma força horizontal P de 670 N é aplicada à extremidade D da alavanca ABD . Determinar: (a) as tensões normal e de cisalhamento em um cubo elementar situado no ponto H , com lados paralelos aos eixos x e y ; (b) os planos principais e as tensões principais.

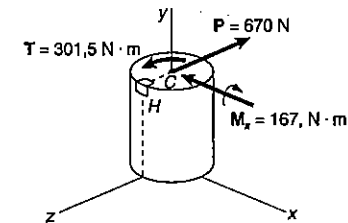


Solução. Substituímos a força P por um sistema de momentos e força cortante aplicado no ponto C , centróide da seção transversal que contém o ponto H .

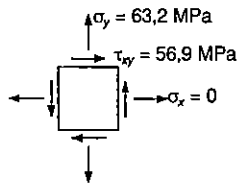
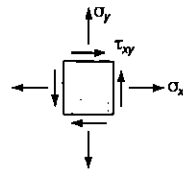
$$P = 670 \text{ N}$$

$$T = (670 \text{ N})(0,45 \text{ m}) = 301,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_x = (670 \text{ N})(0,25 \text{ m}) = 167,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$



(a) **Tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} no ponto H.** Com um exame cuidadoso do sistema de força e momento aplicado em C, determinamos o sentido e o sinal de cada componente de tensão, usando a convenção de sinais indicada na Fig. 6.2.

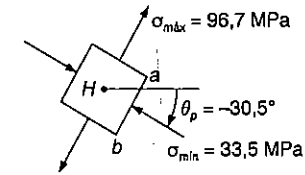


$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = + \frac{Mc}{J} = + \frac{(167,5 \text{ N} \cdot \text{m})(0,015 \text{ m})}{\pi/4 (0,015 \text{ m})^4} \quad \sigma_y = + 63,2 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = + \frac{(301,5 \text{ N} \cdot \text{m})(0,015 \text{ m})}{\pi/2 (0,015 \text{ m})^4} \quad \tau_{xy} = 56,9 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

A força P não provoca tensões de cisalhamento no ponto H.

(b) **Planos principais e tensões principais.** A orientação dos planos principais é encontrada substituindo os valores das componentes de tensões calculadas na Eq. 6.12.



$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(56,9)}{0 - 63,2} = -1,80$$

$$2\theta_p = -61,0^\circ \quad \text{e} \quad 180^\circ - 61,0^\circ = +119^\circ$$

$$\theta_p = -30,5^\circ \quad \text{e} \quad +59,5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Substituindo as componentes de tensões na Eq. 6.14, determinamos as intensidades das tensões principais

$$\begin{aligned} \sigma_{m\acute{a}x, m\acute{i}n} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{0 + 63,2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 63,2}{2}\right)^2 + (56,9)^2} = +31,6 \pm 65,1 \end{aligned}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = +96,7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{m\acute{i}n} = -33,5 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Considerando a face ab do cubo elementar, fazemos $\theta_p = -30,5^\circ$ na Eq. 6.5, encontrando $\sigma_x = -33,5 \text{ MPa}$. Concluímos então que as tensões principais estão aplicadas como indica a figura.

PROBLEMAS

6.1 a 6.4 Para o estado de tensões dado, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, exercidas sobre a face oblíqua do triângulo sombreado do elemento. Usar o método de análise baseado nas equações de equilíbrio deste elemento, tal como foi deduzido na Sec. 6.2.

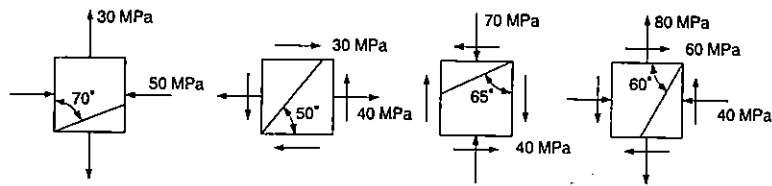


Fig. P6.1 Fig. P6.2 Fig. P6.3 Fig. P6.4

6.5 a 6.8 Para o estado de tensões dado, determinar: (a) os planos principais; (b) as tensões principais.

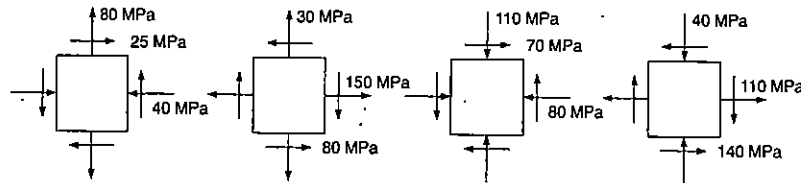


Fig. P6.5 e P6.9 Fig. P6.6 e P6.10 Fig. P6.7 e P6.11 Fig. P6.8 e P6.12

6.9 a 6.12 Para o estado de tensões dado, determinar: (a) a orientação dos planos de máxima tensão de cisalhamento, no plano; (c) a correspondente tensão normal.

6.13 a 6.16 Para o estado de tensões dado, determinar as tensões, normal e de cisalhamento, depois que o elemento mostrado tenha sofrido uma rotação de: (a) 40°, no sentido anti-horário; (b) 15°, no sentido horário.

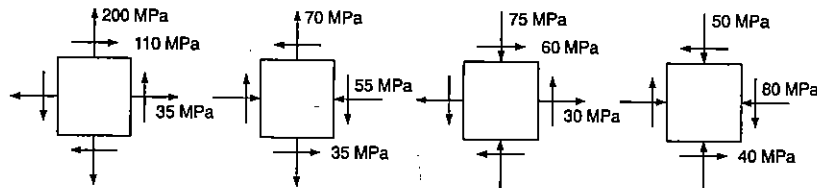


Fig. P6.13 Fig. P6.14 Fig. P6.15 Fig. P6.16

6.17 e 6.18 As fibras de uma peça de madeira formam um ângulo de 18° com a vertical. Para o estado de tensões mostrado, determinar: (a) a tensão de cisalhamento no plano, em um plano paralelo às fibras; (b) a tensão normal perpendicular às fibras.

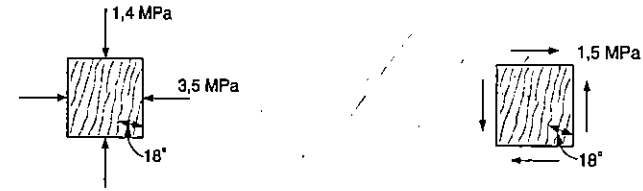


Fig. P6.17 Fig. P6.18

6.19 Duas peças de madeira de 80 x 120 mm, de seção transversal retangular e uniforme, são unidas por simples colagem das seções chanfradas, como mostrado. Sabendo-se que as máximas tensões admissíveis na junta são, respectivamente, de 400 kPa na tração (perpendicular ao chanfro) e de 660 kPa no cisalhamento (paralelo ao chanfro), determinar a maior carga axial P que pode ser aplicada.

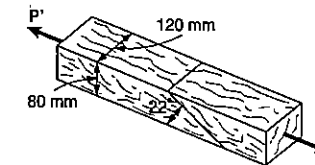


Fig. P6.19

6.20 Um tubo de aço de 300 mm de diâmetro externo é fabricado com chapa fina de 6,35 mm de espessura, soldada ao longo de uma hélice que forma um ângulo de 22,5° com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo-se que uma força axial P de 180 kN e um torque T de 10 kN·m, tal como mostrado, são aplicados no tubo, determinar σ e τ nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda.

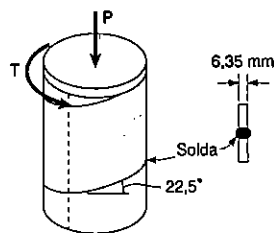


Fig. P6.20

6.21 No eixo de um automóvel atuam as forças e o torque mostrado. Sabendo-se que o diâmetro do eixo é de 30 mm, determinar: (a) os planos principais e as tensões principais no ponto *H*, localizado no cume da superfície do eixo; (b) a máxima tensão de cisalhamento no mesmo ponto.

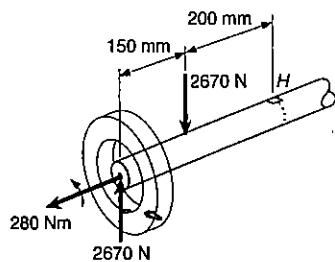


Fig. P6.21

6.22 Várias forças são aplicadas à montagem tubular indicada. Sabendo-se que os diâmetros, interno e externo, do tubo são iguais a 38 mm e 45 mm, respectivamente, determinar: (a) os planos e as tensões principais no ponto *H* localizado no cume da superfície externa do tubo; (b) a máxima tensão de cisalhamento no mesmo ponto.

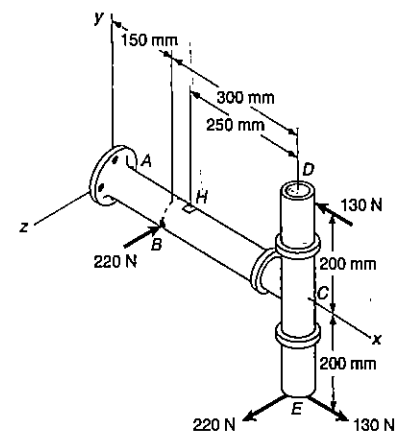


Fig. P6.22

6.23 Uma força de 19,5 kN é aplicada no ponto *D* da barra de ferro fundido mostrada. Sabendo-se que a barra tem um diâmetro de 60 mm, determinar as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no: (a) ponto *H*; (b) ponto *K*.

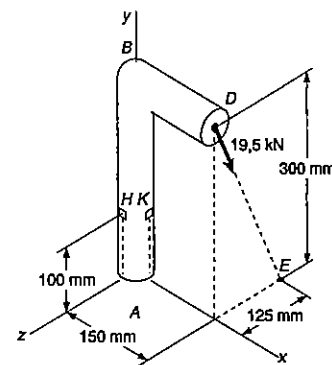


Fig. P6.23

6.24 Duas forças são aplicadas como mostrado na barra AB , que é soldada ao cilindro DE , de diâmetro 50 mm. Considerando que todas as tensões permanecem abaixo do limite de proporcionalidade, determinar as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no: (a) ponto H ; (b) ponto K .

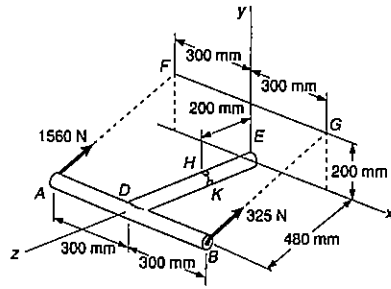


Fig. P6.24

6.25 Três forças são aplicadas, como mostrado, a uma viga em balanço. Determinar a máxima tensão de cisalhamento e a orientação dos planos correspondentes no: (a) ponto H ; (b) ponto K .

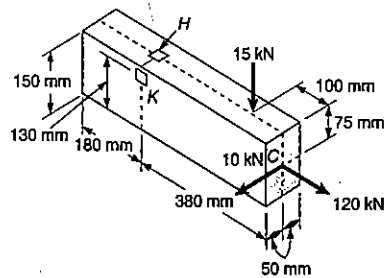


Fig. P6.25

6.26 Sabendo-se que o tubo estrutural mostrado tem uma espessura uniforme de 6,35 mm, determinar, para o carregamento dado, a máxima tensão de cisalhamento e a correspondente orientação dos planos, no: (a) ponto H ; (b) ponto K .

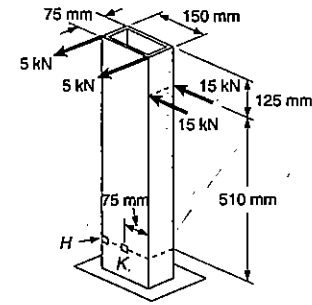


Fig. P6.26

*6.27 Uma força vertical de 18 kN é aplicada na extremidade A da barra AB , que é soldada a um tubo de alumínio extrudado de espessura uniforme de 6 mm. Determinar as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no: (a) ponto H ; (b) ponto K .

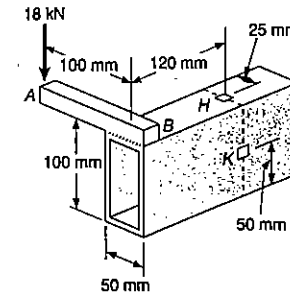


Fig. P6.27

*6.28 Uma força vertical de 4 kN é aplicada no ponto A de um componente de máquina mostrado. Determinar as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no: (a) ponto H ; (b) ponto K .

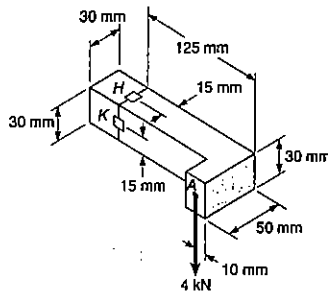


Fig. P6.28

6.4 CÍRCULO DE MOHR PARA O ESTADO PLANO DE TENSÕES

O círculo utilizado na Sec. anterior, para a dedução de algumas relações básicas para a transformação de tensões, foi apresentado pela primeira vez pelo engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918), sendo conhecido como o *círculo de Mohr para o estado plano de tensões*. Como veremos agora, o círculo de Mohr oferece um método alternativo para a solução dos vários problemas da Sec. 6.2 e 6.3. O método se baseia em considerações geométricas simples, não requerendo fórmulas especializadas. Embora tenha sido inicialmente imaginado para soluções gráficas, o método se presta muito bem para soluções com calculadoras.

Consideremos um cubo elementar de um certo material, submetido a um estado plano de tensões (Fig. 6.15a), sendo σ_x , σ_y e τ_{xy} as componentes de tensão exercidas no elemento. Marquemos um ponto X de coordenadas σ_x e $-\tau_{xy}$, e um ponto Y de coordenadas σ_y e $+\tau_{xy}$ (Fig. 6.15b). Se τ_{xy} é positiva, como foi adotado na Fig. 6.15a, o ponto X é marcado abaixo do eixo σ e o ponto Y acima, como indicado na Fig. 6.15b. Se τ_{xy} é negativa, X é localizado acima do eixo σ e Y abaixo desse eixo. Unindo os pontos X e Y por uma linha reta, definimos o ponto C , intersecção da linha XY com o eixo σ . Desenhamos então um círculo de centro C e diâmetro XY . Neste círculo a abscissa do ponto C e o raio são iguais, respectivamente, às quantidades $\sigma_{m\acute{e}dia}$ e R , definidas pelas Eqs. 6.10. Concluímos então que o círculo desenhado é o círculo de Mohr para estado plano de tensões. Assim as abscissas dos pontos A e B , onde o círculo intercepta o eixo σ , representam as tensões principais $\sigma_{m\acute{a}x}$ e $\sigma_{m\acute{i}n}$, respectivamente, para o ponto Q .

Podemos ver também que o ângulo XCA é igual a um dos dois ângulos $2\theta_p$ dados pela Eq. 6.12, uma vez que $\text{tg}(XCA) = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$. O ângulo θ_p , que define na

Fig. 6.15a a orientação do plano principal que corresponde ao ponto A da Fig. 6.15b, pode ser obtido dividindo-se pela metade o ângulo XCA medido no círculo de Mohr. Observamos ainda que se $\sigma_x > \sigma_y$ e $\tau_{xy} > 0$, como no caso em estudo, a rotação para levar CX a coincidir com CA é anti-horária. Mas, nesse caso, o ângulo θ_p obtido pela Eq. 6.12, que define a direção da normal Oa ao plano principal, vai ser positivo. Desse modo, a rotação que leva Ox a coincidir com Oa também é anti-horária. Concluímos que o sentido de rotação das duas partes da Fig. 6.15 são iguais; se é necessária uma rotação anti-horária de valor $2\theta_p$ para fazer coincidir CX com CA no círculo de Mohr, uma rotação anti-horária fará coincidir Ox com Oa na Fig. 6.15a⁴.

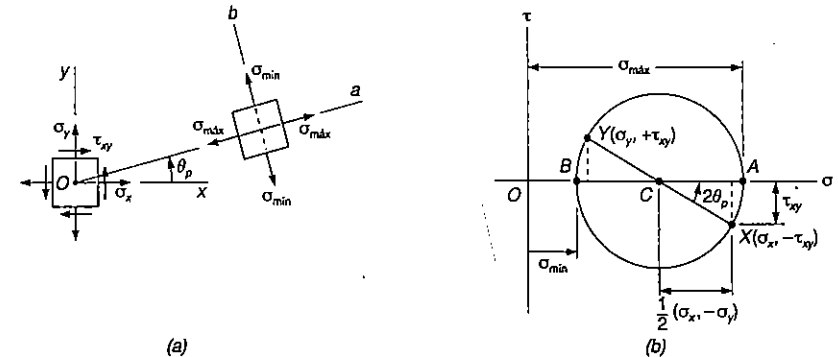


Fig. 6.15

O círculo de Mohr é definido univocamente e o mesmo círculo pode ser obtido considerando as componentes de tensão σ_x , σ_y e $\tau_{x'y'}$, que correspondem aos eixos x' e y' da Fig. 6.16a. O ponto X' de coordenadas σ_x e $-\tau_{x'y'}$, e o ponto Y' de coordenadas σ_y e $+\tau_{x'y'}$ estão então localizados sobre o círculo de Mohr, e o ângulo $X'CA$ da Fig. 6.16b deve ser igual ao dobro do ângulo $x'Oa$ na Fig. 6.16a. Já vimos que o ângulo XCA é o dobro do ângulo xOa , de modo que o ângulo XCX' da Fig. 6.16b é o dobro do ângulo xOx' da Fig. 6.16a. Com isso, o diâmetro $X'Y'$ que define as tensões normais e de cisalhamento σ_x , σ_y e $\tau_{x'y'}$ pode ser obtido pela rotação do diâmetro XY de um ângulo igual ao dobro do ângulo θ formado pelos eixos x e x' (Fig. 6.16a). Notamos que a rotação que leva o diâmetro XY a coincidir com o diâmetro $X'Y'$ na Fig. 6.16b tem o mesmo sentido da rotação que leva os eixos xy a coincidirem com os eixos $x'y'$ na Fig. 6.16a.

⁴ Isto ocorre porque estamos usando o círculo da Fig. 6.8 como círculo de Mohr, e não o círculo da Fig. 6.7.

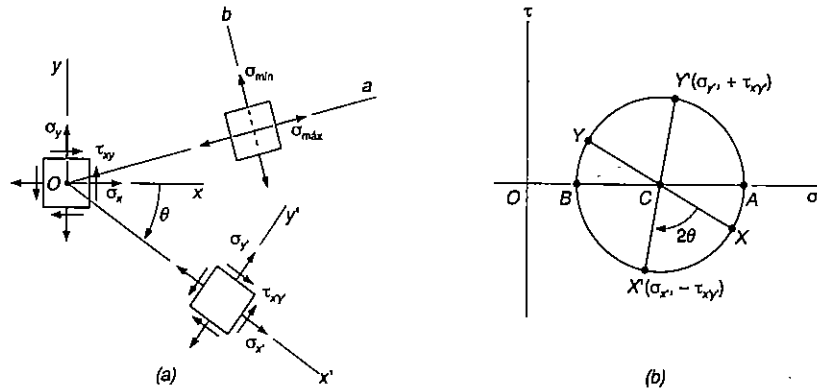


Fig. 6.16

A propriedade que formulamos pode ser usada para verificarmos que os planos de tensão máxima de cisalhamento formam ângulos de 45° com os planos principais. De fato, lembramos que os pontos *D* e *E* do círculo de Mohr correspondem aos planos de tensão máxima de cisalhamento, enquanto os pontos *A* e *B* correspondem aos planos principais (Fig. 6.17*b*). Como os diâmetros *AB* e *DE* do círculo de Mohr estão separados de 90°, as faces dos elementos correspondentes estão formando ângulos de 45° entre si (Fig. 6.17*a*).

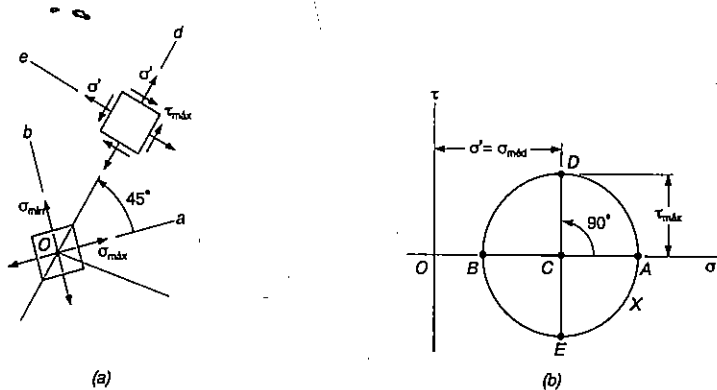


Fig. 6.17

A construção do círculo de Mohr se simplifica muito se considerarmos separadamente cada face do elemento usado na definição dos componentes de tensão. Vemos nas Figs. 6.15 e 6.16 que, quando a tensão de cisalhamento em uma certa face tende a rodar o elemento no sentido horário, o ponto que corresponde a essa face no círculo de Mohr fica *acima* do eixo σ . Quando a tensão de cisalhamento em uma certa face tende a rodar o elemento no sentido anti-horário, o ponto que corresponde a essa face fica localizado *abaixo* do eixo σ (Fig. 6.18). Já para as tensões normais, mantém-se a convenção usual, em que a tensão de tração é positiva, sendo marcada para a direita, e a tensão de compressão é considerada negativa e marcada para a esquerda.

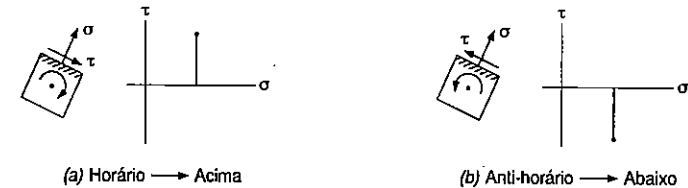


Fig. 6.18

EXEMPLO 6.2

Considerando o estado plano de tensões do Ex. 6.1: (a) construir o círculo de Mohr; (b) determinar as tensões principais; (c) determinar a tensão máxima de cisalhamento e as tensões normais correspondentes.

(a) **Construção do círculo de Mohr.** Notamos na Fig. 6.91*a* que a tensão normal que se exerce na face perpendicular ao eixo *x* é de tração (positiva) e que a tensão de cisalhamento nessa face tende a rodar o elemento no sentido anti-horário. Desse modo, o ponto *X* do círculo de Mohr será marcado à direita do eixo vertical e abaixo do eixo horizontal (Fig. 6.19*b*). Analisando do mesmo modo as tensões normal e de cisalhamento que se exercem na face superior do elemento, vemos que o ponto *Y* deve ser colocado à esquerda do eixo vertical e acima do eixo horizontal. A linha *XY* fornece a posição do centro *C* do círculo de Mohr; a abscissa desse ponto é

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Como os lados do triângulo sombreado valem

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad FX = 40 \text{ MPa}$$

o raio do círculo de Mohr é

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

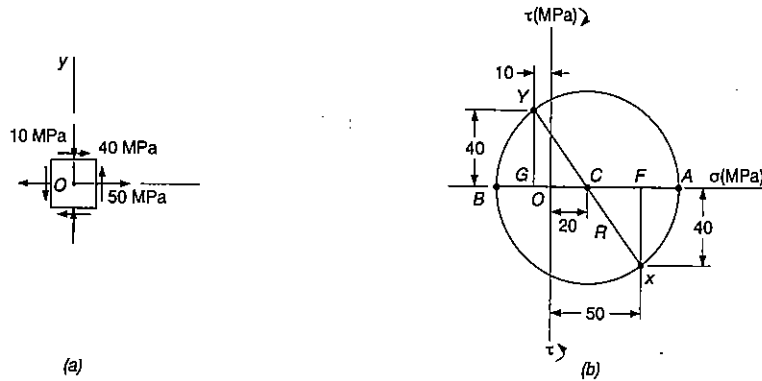


Fig. ex.6.19

(b) Planos principais e tensões principais. As tensões principais são

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Lembrando que o ângulo ACX representa $2\theta_p$ (Fig. 6.19b), podemos escrever

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53,1^\circ \quad \theta_p = 26,6^\circ$$

Como a rotação que leva CX a coincidir com CA na Fig. 6.20b é anti-horária, a rotação que faz Ox coincidir com Oa (correspondente a $\sigma_{\text{máx}}$) na Fig. 6.20a será também anti-horária.

(c) Tensão máxima de cisalhamento. Na Fig. 6.20b, uma rotação adicional de 90° faz coincidir CA com CD, de modo que na Fig. 6.20a uma rotação adicional de 45° levará o eixo Oa a coincidir com Od, que corresponde à máxima tensão de cisalhamento. Podemos ver na Fig. 6.20b que $\tau_{\text{máx}} = R = 50 \text{ MPa}$ e que a tensão normal correspondente é $\sigma' = \sigma_{\text{média}} = 20 \text{ MPa}$. O ponto D se localiza acima do eixo σ (Fig.

6.20b), de modo que as tensões de cisalhamento que se exercem nas faces perpendiculares a Od (Fig. 6.20a) devem ser dirigidas de modo a fazer rodar o elemento no sentido horário.

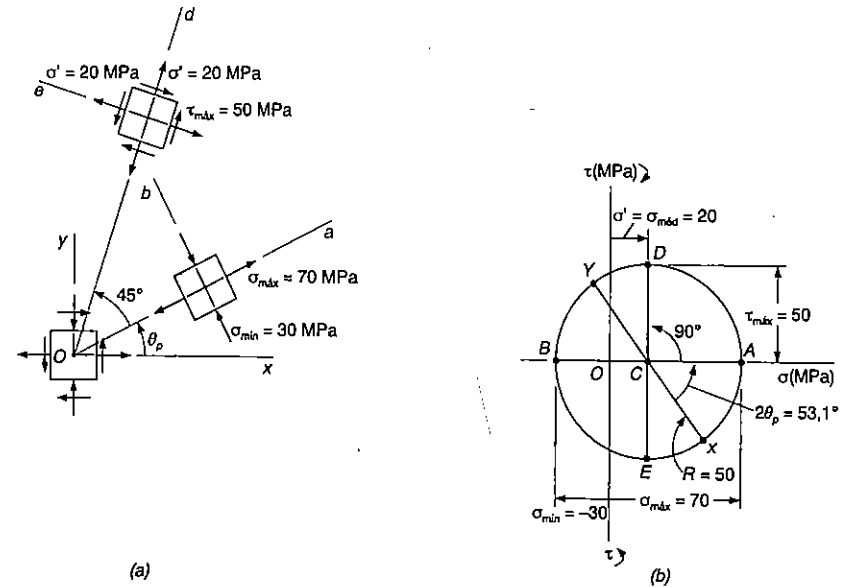


Fig. ex.6.20

O círculo de Mohr fornece um modo conveniente de verificação dos resultados obtidos anteriormente para as tensões provocadas por carregamento axial centrado (Sec. 1.8) e provocadas por carregamento torcional (Sec. 3.4). No primeiro caso (Fig. 6.21a), temos $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ e $\tau_{xy} = 0$. Os pontos correspondentes a essas tensões, X e Y, definem um círculo de raio $R = P/2A$ que passa pela origem do sistema coordenado (Fig. 6.21b). Os pontos D e E levam à orientação do plano de tensão de cisalhamento máxima (Fig. 6.21c), bem como ao valor de $\tau_{\text{máx}}$ e ao valor da tensão normal correspondente σ' :

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \tag{6.18}$$

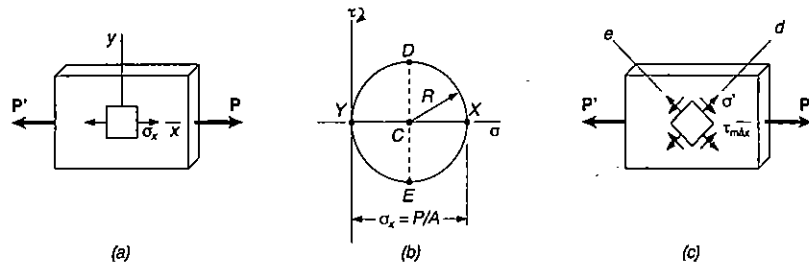


Fig. 6.21 Círculo de Mohr para carga axial centrada.

No caso da torção (Fig. 6.22a), temos $\sigma_x = \sigma_y = 0$ e $\tau_{xy} = \tau_{máx} = Tc/J$. Como resultado, os pontos X e Y se localizarão no eixo τ , e o círculo de Mohr se torna um círculo de raio $R = Tc/J$ com centro na origem (Fig. 6.22b). Os pontos A e B definem os planos principais (Fig. 6.22c) e as tensões principais:

$$\sigma_{máx, mfn} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \quad (6.19)$$

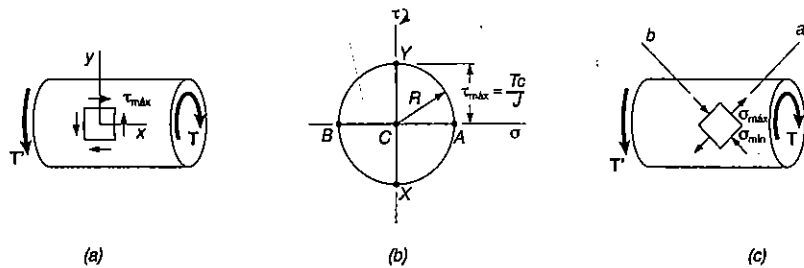
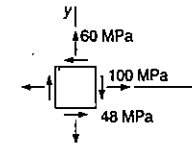


Fig. 6.22 Círculo de Mohr para carregamento de torção.

PROBLEMA RESOLVIDO 6.2

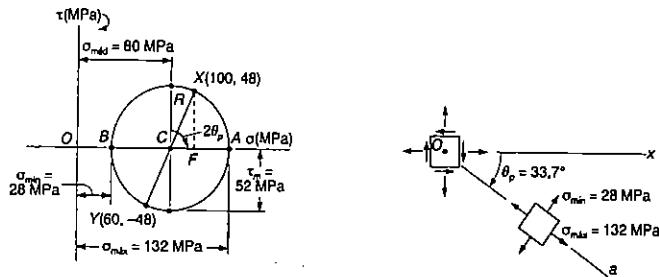
Determinar, para o estado plano de tensões indicado: (a) os planos principais e as tensões principais; (b) as componentes de tensões que se exercem no elemento obtido rodando-se o elemento dado de 30° , no sentido anti-horário.



Construção do círculo de Mohr. A figura indica uma tensão normal de tração na face perpendicular ao eixo x , ao mesmo tempo que mostra a tensão de cisalhamento nessa face provocando uma rotação do elemento no sentido horário; marcamos o ponto X a 100 unidades à direita do eixo vertical e a 48 unidades acima do eixo horizontal. Do mesmo modo, analisando as componentes de tensão na face superior do elemento, marcamos o ponto $Y(60, -48)$. Unindo os pontos X e Y por uma linha reta, localizamos o centro C do círculo de Mohr. A abscissa desse ponto, que representa $\sigma_{méd}$, e o raio do círculo, R , podem ser medidos diretamente ou calculados como segue:

$$\sigma_{méd} = OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$



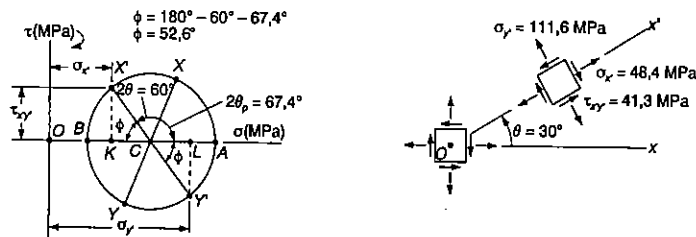
(a) Planos principais e tensões principais. Rodamos o diâmetro XY no sentido horário de um ângulo $2\theta_p$, até que ele coincida com o diâmetro AB

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2,4 \quad 2\theta_p = 67,4^\circ \quad \theta_p = 33,7^\circ \quad \blacktriangleleft$$

As tensões principais são representadas pelas abscissas dos pontos A e B

$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 80 + 52 \quad \sigma_{\max} = +132 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 80 - 52 \quad \sigma_{\min} = +28 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



A rotação que fez coincidir XY com AB foi no sentido horário; a rotação que leva o eixo Ox a coincidir com o eixo Ox' (correspondente à tensão σ_{\max}) também é no sentido horário. Obtemos assim a orientação indicada na figura para os planos principais.

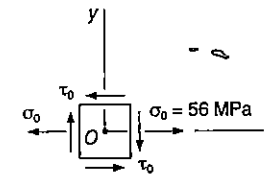
(b) Componentes de tensão no elemento rodado de 30° no sentido anti-horário. Quando giramos o diâmetro XY no sentido anti-horário de $2\theta = 60^\circ$ no círculo de Mohr, encontramos os pontos X' e Y' , que correspondem às tensões no elemento girado de 30° . Temos

$$\begin{aligned} \phi &= 180^\circ - 60^\circ - 67,4^\circ & \phi &= 52,6^\circ \quad \blacktriangleleft \\ \sigma_{x'} &= OK = OC - KC = 80 - (52) \cos 52,6^\circ & \sigma_{x'} &= +48,4 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft \\ \sigma_{y'} &= OL = OC + CL = 80 + (52) \cos 52,6^\circ & \sigma_{y'} &= +111,6 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft \\ \tau_{x'y'} &= KX' = (52) \operatorname{sen} 52,6^\circ & \tau_{x'y'} &= 41,3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Uma vez que X' se localiza acima do eixo horizontal, a tensão de cisalhamento na face perpendicular a Ox' tende a rodar o elemento no sentido horário.

PROBLEMA RESOLVIDO 6.3

Um estado plano de tensões consiste de uma tensão de tração $\sigma_0 = 56 \text{ MPa}$ atuando em faces verticais onde são desconhecidas as tensões de cisalhamento. Determinar: (a) a intensidade da tensão de cisalhamento τ_0 que corresponde à tensão normal de 56 MPa ; (b) a tensão máxima de cisalhamento. (A tensão de 70 MPa é a tensão normal máxima.)



Construção do círculo de Mohr. Vamos assumir que o sentido das tensões de cisalhamento é o indicado. Assim, a tensão de cisalhamento τ_0 tende a rodar o elemento no sentido horário (em uma face perpendicular ao eixo x), e podemos marcar o ponto X de coordenadas 56 MPa e τ_0 acima do eixo horizontal. Analisando uma face horizontal do elemento, vemos que $\sigma_y = 0$, e que τ_0 tende a rodar o elemento no sentido anti-horário; desse modo, marcamos o ponto Y a uma distância de τ_0 abaixo do ponto O.

Vemos que a abscissa do centro C do círculo de Mohr vale

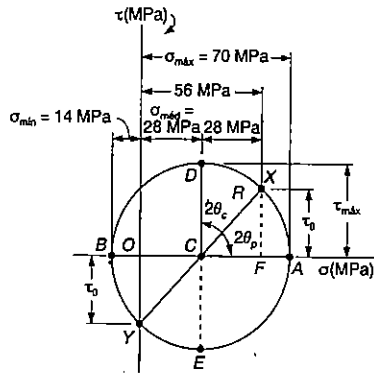
$$\sigma_{m\acute{e}dia} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(56 + 0) = 28 \text{ MPa}$$

A máxima tensão normal é representada pela abscissa do ponto A . Como $\sigma_{m\acute{a}x} = 70 \text{ MPa}$, obtemos o raio R do círculo:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_{m\acute{e}dia} + R$$

$$70 \text{ MPa} = 28 \text{ MPa} + R$$

$$R = 42 \text{ MPa}$$



(a) **Tensão de cisalhamento τ_0 .** Analisando o triângulo retângulo CFX , encontramos

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{28 \text{ MPa}}{42 \text{ MPa}} \quad 2\theta_p = 48,2^\circ \quad \theta_p = 24,1^\circ$$

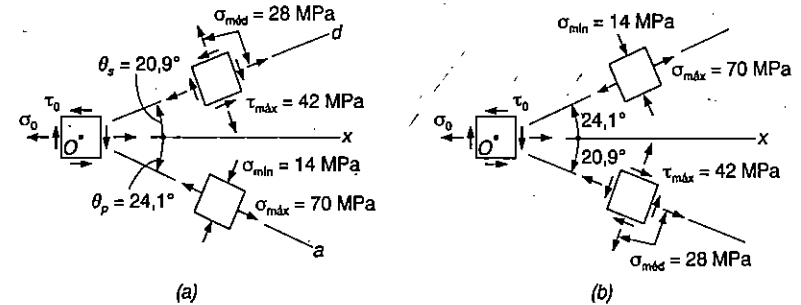
$$\tau_0 = FX = R \text{ sen } 2\theta_p = (42 \text{ MPa}) \text{ sen } 48,2^\circ \quad \tau_0 = 31,3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Tensão máxima de cisalhamento.** As coordenadas do ponto D do círculo de Mohr representam a tensão máxima de cisalhamento e a tensão normal correspondente.

$$\tau_{m\acute{a}x} = R = 42 \text{ MPa} \quad \tau_{m\acute{a}x} = 42 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$2\theta_c = 90^\circ - 2\theta_p = 90^\circ - 48,2^\circ = 41,8^\circ \quad \theta_c = 20,9^\circ$$

A tensão de cisalhamento máxima se exerce em um elemento orientado como indica a Fig. a (A figura também indica o elemento em que agem as tensões principais.)



Nota. Se adotássemos inicialmente outro sentido para a tensão τ_0 , encontraríamos o mesmo círculo e as mesmas respostas, porém a orientação dos elementos seria aquela indicada pela Fig. b .

PROBLEMAS

- 6.29 Resolver os Probs. 6.5 a 6.9, usando o círculo de Mohr.
- 6.30 Resolver os Probs. 6.6 a 6.10, usando o círculo de Mohr.
- 6.31 Resolver os Probs. 6.7 a 6.11, usando o círculo de Mohr.
- 6.32 Resolver os Probs. 6.8 a 6.12, usando o círculo de Mohr.
- 6.33 Resolver o Prob. 6.13, usando o círculo de Mohr.
- 6.34 Resolver o Prob. 6.14, usando o círculo de Mohr.
- 6.35 Resolver o Prob. 6.15, usando o círculo de Mohr.
- 6.36 Resolver o Prob. 6.16, usando o círculo de Mohr.
- 6.37 Resolver o Prob. 6.17, usando o círculo de Mohr.
- 6.38 Resolver o Prob. 6.18, usando o círculo de Mohr.
- 6.39 Resolver o Prob. 6.19, usando o círculo de Mohr.
- 6.40 Resolver o Prob. 6.20, usando o círculo de Mohr.
- 6.41 Resolver o Prob. 6.21, usando o círculo de Mohr.

- 6.42 Resolver o Prob. 6.22, usando o círculo de Mohr.
- 6.43 Resolver o Prob. 6.23, usando o círculo de Mohr.
- 6.44 Resolver o Prob. 6.24, usando o círculo de Mohr.
- 6.45 Resolver o Prob. 6.25, usando o círculo de Mohr.
- 6.46 Resolver o Prob. 6.26, usando o círculo de Mohr.
- 6.47 a 6.50 Determinar os planos principais e as tensões principais para o estado plano de tensões, resultante da superposição dos dois estados planos de tensões mostrado.

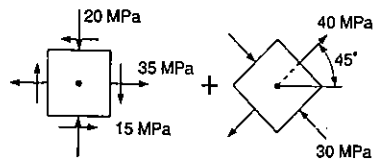


Fig. P6.47

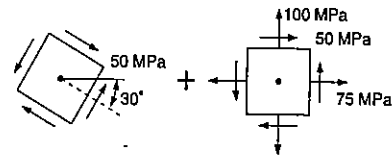


Fig. P6.48

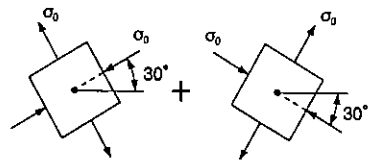


Fig. P6.49

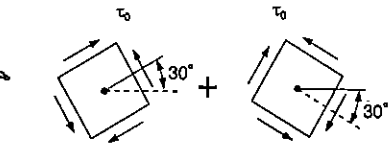


Fig. P6.50

- 6.51 Resolver o Prob. 6.50, considerando que no segundo estado plano de tensões indicado todas as tensões são substituídas por tensões iguais e opostas.
- 6.52 Resolver o Prob. 6.49, considerando que no segundo estado plano de tensões indicado todas as tensões são substituídas por tensões iguais e opostas.
- 6.53 Para o elemento mostrado, determinar a variação de τ_{xy} para que a máxima tensão de tração seja igual ou inferior que 75 MPa.

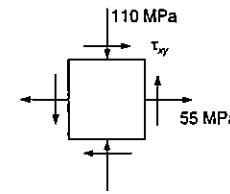


Fig. P6.53 e P6.54

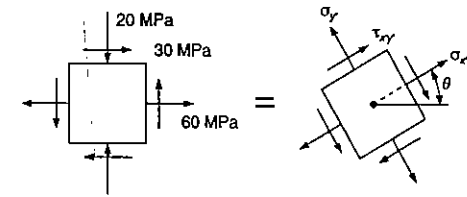


Fig. 6.55 e P6.56

- 6.54 Para o elemento mostrado, determinar a variação de τ_{xy} para que a maior tensão de cisalhamento seja igual ou inferior que 140 MPa.
- 6.55 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar a variação dos valores de θ , para que a intensidade de tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ seja igual ou inferior que 45 MPa.
- 6.56 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar a variação dos valores de θ para que a tensão normal σ_x seja igual ou inferior a + 65 MPa.
- 6.57 Para um estado plano de tensões é conhecido que as tensões, normal e de cisalhamento, são dirigidas como indicado e que $\sigma_x = 90$ MPa, $\sigma_y = 45$ MPa e $\sigma_{mín} = 30$ MPa. Determinar: (a) a orientação dos planos principais; (b) a tensão principal $\sigma_{máx}$; (c) a máxima tensão de cisalhamento, no plano.
- 6.58 Para um estado plano de tensões é conhecido que as tensões, normal e de cisalhamento, são dirigidas como indicado e que $\sigma_x = 30$ MPa, $\sigma_y = 80$ MPa e $\sigma_{máx} = 120$ MPa. Determinar: (a) a orientação dos planos principais; (b) a tensão principal $\sigma_{mín}$; (c) a tensão de cisalhamento máxima, no plano.

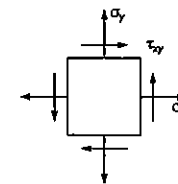


Fig. P6.57 e P6.58

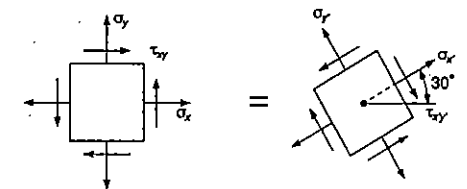


Fig. P6.59 e P6.60

- 6.59 Para um estado plano de tensões é conhecido que, para cada uma das duas orientações indicadas para os eixos coordenados, as tensões, normal e de cisalhamento,

to, são dirigidas como mostrado, e as intensidades das tensões normais σ_x , σ_y e σ_z , são respectivamente iguais a 80 MPa, 30 MPa e 75 MPa. Determinar: (a) os planos e as tensões principais; (b) a tensão de cisalhamento máxima, no plano.

6.60 Para um estado plano de tensões é conhecido que, para cada uma das duas orientações indicadas para os eixos coordenados, as tensões, normal e de cisalhamento, são dirigidas como mostrado, e as intensidades das tensões normais σ_x , σ_y e σ_x' são, respectivamente, iguais a 70 MPa, 15 MPa e 80 MPa. Determinar: (a) os planos e as tensões principais; (b) a tensão de cisalhamento máxima, no plano.

6.61 (a) Prove que a expressão $\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2$, onde σ_x , σ_y e τ_{xy} são as componentes da tensão ao longo dos eixos retangulares x' e y' , independe da orientação destes eixos. Também mostre que a referida expressão representa o quadrado da tangente, traçada a partir do sistema de coordenadas do círculo de Mohr. (b) Usando a propriedade invariante estabelecida na parte a, expressar a tensão de cisalhamento τ_{xy} em termos de σ_x , σ_y e das tensões principais $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$.

***6.62** Resolver o Prob. 6.28, usando o círculo de Mohr.

***6.63** Resolver o Prob. 6.27, usando o círculo de Mohr.

6.5 ESTADO MAIS GERAL DE TENSÕES

Nas seções precedentes, analisamos um estado plano de tensões onde $\sigma_x = \tau_{xx} = \tau_{xy} = 0$, e consideramos unicamente transformações de tensões relacionadas com uma rotação em torno do eixo z. Vamos considerar agora o estado mais geral de tensões representadas na Fig. 6.1a e a transformação de tensões associadas a uma rotação de eixos como indica a Fig. 6.1b. Vamos, no entanto, limitar a nossa análise à determinação da *tensão normal* σ_n que atua em um plano de orientação genérica.

Consideremos o tetraedro indicado na Fig. 6.23. Ele tem três de suas faces paralelas aos planos coordenados, enquanto sua quarta face, ABC , é perpendicular à reta QN . Chamando de ΔA à área da face ABC , e de λ_x , λ_y e λ_z aos cossenos diretores da reta QN , encontramos os valores das áreas das faces perpendiculares aos eixos x , y e z , que são respectivamente $(\Delta A)\lambda_x$, $(\Delta A)\lambda_y$, e $(\Delta A)\lambda_z$. Se o estado de tensão no ponto Q está definido pelas componentes de tensão σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} , podemos obter as forças que se exercem nas faces paralelas aos planos coordenados multiplicando as componentes de tensão apropriadas pela área de cada face (Fig. 6.24). Além disso, na face ABC age uma força normal de intensidade $\sigma_n \cdot \Delta A$, dirigida segundo QN , e uma força cortante de intensidade $\tau \cdot \Delta A$ e de direção desconhecida, embora se saiba que é perpendicular a QN . As faces QBC , QCA e QAB estão voltadas em direção contrária à orientação dos eixos x , y e z . Desse modo, as forças que atuam nessas faces devem ser indicadas com sentido negativo.

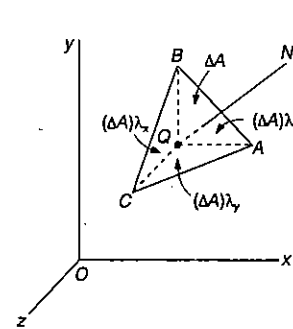


Fig. 6.23

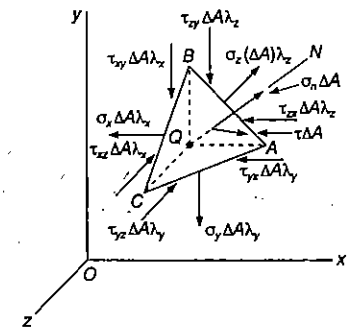


Fig. 6.24

Vamos agora caracterizar o equilíbrio do tetraedro, igualando a zero a soma das componentes de todas as forças na direção QN . A componente, na direção de QN , de uma força paralela a x , é obtida multiplicando-se a intensidade da força pelo cosseno diretor λ_x e as componentes, na direção de QN , de forças paralelas aos eixos y e z , se obtêm da mesma maneira, com os cossenos diretores λ_y e λ_z . Escrevemos

$$\Sigma F_n = 0: \quad \begin{aligned} &\sigma_n \Delta A - (\sigma_x \Delta A \lambda_x) \lambda_x - (\tau_{xy} \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\tau_{xz} \Delta A \lambda_z) \lambda_z \\ &- (\tau_{xy} \Delta A \lambda_y) \lambda_x - (\sigma_y \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\tau_{yz} \Delta A \lambda_z) \lambda_z \\ &- (\tau_{xz} \Delta A \lambda_z) \lambda_x - (\tau_{zy} \Delta A \lambda_z) \lambda_y - (\sigma_z \Delta A \lambda_z) \lambda_z = 0 \end{aligned}$$

Dividindo a expressão por ΔA e isolando τ_n no primeiro membro:

$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z + 2\tau_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (6.20)$$

Vemos que a expressão acima é uma forma quadrática em λ_x , λ_y e λ_z . Podemos então escolher três eixos coordenados de modo que o segundo membro da Eq. 6.20 se reduza aos três termos contendo os quadrados dos cossenos diretores⁵. Chamemos esses três eixos de a , b e c , as tensões normais correspondentes de σ_a , σ_b e σ_c , e os cossenos diretores de QN em relação a esses eixos de λ_a , λ_b e λ_c . Temos então

$$\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2 \quad (6.21)$$

⁵ Na Sec. 9.16 de *Mecânica Vetorial para Engenheiros* de F. P. Beer e E. R. Johnston, McGraw-Hill, 1994, encontra-se uma forma quadrática similar que traduz o momento de inércia de um sólido rígido em relação a um eixo genérico. Mostra-se que essa forma está associada a uma *superfície quadrática*, e que transformar-se forma quadrática em termos que contenham só os quadrados dos cossenos diretores, é o mesmo que determinar-se os eixos principais da superfície.

Os eixos a , b e c são denominados de *eixos principais de tensão*. Como sua orientação depende do estado de tensões em Q , e, por isso, da localização do ponto Q , eles são representados na Fig. 6.25 ligados diretamente a Q . Os planos coordenados formados pelos três eixos são chamados *planos principais de tensão*, e as tensões normais σ_a , σ_b e σ_c são chamadas *tensões principais* no ponto Q ⁶.

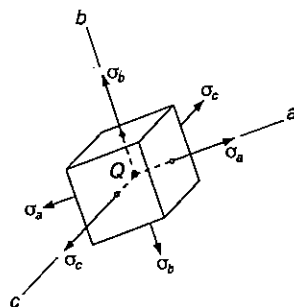


Fig. 6.25

6.6 APLICAÇÃO DO CÍRCULO DE MOHR À ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE TENSÕES

Se o elemento da Fig. 6.25 rodar em torno de um dos eixos principais no ponto Q , por exemplo, o eixo c (Fig. 6.26), a transformação de tensões correspondente pode ser estudada pelo círculo de Mohr, como se fosse uma transformação em estado plano de tensões. Realmente, as tensões de cisalhamento que se exercem nas faces perpendiculares ao eixo c permanecem iguais a zero, enquanto a tensão normal σ_c , sendo perpendicular ao plano ab , não influi na transformação. Podemos então formar o círculo de diâmetro AB para determinarmos as tensões normal e de cisalhamento que atuam nas faces do elemento, quando este gira em torno do eixo c (Fig. 6.27). Do mesmo modo, os círculos de diâmetro BC e CA podem ser usados na determinação das tensões do elemento, quando este gira em torno dos eixos a e b , respectivamente. Nossa análise se limita às rotações em torno dos eixos principais, mas pode ser demonstrado que qualquer outra rotação dos eixos leva a tensões que ficam representadas na Fig. 6.27

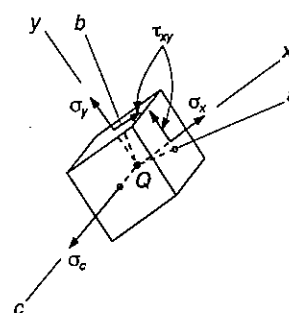


Fig. 6.26

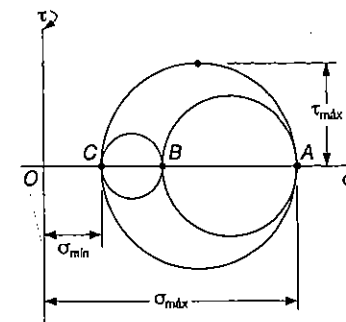


Fig. 6.27

por pontos localizados dentro da área sombreada. Desse modo, o raio do maior dos três círculos dá o valor da tensão de cisalhamento máxima no ponto Q . Como no caso do estado plano de tensões, podemos escrever

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} |\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}| \quad (6.22)$$

onde $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$ representam os valores *algebricos* das tensões máxima e mínima no ponto Q .

Voltemos agora ao caso particular do estado plano de tensões discutido nas Secs. 6.2 a 6.4. Vimos que, colocando os eixos x e y no plano de tensões, teremos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Isso significa que o eixo z , perpendicular ao plano das tensões, é um dos três eixos principais de tensão. Em um diagrama de círculo de Mohr, esse eixo vai corresponder à origem O , onde $\sigma = \tau = 0$. Os outros dois eixos principais vão corresponder aos pontos A e B , onde o círculo de Mohr desenhado para o plano xy intercepta o eixo σ .

Se os pontos A e B ficam situados em lados opostos em relação à origem O (Fig. 6.28), as tensões principais correspondentes representam a tensão normal máxima e a tensão mínima em Q , e a tensão de cisalhamento máxima é igual à tensão de cisalhamento máxima do estado plano. Como vimos na Sec. 6.3, os planos de tensão de cisalhamento máxima, que correspondem aos pontos D e E do círculo de Mohr, formam ângulo de 45° com os planos principais, que correspondem aos pontos A e B . As Figs. 6.29a e b representam os planos de tensão máxima de cisalhamento, que são os planos sombreados indicados.

⁶ Para uma análise da determinação dos planos principais e das tensões principais, v. S. P. Timoshenko e J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3ª ed., Nova Iorque, McGraw-Hill Book Co., 1970, Sec. 77.

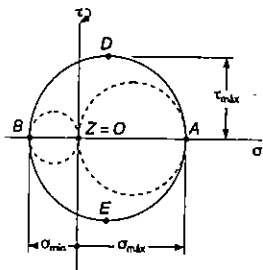


Fig. 6.28

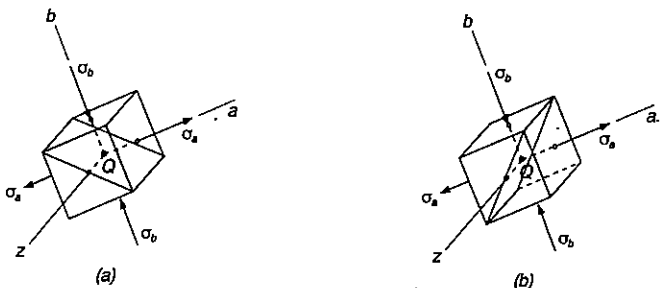


Fig. 6.29

Se, por outro lado, A e B estão situados do mesmo lado do ponto O , isto é, se σ_a e σ_b têm o mesmo sinal, então o círculo que define $\sigma_{máx}$, $\sigma_{mín}$ e $\tau_{máx}$ não é o círculo que corresponde a uma transformação no plano xy . Se $\sigma_a > \sigma_b > 0$, como adotado na Fig. 6.30, vamos ter $\sigma_{máx} = \sigma_a$, $\sigma_{mín} = 0$ e $\tau_{máx} = 1/2 \sigma_{máx}$. Vemos que as normais Qd' e Qe' aos planos de tensão de cisalhamento máxima são obtidas pela rotação do eixo Qa de um ângulo de 45° no plano za . As Figs. 6.31a e b representam os planos de tensão máxima de cisalhamento, que são os planos sombreados.

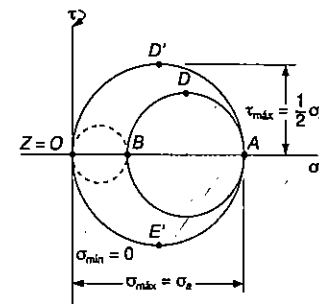


Fig. 6.30

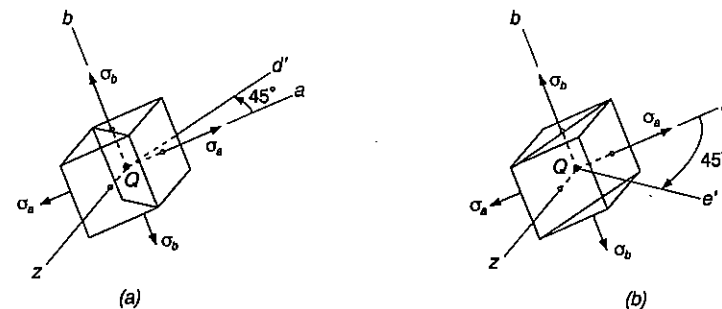


Fig. 6.31

EXEMPLO 6.3

Determinar, para o estado de tensões indicado na Fig. 6.32: (a) os três planos principais e as tensões principais; (b) a tensão de cisalhamento máxima.

(a) **Planos principais e tensões principais.** Construímos o círculo de Mohr para a transformação de tensões no plano xy (Fig. 6.33). O ponto X é marcado 24 unidades à direita do eixo vertical e 12 unidades acima do eixo horizontal (pois a tensão de cisalhamento correspondente tende a rodar o elemento no sentido horário). O ponto Y é marcado 14 unidades à direita do eixo vertical e 12 unidades abaixo do eixo horizontal. Obtemos o centro C do círculo de Mohr desenhando a linha XY ; sua abscissa é:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{24 + 14}{2} = 19 \text{ MPa}$$

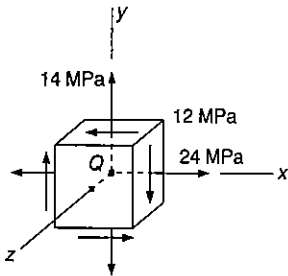


Fig. ex.6.32

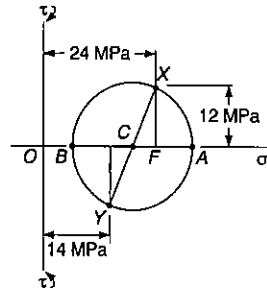


Fig. ex.6.33

Os lados do triângulo retângulo CFX são $CF = 24 - 19 = 5 \text{ MPa}$ e $FX = 12 \text{ MPa}$; o raio do círculo é

$$R = CX = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13 \text{ MPa}$$

As tensões principais no plano das tensões são

$$\sigma_a = OA = OC + CA = 19 + 13 = 32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = OB = OC - BC = 19 - 13 = 6 \text{ MPa}$$

As faces do elemento que são perpendiculares ao eixo z estão isentas de tensões, de modo que elas definem um dos planos principais, com sua tensão principal correspondente $\sigma_z = 0$. Os dois planos principais restantes são definidos pelos pontos A e B do círculo de Mohr. O ângulo θ_p , segundo o qual o elemento deve ser girado, de forma a fazer coincidir suas faces com os planos principais, é metade do ângulo ACX (Fig. 6.34). Temos

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{12}{5}$$

$$2\theta_p = 67,4^\circ$$

$$\theta_p = 33,7^\circ$$

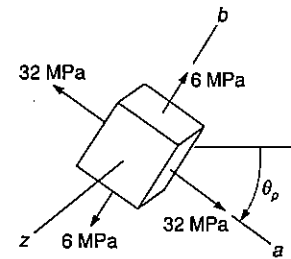


Fig. ex.6.34

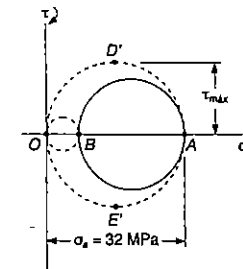


Fig. ex.6.35

(b) **Tensão máxima de cisalhamento.** A Fig. 6.35 indica os círculos de diâmetro OB e OA , que correspondem a rotações do elemento em torno dos eixos a e b , respectivamente. Podemos ver que a tensão máxima de cisalhamento é igual ao raio do círculo de diâmetro OA . Temos então

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_a = \frac{1}{2} (32 \text{ MPa}) = 16 \text{ MPa}$$

Os pontos D' e E' que definem os planos de máxima tensão de cisalhamento são localizados nas extremidades do diâmetro vertical do círculo que corresponde a rotações em torno do eixo b . Desse modo, as faces do elemento da Fig. 6.34 podem ser levadas a coincidir com os planos de tensão máxima de cisalhamento através de uma rotação de 45° em torno de b .

*6.7 CRITÉRIOS DE RUPTURA PARA MATERIAIS DÚTEIS EM ESTADO PLANO DE TENSÕES

Os elementos estruturais e os componentes de máquinas são projetados de modo que o material que os compõem, sendo material dútil, não venha a escoar pela ação dos carregamentos esperados. Quando o elemento ou componente está sob ação de estado uniaxial de tensão (Fig. 6.36), o valor da tensão normal σ_x que vai provocar escoamento do material pode ser obtido imediatamente de um ensaio de tração executado em corpo de prova do mesmo material, uma vez que o elemento ou componente e o corpo de prova estão sob o mesmo tipo de sollicitação, e sob o mesmo estado de tensões. Assim, mesmo não levando em conta os mecanismos reais que levam o material ao escoamento, podemos estabelecer que a peça estrutural está segura enquanto $\sigma_x < \sigma_e$, onde σ_e é a tensão de escoamento do material no teste de tração.

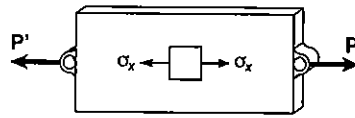


Fig. 6.36

Por outro lado, quando o elemento estrutural ou componente de máquina está submetido a estado plano de tensões (Fig. 6.37a), é conveniente usar-se um dos métodos já apresentados para a determinação das tensões principais σ_a e σ_b em um certo ponto (Fig. 6.37b). Podemos considerar o material como estando sujeito a um estado biaxial de tensões naquele ponto. Esse estado de tensões é diferente do estado uniaxial de tensão em que se encontra o corpo de provas do ensaio de tração. Desse modo, não é possível prever diretamente desse ensaio se o material que compõe o elemento estrutural em estudo vai se romper ou não. É necessário, antes disso, estabelecer algum critério que leve em conta o real mecanismo de ruptura do material, que permita comparar os efeitos dos dois estados de tensões a que está sujeito o material. O objetivo desta seção é apresentar os dois critérios de ruptura mais freqüentemente usados para materiais dúteis.

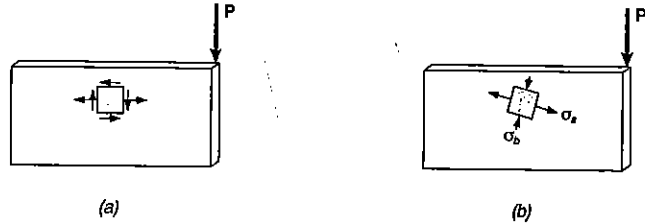


Fig. 6.37

Critério da máxima tensão de cisalhamento. Este critério se baseia no fato de que o escoamento dos materiais dúteis é causado por deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas, deslizamento devido principalmente a tensões cisalhantes (conf. Sec. 2.3). Por este critério, um elemento estrutural é considerado seguro enquanto a tensão máxima de cisalhamento $\tau_{m\acute{a}x}$ no elemento não exceder a tensão de cisalhamento correspondente a um corpo de prova do mesmo material, que escoã em ensaio de tração.

Lembramos através da Sec. 1.7 que a tensão de cisalhamento máxima no caso de carga axial centrada é igual à metade do valor da tensão normal correspondente. Concluímos então que a tensão de cisalhamento máxima em um corpo de prova em

ensaio de tração é $\frac{1}{2} \sigma_e$, no instante em que o material inicia o escoamento. Lembramos também da Sec. 6.6 que, para o estado plano de tensões, o valor $\tau_{m\acute{a}x}$ da tensão de cisalhamento é igual a $\frac{1}{2} |\sigma_{m\acute{a}x}|$ se as tensões principais são ambas positivas ou negativas, e igual a $\frac{1}{2} |\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}|$ se a tensão máxima é positiva e a tensão mínima é negativa. Desse modo, se as tensões principais σ_a e σ_b têm o mesmo sinal, o critério da máxima tensão de cisalhamento nos leva a

$$|\sigma_a| < \sigma_e \quad / \quad |\sigma_b| < \sigma_e \quad (6.23)$$

Se as tensões principais σ_a e σ_b têm sinais contrários, o critério da máxima tensão de cisalhamento leva a

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_e \quad (6.24)$$

As relações obtidas estão representadas graficamente na Fig. 6.38. Qualquer estado de tensões dado será representado nessa figura por um ponto de coordenadas σ_a e σ_b , que são as tensões principais desse estado de tensões. Se o ponto cair dentro da área indicada, o elemento estrutural está em condições de segurança. Se o ponto cair fora da área indicada, o elemento estrutural se rompe por escoamento do material. O hexágono que fica associado ao início do escoamento no material é chamado *hexágono de Tresca* (engenheiro francês Henri Edouard Tresca - 1814-1885).

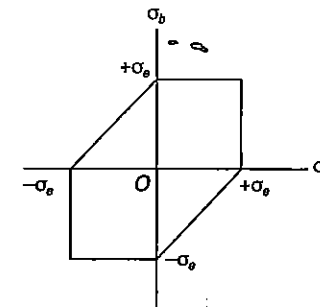


Fig. 6.38

Critério da máxima energia de distorção. Esse critério se baseia na determinação da energia de distorção de um certo material, quer dizer, da energia relacionada com mudanças na forma do material (em oposição à energia relacionada com mudanças de volume nesse material). O critério também é chamado *critério de von Mises* (devido ao especialista em matemática aplicada Richard von Mises (1883-1953)). Por esse critério, um componente estrutural estará em condições de segurança enquanto

o maior valor de energia em distorção por unidade de volume do material permanecer abaixo da energia de distorção por unidade de volume necessária para provocar o escoamento no corpo de prova de mesmo material submetido a ensaio de tração. Como será visto na Sec. 10.5, a energia de distorção por unidade de volume em um material isotrópico em estado plano de tensões é

$$u_d = \frac{1}{6G} (\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \quad (6.25)$$

sendo σ_a e σ_b as tensões principais e G o módulo de elasticidade transversal. No caso particular de um corpo de prova em ensaio de tração que esteja começando a escoar, temos $\sigma_a = \sigma_e$, $\sigma_b = 0$, sendo $(u_d)_e = \sigma_e^2/6G$. Assim, o critério da máxima energia de distorção indica que o elemento estrutural está seguro enquanto $u_d < (u_d)_e$, ou

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_e^2 \quad (6.26)$$

isto é, enquanto o ponto de coordenadas σ_a e σ_b cair dentro da área indicada na Fig. 6.39. Essa área é limitada pela elipse de equação

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_e^2 \quad (6.27)$$

que intercepta os eixos coordenados em $\sigma_a = \pm \sigma_e$ e $\sigma_b = \pm \sigma_e$. Podemos verificar que o eixo maior da elipse é bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, e se estende de $A(\sigma_a = \sigma_b = \sigma_e)$ até $B(\sigma_a = \sigma_b = -\sigma_e)$, enquanto o eixo menor se estende de $C(\sigma_a = -\sigma_b = -0,577\sigma_e)$ até $D(\sigma_a = -\sigma_b = 0,577\sigma_e)$.

A Fig. 6.40 mostra uma comparação entre o critério da máxima tensão de cisalhamento e o critério da máxima energia de distorção. Vemos que a elipse passa pelos vértices do hexágono. Os dois critérios dão o mesmo resultado para os estados de tensão representados por esses pontos. Para qualquer outro estado de tensões, o critério da máxima tensão de cisalhamento é mais conservador que o critério da máxima energia de distorção, uma vez que o hexágono está localizado dentro da elipse.

Um estado de tensões de interesse especial é aquele associado a um teste de torção. Vimos na Fig. 6.22 na Sec. 6.4 que, na torção, $\sigma_{mfn} = -\sigma_{máx}$; desse modo, os pontos correspondentes na Fig. 6.40 estão localizados na bissetriz do segundo e quarto quadrantes. Segue daí que em um teste de torção o escoamento ocorre quando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0,5\sigma_e$, de acordo com o critério da máxima tensão de escoamento, e quando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0,577\sigma_e$, de acordo com o critério da máxima energia de distorção. Analisando a Fig. 6.22, vemos que σ_a e σ_b devem ter a mesma intensidade de $\tau_{máx}$ que é o valor obtido de um ensaio de torção para a tensão de escoamento τ_e do material. O apêndice B dá os valores da tensão de escoamento na tração σ_e e os valores da tensão de escoamento a cisalhamento τ_e para vários materiais dúcteis. Se calcularmos o valor da relação τ_e/σ_e para esses materiais, veremos que essa relação varia de 0,53 a 0,60. Isso mostra que o critério da máxima energia de distorção é um pouco mais preciso, pelo menos no que concerne a estabelecer escoamento na torção.

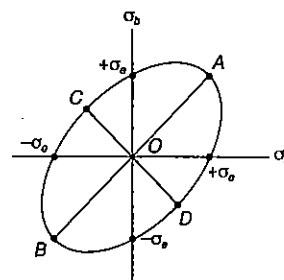


Fig. 6.39

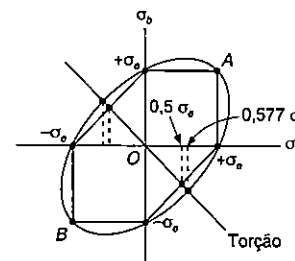


Fig. 6.40

*6.8 CRITÉRIOS DE RUPTURA PARA MATERIAIS FRÁGEIS EM ESTADO PLANO DE TENSÕES

Como vimos no Capítulo 2, os materiais frágeis se caracterizam pelo fato de apresentarem uma ruptura brusca no ensaio de tração, sem que ocorra escoamento anterior ao instante de ruptura. Quando um elemento estrutural ou componente de máquina, composto de material frágil, está em estado uniaxial de tensão de tração, o valor da tensão que provoca sua ruptura é igual à tensão última σ_U do material, determinada em um ensaio de tração. Isso se dá porque o elemento estrutural e o corpo de prova estão submetidos ao mesmo estado de tensões. Por outro lado, quando o elemento estrutural ou componente de máquina se encontrar em estado plano de tensões, é conveniente determinar-se inicialmente as tensões principais σ_a e σ_b em um certo ponto, e usar um dos critérios indicados a seguir, para garantir-se que o elemento ou componente não irá romper sob efeito do carregamento esperado.

Critério da máxima tensão normal. De acordo com este critério, um componente estrutural se rompe quando a máxima tensão normal atuante atinge o valor da tensão última σ_U , obtida por meio de um ensaio de tração em corpo de prova do mesmo material. Assim, o componente estrutural se encontrará em situação de segurança enquanto os valores absolutos das tensões principais σ_a e σ_b forem ambos menores que σ_U :

$$|\sigma_a| < \sigma_U \quad |\sigma_b| < \sigma_U \quad (6.28)$$

O critério da máxima tensão normal pode ser expresso graficamente como indica a Fig. 6.41. Marcando os valores de σ_a e σ_b , localizamos um ponto que, se estiver dentro da área do quadrado indicada, indicará que o elemento estrutural tem segurança. Se o ponto estiver fora dessa área, o elemento estrutural irá romper-se.

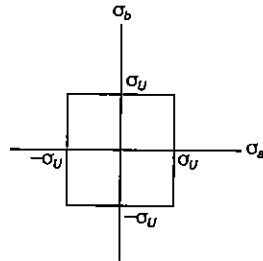


Fig. 6.41

O critério da máxima tensão normal é conhecido também como *critério de Coulomb*, devido ao físico francês Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). Esse critério tem uma deficiência séria, uma vez que se baseia na hipótese de que a tensão última do material é a mesma na tração e na compressão. Como vimos na Sec. 2.3, esse fato raramente ocorre, devido à presença de vazios no material, tais como falhas e fissuras, que debilitam o material tracionado, embora não tenham influência apreciável no material sujeito a compressão. Por outro lado, esse critério não leva em conta outros efeitos nos mecanismos de ruptura do material, a não ser aqueles da tensão normal⁷.

Critério de Mohr. Este critério, sugerido pelo engenheiro alemão Otto Mohr, pode ser usado para prever os efeitos de um certo estado de tensões plano em um material frágil, quando alguns resultados de vários tipos de ensaios podem ser obtidos para esse material.

7 Outro critério de ruptura, conhecido como *critério da máxima deformação específica*, ou critério de Saint-Venant, foi muito usado durante o século dezanove. De acordo com esse critério, um componente estrutural se encontra com segurança enquanto o valor máximo da deformação específica no componente não exceder o valor ϵ_U da deformação específica de ruptura de um corpo de prova submetido a ensaio de tração. Mas, como veremos na Sec. 6.12, a deformação específica é máxima ao longo de um dos eixos principais de tensão, e a deformação é elástica e o material é homogêneo e isotrópico. Logo, chamando de ϵ_a e ϵ_b os valores das deformações específicas ao longo dos eixos principais no plano de tensão, escrevemos

$$|\epsilon_a| < \epsilon_U \quad |\epsilon_b| < \epsilon_U \quad (6.29)$$

Fazendo uso da Lei de Hooke generalizada (Sec. 2.12), vamos exprimir essas relações em função das tensões principais σ_a e σ_b e da tensão última σ_U do material estudado. Deduz-se que, de acordo com o critério da máxima deformação específica, o componente estrutural se encontra em situação de segurança sempre que o ponto marcado com as coordenadas σ_a e σ_b cair dentro da área indicada na Fig. 6.42. Na figura, ν indica o coeficiente de Poisson para o material.

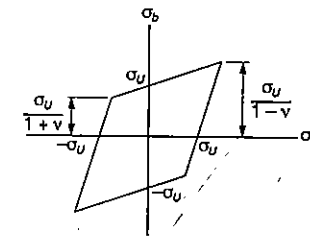


Fig. 6.42

Vamos considerar inicialmente que foram feitos ensaios de tração e de compressão em um certo material, e que se determinaram os valores σ_{UT} e σ_{UC} da tensão última para tração e compressão. O estado de tensões que corresponde à ruptura do corpo de prova no ensaio de tração pode ser representado em um diagrama de círculo de Mohr pelo círculo que intercepta o eixo horizontal em O e em σ_{UT} (Fig. 6.43a). Do mesmo modo, o estado de tensões que corresponde à ruptura no ensaio de compressão pode ser representado pelo círculo que intercepta o eixo horizontal em O e em σ_{UC} . Fica claro que um estado de tensões representado por um círculo inteiramente contido em qualquer dos dois círculos é um estado de tensões seguro. Desse modo, quando as duas tensões principais são positivas, o estado de tensões é seguro enquanto $\sigma_a < \sigma_{UT}$ e $\sigma_b < \sigma_{UT}$; quando as duas tensões principais são negativas, o estado de tensões é seguro para $|\sigma_a| < |\sigma_{UC}|$ e $|\sigma_b| < |\sigma_{UC}|$. Marcando o ponto de coordenadas σ_a e σ_b (Fig. 6.43b), vamos verificar que o estado de tensões é seguro se o ponto marcado cair em alguma das áreas quadradas da figura.

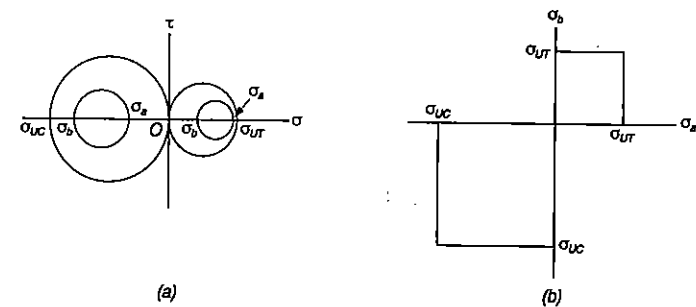


Fig. 6.43

Para a análise dos casos em que σ_a e σ_b têm sinais contrários, vamos considerar que a tensão última para cisalhamento no material, τ_U , foi determinada em um teste de torção. Desenhamos o círculo de centro em O , que representa o estado de tensões do corpo de prova no ensaio, no instante de ruptura (Fig. 6.44a). Qualquer estado de tensões representado por um círculo que esteja inteiramente contido no círculo obtido é um estado de tensões seguro para o material. O critério de Mohr é uma extensão lógica dessa observação: de acordo com ele, um estado de tensões é seguro se for representado por um círculo localizado inteiramente dentro da área limitada pela envoltória dos círculos que correspondem aos dados de ensaios. Podemos agora obter as partes restantes do diagrama de tensões principais, desenhando vários círculos tangentes à envoltória, para determinarmos os valores correspondentes de σ_a e σ_b , que serão marcados na Fig. 6.44b.

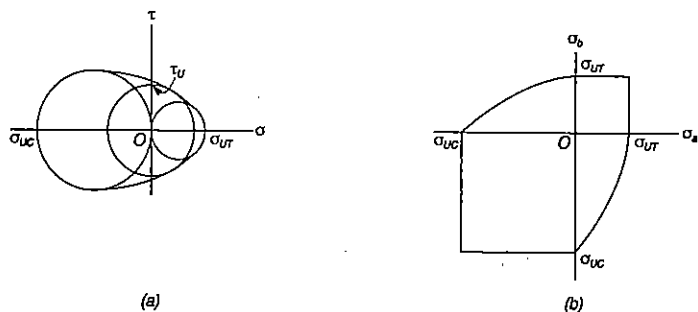


Fig. 6.44

Diagramas mais exatos podem ser obtidos se for possível a determinação de mais resultados de ensaios, correspondentes a vários estados de tensões. Se, por outro lado, os únicos dados disponíveis forem as tensões últimas σ_{UT} e σ_{UC} , a envoltória da Fig. 6.44a é substituída pelas tangentes AB e $A'B'$ aos círculos que são relativos à ruptura a tração e à ruptura a compressão (Fig. 6.45a). Os triângulos semelhantes desenhados nessa figura mostram que a abscissa C de um círculo tangente a AB e $A'B'$ varia linearmente com o seu raio R . Como $\sigma_a = OC + R$ e $\sigma_b = OC - R$, vemos que σ_a e σ_b têm variação linear. Assim, a área sombreada que corresponde a esse critério de Mohr simplificado é limitada por duas linhas retas no segundo e quarto quadrantes (Fig. 6.45b).

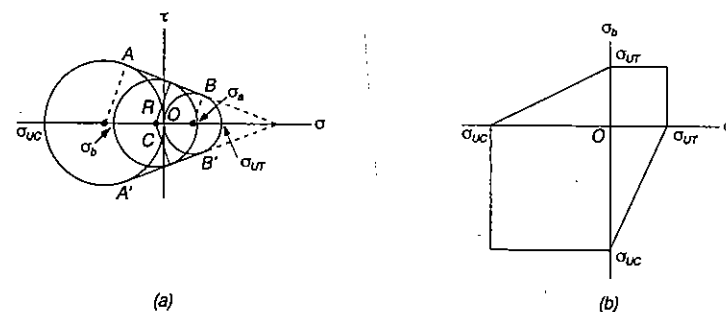


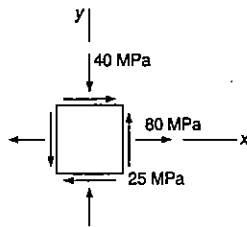
Fig. 6.45

Devemos observar que para determinarmos se um componente estrutural é seguro ou não para certo carregamento, precisamos calcular o estado de tensões em todos os pontos críticos do componente, quer dizer, em todos os pontos em que possam ocorrer concentração de tensões. Em alguns casos, esse cálculo pode ser efetuado por meio dos fatores de concentração de tensões dados nas Figs. 2.59, 3.31, 4.27 e 4.28. Em muitos outros casos, no entanto, devemos lançar mão da teoria da elasticidade para calcularmos o estado de tensões nos pontos críticos.

Cuidados especiais devem ser tomados quando se detecta *fissuras macroscópicas* em componentes estruturais. É certo que o corpo de prova usado no ensaio de determinação da tensão última deve ter algum tipo de imperfeição (como cavidades, fendas e fissuras microscópicas), do mesmo modo que o componente estrutural em estudo, mas certamente está isento de falhas macroscópicas. Quando uma fissura ou trinca é detectada em um elemento estrutural, é necessário determinar-se se a fissura vai se propagar sob o esforço atuante, levando o elemento à ruptura, ou se vai se manter estável. Isso exige uma análise envolvendo a energia associada ao crescimento da fissura. Esse estudo foge ao alcance deste texto, e deve ser analisado por métodos de mecânica das fraturas.

PROBLEMA RESOLVIDO 6.4

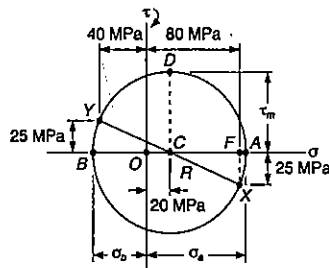
O estado plano de tensões ocorre em um ponto crítico de um componente de máquina feito de aço. Uma série de ensaios de tração mostrou que a tensão de escoamento é $\sigma_e = 250$ MPa, para o tipo de aço usado. Determinar o coeficiente de segurança em relação ao escoamento, usando: (a) o critério da máxima tensão de cisalhamento; (b) o critério da máxima energia de distorção.



Círculo de Mohr. Construindo o círculo de Mohr para o estado de tensões dado, encontramos

$$\sigma_{\text{méd}} = OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65 \text{ MPa}$$



Tensões principais

$$\sigma_a = OC + CA = 20 + 65 = +85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = OC - BC = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$

(a) **Critério da máxima tensão de cisalhamento.** Uma vez que para o aço usado a tensão de cisalhamento é 250 MPa, calculamos a tensão de cisalhamento no escoamento correspondente

$$\tau_e = \frac{1}{2} \sigma_e = \frac{1}{2}(250 \text{ MPa}) = 125 \text{ MPa}$$

Para $\tau_m = 65 \text{ MPa}$, o coeficiente de segurança é

$$C.S. = \frac{\tau_e}{\tau_m} = \frac{125 \text{ MPa}}{65 \text{ MPa}} \quad C.S. = 1,92 \quad \blacktriangleleft$$

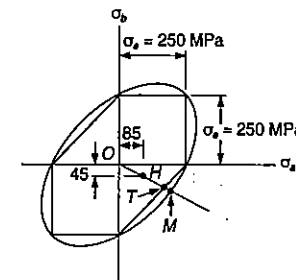
(b) **Critério da máxima energia de distorção.** Levando o coeficiente de segurança à Eq. 6.26, escrevemos

$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 = \left(\frac{\sigma_e}{C.S.} \right)^2$$

Para $\sigma_a = +85 \text{ MPa}$, $\sigma_b = -45 \text{ MPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$, temos

$$(85)^2 - (85)(-45) + (45)^2 = \left(\frac{250}{C.S.} \right)^2$$

$$114,3 = \frac{250}{C.S.} \quad C.S. = 2,19 \quad \blacktriangleleft$$



Comentário. Para o material dútil com $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$, foram desenhados o hexágono relativo ao critério da máxima tensão de cisalhamento e a elipse relativa ao critério da máxima energia de distorção. O estado plano de tensões dado é representado pelo ponto H de coordenadas $\sigma_a = 85 \text{ MPa}$ e $\sigma_b = -45 \text{ MPa}$. A linha reta

que liga os pontos *O* e *H* intercepta o hexágono no ponto *T* e a elipse no ponto *M*. Para cada um dos critérios, o valor encontrado para *C.S.* pode ser verificado se medirmos os segmentos indicados e calcularmos as relações abaixo:

(a) $C.S. = \frac{OT}{OH} = 1,92$ (b) $C.S. = \frac{OM}{OH} = 2,19$

PROBLEMAS

6.64 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento, quando: (a) $\tau_{xy} = 42$ MPa; (b) $\tau_{xy} = 96$ MPa. (*Sugestão:* Considerar as tensões de cisalhamento, no plano e fora do plano.)

6.65 Resolver o Prob. 6.64, quando: (a) $\tau_{xy} = 75$ MPa e $\tau_{yz} = 30$ MPa.

6.66 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento, quando: (a) $\sigma_x = 100$ MPa e $\sigma_y = 30$ MPa; (b) $\sigma_x = 145$ MPa e $\sigma_y = 100$ MPa. (*Sugestão:* Considerar as tensões de cisalhamento, no plano e fora do plano.)

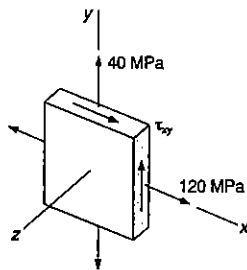


Fig. P6.64

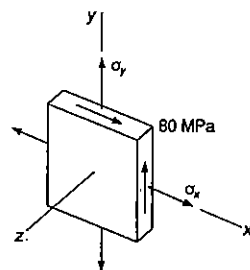


Fig. P6.66

6.67 Resolver o Prob. 6.66, quando: (a) $\sigma_x = 140$ MPa e $\sigma_y = 70$ MPa; (b) $\sigma_x = 85$ MPa e $\sigma_y = 35$ MPa.

6.68 e 6.69 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento, quando: (a) $\tau_{yz} = 120$ MPa; (b) $\tau_{yz} = 55$ MPa; (c) $\tau_{yz} = 0$.

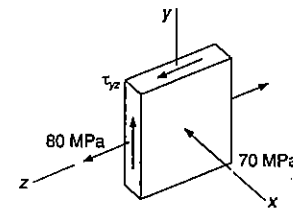


Fig. P6.68

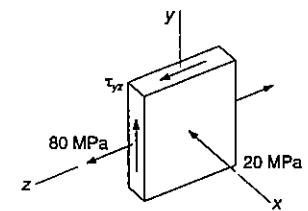


Fig. P6.69

6.70 e 6.71 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento, quando: (a) $\sigma_z = 0$; (b) $\sigma_z = +60$ MPa; (c) $\sigma_z = -60$ MPa.

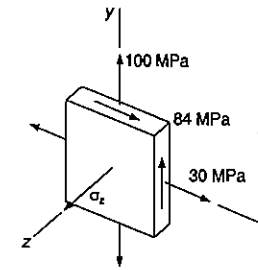


Fig. P6.70

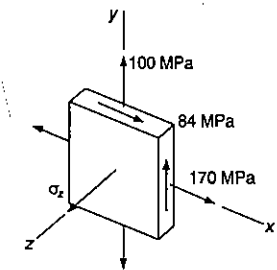


Fig. P6.71

6.72 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar o valor de τ_{xy} para que a máxima tensão de cisalhamento seja de: (a) 60 MPa; (b) 78 MPa.

6.73 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar o valor de τ_{xy} para que a máxima tensão de cisalhamento seja de: (a) 70 MPa; (b) 60 MPa.

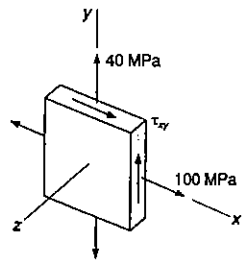


Fig. P6.72

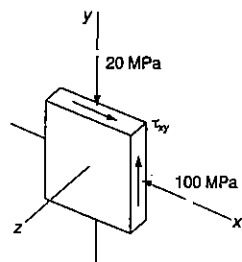


Fig. P6.73

6.74 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar dois valores de σ_y para que a máxima tensão de cisalhamento seja de 70 MPa.

6.75 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar dois valores de σ_y para que a máxima tensão de cisalhamento seja de 75 MPa.

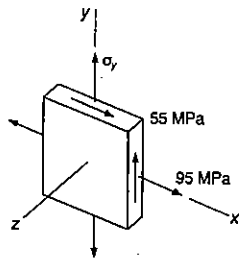


Fig. P6.74

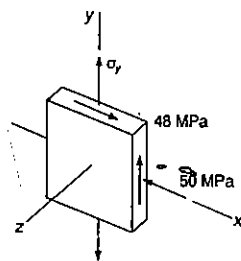


Fig. P6.75

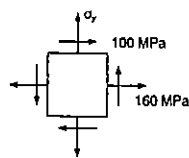


Fig. P6.76

6.76 O estado plano de tensões mostrado ocorre em um componente estrutural feito de um aço com $\sigma_e = 250$ MPa. Usando o critério da máxima tensão de cisalhamento, determinar se o escoamento ocorre quando: (a) $\sigma_y = 160$ MPa; (b) $\sigma_y = 40$ MPa; (c) $\sigma_y = -40$ MPa.

6.77 Resolver o Prob. 6.76, usando o critério da máxima energia de distorção.

6.78 O estado plano de tensões mostrado ocorre em um componente de máquina feito de um aço com $\sigma_e = 250$ MPa. Usando o critério da máxima energia de distorção, determinar se o escoamento ocorre quando: (a) $\tau_{xy} = 100$ MPa; (b) $\tau_{xy} = 125$ MPa; (c) $\tau_{xy} = 145$ MPa.

6.79 Resolver o Prob. 6.78, usando o critério da máxima tensão de cisalhamento.

6.80 e 6.81 O estado plano de tensões mostrado ocorre em uma barra feita de uma classe de aço, com resistência ao escoamento na tração de 300 MPa. Determinar o coeficiente de segurança, em relação ao escoamento, usando: (a) o critério da máxima tensão de cisalhamento; (b) o critério da máxima energia de distorção.

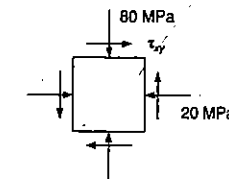


Fig. P6.78

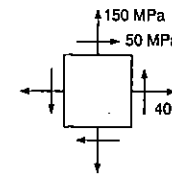


Fig. P6.80

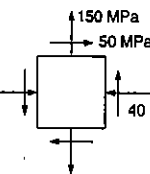


Fig. P6.81

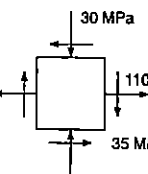


Fig. P6.82

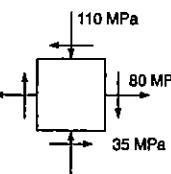


Fig. P6.83

6.82 e 6.83 O estado plano de tensões mostrado ocorre em uma barra feita de uma classe de aço, com uma resistência ao escoamento na tração de 240 MPa. Determinar o coeficiente de segurança, em relação ao escoamento, usando: (a) o critério da máxima tensão de cisalhamento; (b) o critério da máxima energia de distorção.

6.84 Um eixo de 36 mm de diâmetro é feito de uma classe de aço, com uma resistência ao escoamento na tração de 250 MPa. Usando o critério da máxima tensão de cisalhamento, determinar a intensidade do torque T, para que o início do escoamento ocorra quando $P = 200$ kN.

6.85 Resolver o Prob. 6.84, usando o critério da máxima energia de distorção.

6.86 Um eixo de diâmetro 45 mm é feito de um aço com 250 MPa de resistência ao escoamento na tração. Usando o critério da máxima energia de distorção, determinar a intensidade da força P, para que o início do escoamento ocorra quando $T = 1,7$ kN · m.

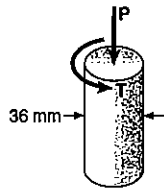


Fig. P6.84

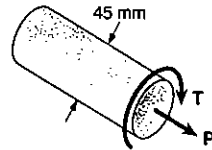


Fig. P6.86

6.87 Resolver o Prob. 6.86, usando o critério da máxima tensão de cisalhamento.

6.88 e 6.89 O estado plano de tensões indicado é esperado em um alumínio fundido. Sabendo-se que para a liga de alumínio usada $\sigma_{UT} = 80 \text{ MPa}$ e $\sigma_{UC} = 200 \text{ MPa}$, e usando o critério de Mohr, determinar se a ruptura irá ocorrer.

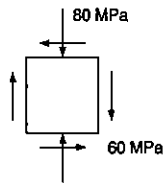


Fig. P6.88

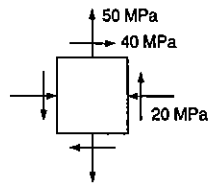


Fig. P6.89

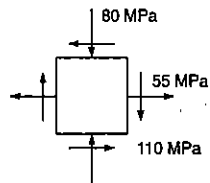


Fig. 6.90

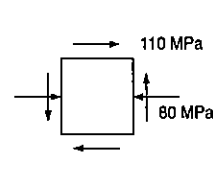


Fig. 6.91

6.90 e 6.91 O estado plano de tensões indicado é esperado em um componente de ferro fundido. Sabendo-se que para a classe de ferro fundido usada $\sigma_{UT} = 170 \text{ MPa}$ e $\sigma_{UC} = 340 \text{ MPa}$, e usando o critério de Mohr, determinar se a ruptura irá ocorrer.

6.92 e 6.93 O estado de tensões mostrado irá ocorrer em um componente de alumínio fundido. Sabendo-se que para a liga de alumínio usada $\sigma_{UT} = 60 \text{ MPa}$ e $\sigma_{UC} = 120 \text{ MPa}$, e usando o critério de Mohr, determinar a tensão de cisalhamento τ_0 , para que a ruptura possa acontecer.

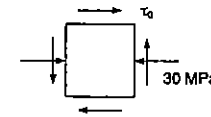


Fig. P6.92

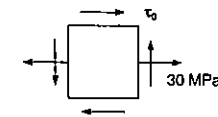


Fig. 6.93

6.94 Uma barra de alumínio fundido é feita de uma liga em que $\sigma_{UT} = 70 \text{ MPa}$ e $\sigma_{UC} = 140 \text{ MPa}$ e é sujeito a um torque T e a uma força axial P de 50 kN. Usando o critério de Mohr, determinar a intensidade do torque T para que a ruptura possa acontecer.

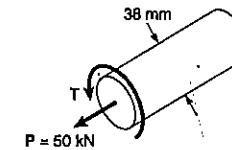


Fig. P6.94

6.95 Resolver o Prob. 6.94, considerando que o sentido da força P é o inverso.

6.9 TENSÕES EM VASOS DE PRESSÃO DE PAREDES FINAS

Os vasos de pressão de paredes finas são um campo de aplicação importante da análise de tensões planas. Como as paredes têm pequena espessura, elas oferecem pequena resistência à flexão, e podemos considerar que os esforços internos que atuam em certa porção da parede são tangentes à superfície do vaso (Fig. 6.46). Desse modo, as tensões resultantes no elemento de parede estarão contidas em um plano tangente à superfície do vaso de pressão.

Vamos estender nossa análise apenas a dois tipos mais comuns de vasos de pressão: vasos de pressão cilíndricos e vasos de pressão esféricos.

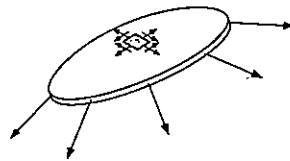


Fig. 6.46

Consideremos um vaso cilíndrico de raio interno r e parede de espessura t contendo um fluido sob pressão (Fig. 6.47). Propomos-nos a determinar as tensões que se exercem em um pequeno elemento de parede, de lados respectivamente paralelos e perpendiculares ao eixo do cilindro. Nenhuma tensão de cisalhamento se exerce no elemento, por causa da assimetria do cilindro e de seu conteúdo. Assim, as tensões normais σ_1 e σ_2 indicadas na Fig. 6.47 são as tensões principais. A tensão σ_1 é chamada *tensão tangencial* e a tensão σ_2 é chamada *tensão longitudinal*.

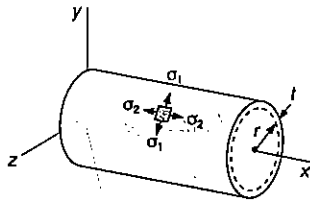


Fig. 6.47

Para a determinação tangencial σ_1 , vamos separar uma porção da parede do vaso limitada pelo plano xy e por dois planos paralelos ao plano yz , separados de uma distância Δx (Fig. 6.48). O corpo livre definido dessa maneira está submetido a forças que agem na direção do eixo z que são constituídas pelas forças elementares $\sigma_1 dA$ nas seções transversais da parede, e pelas forças elementares de pressão $p dA$ que se exercem no fluido contido dentro do corpo livre. Devemos notar que p representa a diferença entre a pressão interna e a pressão atmosférica externa. A resultante dos esforços internos $\sigma_1 dA$ é igual ao produto de σ_1 pela área $2t\Delta x$ da seção da parede, enquanto a resultante das forças elementares de pressão $p dA$ é igual ao produto de p pela área $2r\Delta x$. A equação de equilíbrio $\Sigma F_z = 0$ leva a

$$\Sigma F_z = 0: \quad \sigma_1(2t\Delta x) - p(2r\Delta x) = 0$$

Explicitando a tensão tangencial σ_1 ,

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{6.30}$$

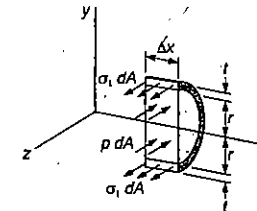


Fig. 6.48

Para a determinação da tensão longitudinal σ_2 , vamos passar uma seção perpendicular ao eixo x e considerar o corpo livre que consiste da porção do vaso e seu conteúdo situados à esquerda da seção (Fig. 6.49). As forças que atuam sobre o corpo livre são as forças internas elementares $\sigma_2 dA$ na seção transversal da parede e as forças elementares devidas à pressão $p dA$, que se exercem no fluido contido no corpo livre. A área da seção do fluido é πr^2 e a área da seção transversal da parede se obtém ao multiplicar-se o comprimento da circunferência do cilindro, $2\pi r$, pela espessura da parede, t . Podemos, então, escrever a equação de equilíbrio⁸

$$\Sigma F_x = 0: \quad \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2)$$

e, explicitando a tensão longitudinal σ_2 ,

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{6.31}$$

⁸ Se usássemos o raio médio da seção transversal, $r_m = r + (1/2)t$, no cálculo da resultante das forças na seção, encontraríamos um valor mais preciso para a tensão longitudinal, que seria

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \frac{1}{1 + \frac{t}{2r}} \tag{6.31'}$$

Para fins práticos, o termo $t/2r$ é pequeno, no caso de vasos de paredes finas, e pode ser desprezado. Se um vaso de pressão não tem paredes finas (quer dizer, se $t/2r$ não é um termo pequeno), as tensões σ_1 e σ_2 variam ao longo da parede e devem ser determinadas pelos métodos da teoria da elasticidade.

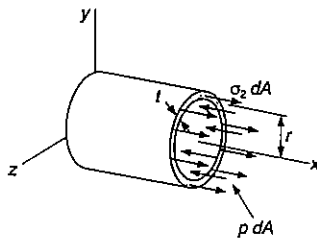


Fig. 6.49

Pelas Eqs. 6.30 e 6.31 vemos que a tensão tangencial σ_1 é o dobro da tensão longitudinal σ_2 :

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \tag{6.32}$$

Desenhando o círculo de Mohr por intermédio dos pontos A e B que correspondem às tensões principais σ_1 e σ_2 , respectivamente (Fig. 6.50), e lembrando que a máxima tensão de cisalhamento no plano das tensões é igual ao raio do círculo, temos

$$\tau_{\text{(no plano das tensões)}} = \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{pr}{4t} \tag{6.33}$$

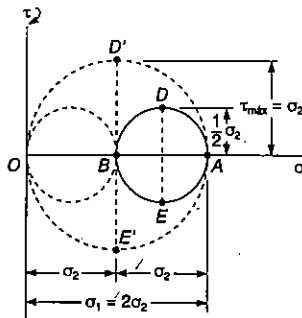


Fig. 6.50

Essa tensão corresponde aos pontos D e E do círculo de Mohr, e é obtida quando se gira o elemento inicial da Fig. 6.47 de um ângulo de 45° dentro do plano tangente

à superfície do vaso de pressão. No entanto, a tensão de cisalhamento máxima na parede do vaso é maior. Ela é igual ao raio do círculo de diâmetro OA e corresponde a uma rotação de 45° em torno de um eixo longitudinal fora do plano de tensões⁹. Temos

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{6.34}$$

Vamos considerar agora um vaso de pressão esférico de raio interno r e com parede de espessura t , que contém um fluido submetido à pressão p (mais exatamente, p é a diferença entre a pressão interna e a pressão atmosférica externa). Por razões de simetria, vemos que as tensões que se exercem nas quatro faces de um pequeno elemento da parede devem ser iguais (Fig. 6.51). Temos

$$\sigma_1 = \sigma_2 \tag{6.35}$$

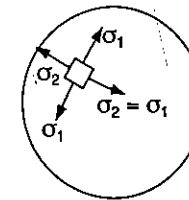


Fig. 6.51

Para determinarmos o valor da tensão, passamos uma seção pelo centro C do vaso de pressão, considerando então o corpo livre constituído pela porção do vaso e seu conteúdo localizados à esquerda da seção (Fig. 6.52). A equação de equilíbrio para este corpo livre é a mesma equação para o corpo livre da Fig. 6.49. Concluímos, então, que para vasos de pressão esféricos temos

9 Devemos observar que, embora a terceira tensão principal seja nula na superfície externa da parede, ela é igual a $-p$ na superfície interna, e é representada pelo ponto $C(-p, 0)$ em um diagrama de círculo de Mohr. Desse modo, na superfície interna a tensão máxima de cisalhamento é igual ao raio do círculo de diâmetro AC , e temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + p) = \frac{pr}{2t} \left(1 + \frac{t}{r} \right)$$

Para vasos de paredes finas, o termo t/r é pequeno, e podemos desprezar a variação de $\tau_{\text{máx}}$ através da parede. Esta simplificação vale para vasos esféricos também.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (6.36)$$

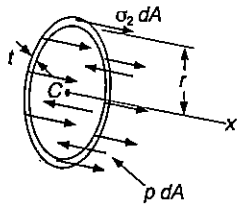


Fig. 6.52

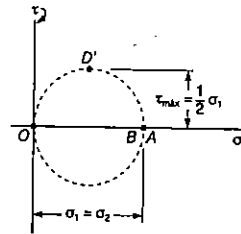


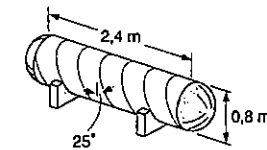
Fig. 6.53

O círculo de Mohr para as transformações de tensão no plano das tensões se reduz a um ponto, uma vez que $\sigma_1 = \sigma_2$ (Fig. 6.53). Isso quer dizer que as tensões normais no plano tangente à superfície são constantes, e que a tensão de cisalhamento no plano das tensões é nula. No entanto, a tensão máxima de cisalhamento na parede do vaso não é nula; ela é igual ao raio do círculo de diâmetro OA e corresponde a uma rotação de 45° para o plano das tensões. Temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{4t} \quad (6.37)$$

PROBLEMA RESOLVIDO 6.5

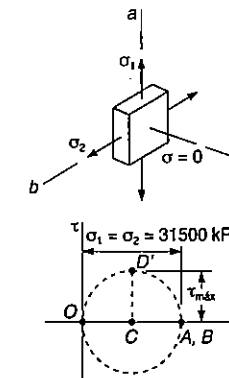
Um tanque de ar comprimido se apóia em dois cavaletes como indica a figura; um dos cavaletes foi construído de modo a não exceder nenhuma força longitudinal no tanque. O corpo cilíndrico do tanque foi construído em chapa de aço de 10 mm de espessura, soldada ao longo de um filete que forma uma hélice com ângulo de 25° com um plano transversal ao cilindro. As calotas das extremidades são esféricas e têm espessura de 8 mm. Para uma pressão interna de 1260 kPa, determinar: (a) a tensão normal e a tensão máxima de cisalhamento na calota esférica; (b) as tensões na direção paralela e na direção perpendicular ao filete de solda helicoidal.



(a) Calota esférica. Pela Eq. 6.36 escrevemos

$$p = 1260 \text{ kPa} \quad r = 0,4 \text{ m} \quad t = 8 \text{ mm}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{(1260 \text{ kPa})(0,4 \text{ m})}{2(0,008 \text{ m})} \quad \sigma = 31500 \text{ kPa}$$



Para as tensões em um plano tangente à calota, o círculo de Mohr se reduz a um ponto (A, B) no eixo horizontal, e todas as tensões de cisalhamento no plano das tensões são nulas. Na superfície da calota, a terceira tensão principal é zero e corresponde ao ponto O. No círculo de Mohr de diâmetro OA , o ponto D' representa a tensão máxima de cisalhamento; ela ocorre em um plano que forma 45° com o plano tangente à calota.

$$\tau_{\text{máx}} = 1/2 (31500)$$

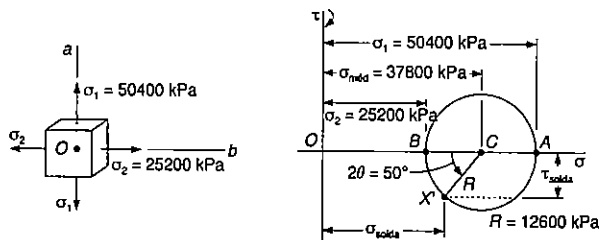
$$\tau_{\text{máx}} = 15750 \text{ kPa}$$

(b) **Corpo cilíndrico do tanque.** Determinamos inicialmente a tensão tangencial σ_1 e a tensão longitudinal σ_2 . Usando as Eqs. 6.30 e 6.31, encontramos

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(1260 \text{ kPa})(0,4 \text{ m})}{(0,01 \text{ m})} = 50400 \text{ kPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 = 25200 \text{ kPa}$$

Tensões na solda. Observando que as tensões tangencial e longitudinal são tensões principais, desenhamos o círculo de Mohr como indicado.



Obtém-se um elemento com face paralela ao filete de solda quando se gira a face perpendicular ao eixo Ob no sentido anti-horário de 25° . Por outro lado, no círculo de Mohr, localizamos o ponto X' que corresponde aos componentes de tensões na solda girando CB no sentido anti-horário de 50° .

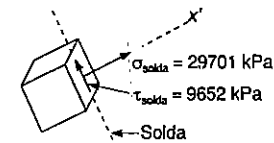
$$\sigma_{\text{solda}} = \sigma_{\text{média}} - R \cos 50^\circ = 37800 - 12600 \cos 50^\circ$$

$$\sigma_{\text{solda}} = 29701 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\tau_{\text{solda}} = R \sin 50^\circ = 12600 \sin 50^\circ = 9652 \text{ kPa}$$

$$\tau_{\text{solda}} = 9652 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$

Como X' está localizado abaixo do eixo horizontal, τ_{solda} tende a rodar o elemento no sentido anti-horário.



PROBLEMAS

6.96 Um reservatório esférico de gás, feito de aço, tem um diâmetro externo de 5 m e uma espessura da parede de 10 mm. Sabendo-se que a pressão interna é de 400 kPa, determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento no reservatório.

6.97 Uma bola de basquete tem um diâmetro de 300 mm e uma espessura de 3 mm. Determinar a tensão normal na parede, quando a bola é inflada com uma pressão de 120 kPa.

6.98 Um vaso esférico de pressão de 500 mm de diâmetro interno e 6,35 mm de espessura da parede é fabricado com um aço cuja tensão última de tração é de 400 MPa. Determinar o coeficiente de segurança, em relação à falha por tração, quando a pressão é de 5,5 MPa.

6.99 Um vaso esférico de pressão de 500 mm de diâmetro interno deve ser fabricado com um aço cuja resistência última à tração é de 400 MPa. Sabendo-se que a máxima pressão deve ser de 8,3 MPa e que um coeficiente de segurança igual a 3,00 é desejado, determinar a menor espessura da parede que pode ser usada.

6.100 Uma tubulação de água de 750 mm de diâmetro externo e 12 mm de espessura da parede liga um reservatório R com uma estação geradora S . Sabendo-se que $h = 300$ mm, determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento na tubulação, sob condições estáticas. [Densidade da água = 1000 kg/m³.]

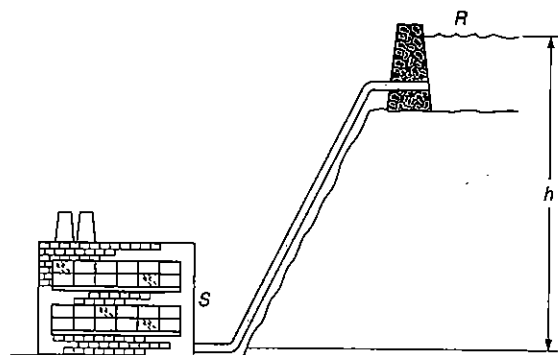


Fig. P6.100

6.101 No Prob. 6.100, determinar o máximo valor admissível para h , sabendo-se que a tubulação é feita de um aço com uma tensão última à tração de 450 MPa e que um coeficiente de segurança de 4,50 é desejado.

6.102 O tanque cilíndrico de armazenamento despressurizado tem uma espessura de parede de 4,8 mm e é feito de um aço com 400 MPa de tensão última à tração. Determine a máxima altura h de água, que pode ser suportada pelo tanque, se um coeficiente de segurança de 4,00 é desejado. [Peso específico da água = 9800 N/m³.]

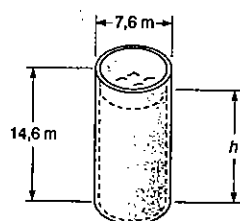


Fig. P6.102

6.103 Para o tanque de armazenamento do Prob. 6.102, determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento na parede cilíndrica, quando o tanque está completamente cheio ($h = 14,6$ m).

6.104 A porção cilíndrica do reservatório de ar comprimido mostrado é fabricada de uma chapa de 5 mm de espessura soldada ao longo de uma hélice, formando um ângulo

de 25° com o plano transversal ao eixo do reservatório. Para uma pressão de 4 MPa, determinar: (a) a tensão normal perpendicular à solda; (b) a tensão de cisalhamento paralela à solda.

6.105 Para o reservatório de ar comprimido do Prob. 6.104, determinar a maior pressão admissível, sabendo-se que a tensão normal admissível perpendicular à solda é de 165 MPa e a tensão admissível de cisalhamento paralela à solda é de 110 MPa.

6.106 A porção cilíndrica do reservatório de ar comprimido mostrada é fabricada com chapa de 9,5 mm de espessura, soldada ao longo de uma hélice formando um ângulo $\beta = 28^\circ$ com a horizontal. Determinar a maior pressão admissível, sabendo-se que a tensão normal perpendicular à solda não deve ultrapassar 165 MPa.

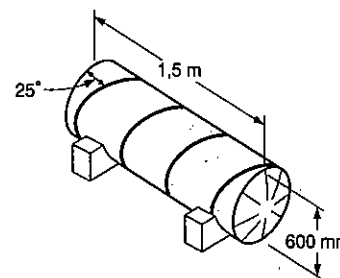


Fig. P6.104

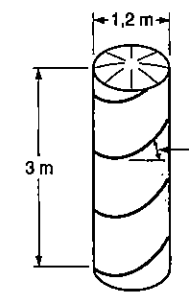


Fig. P6.106

6.107 Para o tanque de ar comprimido do Prob. 6.106, determinar a variação dos valores de β que podem ser usados, se a tensão de cisalhamento paralela à solda não deve exceder a 50 MPa, quando a pressão for igual a 4 MPa.

6.108 Placas quadradas, cada uma com 16 mm de espessura, podem ser soldadas juntas de dois modos distintos, como mostrado, para formar um tanque cilíndrico de ar comprimido. Sabendo-se que a tensão normal admissível perpendicular à solda é 65 MPa, determinar a maior pressão admissível em cada caso.

6.109 Um torque de 8,5 kN·m é aplicado à extremidade de um tanque contendo óleo sob uma pressão de 2,8 MPa. Sabendo-se que o tanque tem um diâmetro externo de 250 mm e uma espessura de 6,35 mm, determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento na parede cilíndrica do tanque.

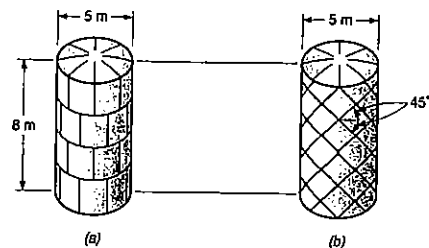


Fig. P6.108

6.110 Um vaso de pressão de 300 mm de diâmetro externo é fabricado com chapa de aço de 6,35 mm de espessura, que é soldada ao longo de uma hélice formando um ângulo de 22,5° com a horizontal. Sabendo-se que a pressão no interior do vaso é de 1,7 MPa e que uma força axial P de 270 kN é aplicada no centro da placa superior, determinar: (a) a tensão normal perpendicular à solda; (b) a tensão de cisalhamento paralela à solda.

6.111 O tanque de ar comprimido AB tem um diâmetro externo de 250 mm e uma espessura de 8 mm. Nele é montado um colar, no qual uma força P de 40 kN pode ser aplicada em B , formando um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a horizontal. Sabendo-se que a pressão interna do tanque é de 5 MPa, determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento no: (a) ponto K ; (b) ponto L .

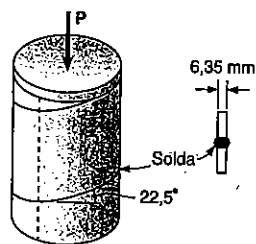


Fig. P6.110

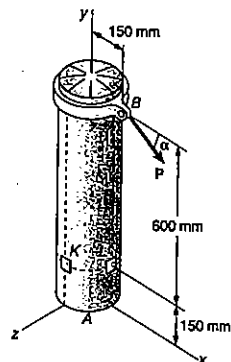


Fig. P6.111

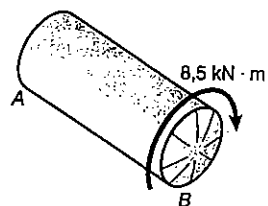


Fig. P6.109

6.112 Resolver o Prob. 6.111, assumindo que a força P é horizontal ($\alpha = 0$).

6.113 O tanque de ar comprimido AB tem um diâmetro externo de 462 mm e uma espessura uniforme e 6 mm. Sabendo-se que a pressão dentro do vaso é de 130 kPa, determinar a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento, no plano, no: (a) ponto K ; (b) ponto L .

6.114 Um anel de latão de 130 mm de diâmetro externo e espessura de 6 mm se encaixa perfeitamente dentro de um outro aço de 130 mm de diâmetro interno e espessura de 3 mm, quando a temperatura de ambos os anéis é de 10°C. Sabendo-se que a temperatura de ambos os anéis é então aumentada para 50°C, determinar: (a) a tensão normal de tração no anel de aço; (b) a correspondente pressão exercida pelo anel de latão sobre o anel de aço.

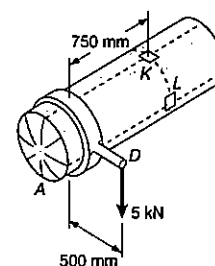


Fig. P6.113

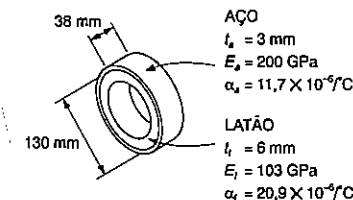


Fig. P6.114

6.115 Resolver o Prob. 6.114, considerando que o anel de latão é de 3 mm de espessura e o anel de aço de 6 mm de espessura.

*6.10 TRANSFORMAÇÕES NO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS

Vamos analisar agora as variações das *deformações específicas* para uma rotação dos eixos coordenados. Inicialmente nosso estudo ficará limitado a estados planos de deformações, isto é, àquelas situações em que as deformações do material ocorrem em planos paralelos, e são iguais em cada um desses planos. Se escolhermos o eixo z como sendo perpendicular aos planos em que ocorrem as deformações, temos $\epsilon_z = \lambda_{zz} = \lambda_{zy} = 0$, e as únicas deformações que aparecem são as componentes ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} . Essa situação ocorre em uma placa que for submetida a carregamento uniforme ao longo de suas arestas, quando a placa fica impedida de se contrair ou de se expandir por meio de suportes rígidos, fixos e lisos (Fig. 6.54). Ela ocorre também em uma barra

de comprimento infinito submetido a cargas uniformemente distribuídas em seus lados, uma vez que, por razões de simetria, os elementos que se encontram em um certo plano transversal não podem se mover para fora desse plano. Esse modelo ideal mostra que, no caso real de uma barra de grande comprimento, que fica submetida a cargas transversais distribuídas uniformemente (Fig. 6.55), existe um estado plano de deformações em qualquer seção transversal que não se localize muito próxima das extremidades da barra¹⁰.

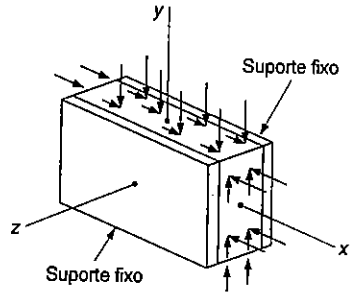


Fig. 6.54

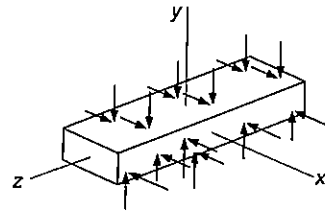


Fig. 6.55

Vamos considerar que existe um estado plano de deformações no ponto Q (com $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$), definido pelas componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} relacionado com os eixos x e y . Sabemos pelas Secs. 2.12 e 2.14 que o estado acima corresponde a um elemento quadrado de centro Q e lados de comprimento Δs , paralelos aos eixos x e y , que se deforma transformando-se em um paralelogramo de lados respectivamente iguais a $\Delta s(1 + \epsilon_x)$ e $\Delta s(1 + \epsilon_y)$, formando ângulos de $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ e $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ entre si (Fig. 6.56). Lembramos que o elemento pode sofrer também um movimento como corpo rígido, devido a deformações dos elementos vizinhos, mas esse movimento não tem importância na nossa análise de deformações específicas em torno de Q . Nosso objetivo é determinar em função de $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ e θ as componentes de deformação $\epsilon_{x'}, \epsilon_{y'}$ e $\gamma_{x'y'}$, relativas ao sistema coordenado $x'y'$ que se obtém quando os eixos x e y giram de um ângulo θ . Como a Fig. 6.57 mostra, essas componentes novas definem o paralelogramo em que se transforma um quadrado de lados paralelos aos eixos x' e y' .

10 Devemos observar que um estado plano de deformações e um estado plano de tensões (Sec. 6.1) não ocorrem simultaneamente, a não ser para um material com coeficiente de Poisson igual a zero (material ideal). Os suportes da Fig. 6.54 e as restrições impostas à barra da Fig. 6.55 provocam o aparecimento de uma tensão σ_z diferente de zero. Por outro lado, no caso da Fig. 6.3, a ausência de contenção lateral da placa resulta em $\sigma_z = 0$ e $\epsilon_z = 0$.

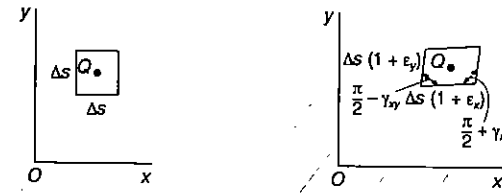


Fig. 6.56

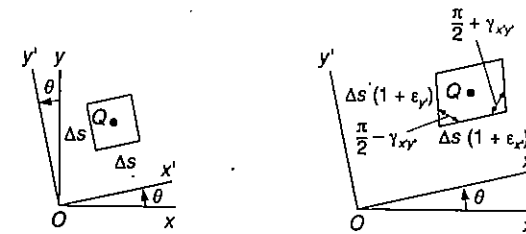


Fig. 6.57

Vamos inicialmente deduzir uma expressão para a deformação específica normal $\epsilon(\theta)$ ao longo da linha AB que forma um ângulo θ arbitrário com o eixo x . Para isso, vamos considerar o triângulo retângulo ABC que tem a hipotenusa AB (Fig. 6.58a), e o triângulo qualquer $A'B'C'$ no qual o triângulo ABC se transforma (Fig. 6.58b). Se Δs é o comprimento de AB , exprimimos o comprimento de $A'B'$ por $\Delta s[1 + \epsilon(\theta)]$. De modo semelhante, se Δx e Δy são os comprimentos dos lados AC e CB , vamos exprimir os comprimentos de $A'C'$ e $C'B'$ por $\Delta x(1 + \epsilon_x)$ e $\Delta y(1 + \epsilon_y)$, respectivamente. Vemos na Fig. 6.58 que o ângulo em C é reto e se transforma no ângulo $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$, indicado na Fig. 6.58b. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $A'B'C'$, temos

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B') \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2 [1 + \epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2 (1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2 (1 + \epsilon_y)^2 - 2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \quad (6.38)$$

Mas da Fig. 6.58a temos

$$\Delta x = (\Delta s) \cos \theta \quad \Delta y = (\Delta s) \sin \theta \quad (6.39)$$

e vemos que, sendo γ_{xy} muito pequeno,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -\text{sen } \gamma_{xy} = -\gamma_{xy} \quad (6.40)$$

Substituindo as Eqs. 6.39 e 6.40 na Eq. 6.38, lembrando que $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$, e desprezando os termos de segunda ordem em $\varepsilon(\theta)$, ε_x , ε_y e γ_{xy} , escrevemos

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \text{sen}^2 \theta + \gamma_{xy} \text{sen } \theta \cos \theta \quad (6.41)$$

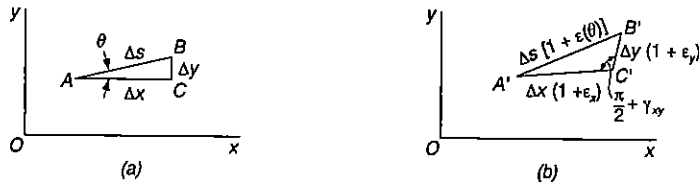
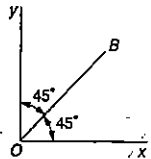


Fig. 6.58

A Eq. 6.41 nos permite determinar a deformação específica normal $\varepsilon(\theta)$ em qualquer direção AB em função das componentes de deformação ε_x , ε_y , γ_{xy} e do ângulo θ que AB forma com o eixo x . Verificamos que, para $\theta = 0^\circ$, a Eq. 6.41 leva a $\varepsilon(0^\circ) = \varepsilon_x$ e que, para $\theta = 90^\circ$, leva a $\varepsilon(90^\circ) = \varepsilon_y$. Por outro lado, se fizermos $\theta = 45^\circ$ na Eq. 6.41, vamos obter a deformação específica normal na direção da bissetriz OB do ângulo formado por x e y (Fig. 6.59). Chamando essa deformação de ε_{OB} , escrevemos

$$\varepsilon_{OB} = \varepsilon(45^\circ) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \gamma_{xy}) \quad (6.42)$$

Explicitando o valor de γ_{xy} nessa equação, temos



$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{OB} - \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (6.43)$$

Esta relação torna possível expressar a *deformação de cisalhamento* relacionada a um certo par de eixos ortogonais em função das *deformações normais* medidas ao longo desses eixos e de sua bissetriz. Ela tem importância fundamental na presente dedução e servirá também na Sec. 6.13, quando do estudo da determinação experimental das deformações de cisalhamento.

Para cumprirmos o objetivo desta seção, que é expressar as componentes de deformações específicas relativas ao sistema coordenado $x'y'$ da Fig. 6.57 em função do ângulo θ e dos componentes de deformação ε_x , ε_y e γ_{xy} relativos aos eixos x e y , vamos tomar a Eq. 6.41 que dá a deformação normal $\varepsilon_{x'}$, ao longo do eixo x' . Usando as relações trigonométricas 6.3 e 6.4, podemos escrever a Eq. 6.41 na forma alternativa

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen } 2\theta \quad (6.44)$$

Se substituirmos θ por $\theta + 90^\circ$, vamos obter a deformação normal ao longo do eixo y' . Uma vez que $\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$ e $\text{sen}(2\theta + 180^\circ) = -\text{sen } 2\theta$, temos

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen } 2\theta \quad (6.45)$$

Somando membro a membro as Eqs. 6.44 e 6.45, obtemos

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (6.46)$$

Como $\varepsilon_{z'} = \varepsilon_z = 0$, fica constatado que, para o caso de estado plano de deformações, a soma das deformações normais associadas a um elemento cúbico é independente da orientação do elemento.

Se substituirmos agora na Eq. 6.44 o ângulo θ por $\theta + 45^\circ$, vamos obter uma expressão para a deformação específica normal da direção da bissetriz OB' do ângulo formado por x' e y' . Como $\cos(2\theta + 90^\circ) = -\text{sen } 2\theta$ e $\text{sen}(2\theta + 90^\circ) = \cos 2\theta$, vamos ter

$$\varepsilon_{OB'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \text{sen } 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (6.47)$$

Escrevendo a Eq. 6.43 em relação a x' e y' , exprimimos a deformação de cisalhamento $\gamma_{x'y'}$, em função das deformações normais medidas nas direções dos eixos x' e y' , bem como ao longo da bissetriz OB' :

$$\gamma_{x'y'} = 2\varepsilon_{OB'} - (\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}) \quad (6.48)$$

Substituindo as Eqs. 6.46 e 6.47 em 6.48 temos

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (6.49)$$

As Eqs. 6.44, 6.45 e 6.46 são as equações necessárias que procurávamos para definir a transformação de deformações planas quando ocorre uma rotação de eixos no plano das deformações. Se dividirmos todos os termos da Eq. 6.49 por 2, vamos obter a forma alternativa

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (6.49')$$

Observamos então que as Eqs. 6.44, 6.45 e 6.49 têm uma semelhança formal com as equações deduzidas na Sec. 6.2 para a transformação de tensões planas. As primeiras podem ser obtidas das segundas, por substituição das tensões normais pelas correspondentes deformações específicas normais, e pela substituição das tensões de cisalhamento τ_{xy} e $\tau_{x'y'}$, por metade das deformações de cisalhamento correspondentes, quer dizer, por $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ e $\frac{1}{2}\gamma_{x'y'}$, respectivamente.

* 6.11 CÍRCULO DE MOHR PARA ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Como as equações para a transformação das deformações planas têm uma analogia formal com as equações de transformação no estado plano de tensões, podemos estender o uso do círculo de Mohr para a análise das deformações planas. Sendo conhecidas as componentes de deformação ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} que definem a deformação apresentada na Fig. 6.56, marcamos o ponto $X(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ de abscissa igual à deformação específica ϵ_x e ordenada igual a menos a metade da deformação de cisalhamento γ_{xy} . Marcamos também o ponto $Y(\epsilon_y, +\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ (Fig. 6.60). Desenhando o diâmetro XY , definimos o centro C do círculo de Mohr para o estado plano de deformações. A abscissa de C e o raio R do círculo são iguais a

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (6.50)$$

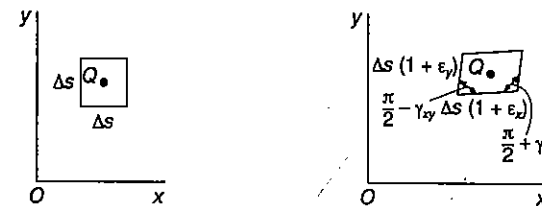


Fig. 6.56 (repetida)

Notamos que se γ_{xy} é positiva, como adotado na Fig. 6.56, os pontos X e Y são marcados, respectivamente, abaixo e acima do eixo horizontal (Fig. 6.60). Não ocorrendo rotação devida a movimento de corpo rígido, observa-se que o lado do elemento da Fig. 6.56 associado a ϵ_x roda no sentido anti-horário, enquanto o lado do elemento associado com a deformação ϵ_y roda no sentido horário. Assim, se a deformação de cisalhamento provocar, em um certo lado, rotação no sentido *horário*, o ponto correspondente no círculo de Mohr será marcado *acima* do eixo horizontal. Se a deformação de cisalhamento provocar rotação do lado no sentido *anti-horário*, o ponto correspondente é marcado *abaixo* do eixo horizontal.

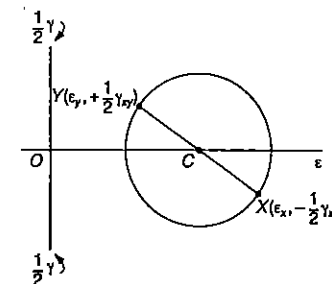


Fig. 6.60

Os pontos A e B onde o círculo de Mohr intercepta o eixo horizontal correspondem aos valores máximo e mínimo das deformações específicas normais, respectivamente (Fig. 6.61a). Encontramos

$$\epsilon_{máx} = \epsilon_{méd} + R \quad \text{e} \quad \epsilon_{mín} = \epsilon_{méd} - R \quad (6.51)$$

onde $\epsilon_{méd}$ e R são definidos pelas Eqs. 6.50. O valor do ângulo θ_p pode ser encontrado se observarmos que a deformação de cisalhamento é nula para A e B . Fazendo $\gamma_{x'y'} = 0$ na Eq. 6.49, temos

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{6.52}$$

Os eixos correspondentes a e b da Fig. 6.61b são os eixos principais de deformações específicas. O ângulo θ_p que define a direção do eixo principal Oa na Fig. 6.61b e que corresponde ao ponto A na Fig. 6.61a é igual à metade do ângulo XCA medido no círculo de Mohr. A rotação que leva Ox a coincidir com Oa tem o mesmo sentido que a rotação que leva o diâmetro XY do círculo de Mohr a coincidir com o diâmetro AB .

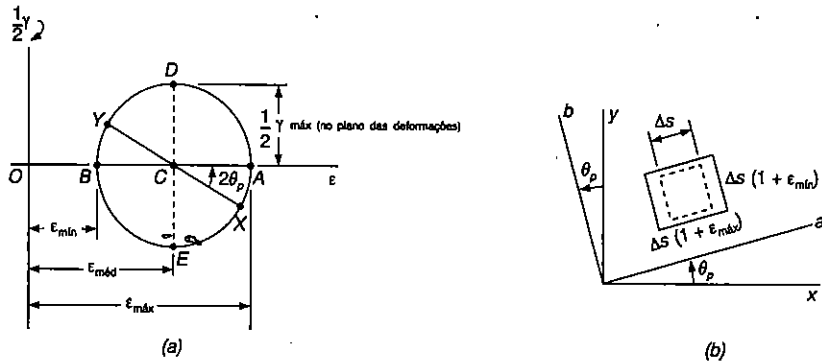


Fig. 6.61

A Seção 2.14 nos lembra que, no caso da deformação elástica de um material homogêneo e isotrópico, vale a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento. Ela leva à depressão $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$, para qualquer sistema de eixos x e y ortogonais. Assim, $\gamma_{xy} = 0$ quando $\tau_{xy} = 0$, o que mostra que os eixos principais de tensão coincidem com os eixos principais de deformação.

A deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações é definida pelos pontos D e E na Fig. 6.61a. Ela é igual ao diâmetro do círculo de Mohr. Da segunda das Eqs. 6.50, escrevemos

$$\gamma_{máx} \text{ (no plano das deformações)} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{6.53}$$

Finalmente, vemos que os pontos X' e Y' que definem as componentes da deformação específica que correspondem a uma rotação dos eixos coordenados de um ângulo θ (Fig. 6.57) podem ser obtidos pela rotação do diâmetro XY do círculo de Mohr no mesmo sentido de um ângulo 2θ (Fig. 6.62).

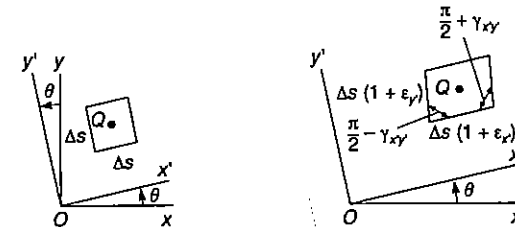


Fig. 6.57 (repetida)

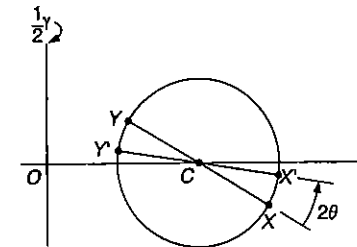


Fig. 6.62

EXEMPLO 6.4

Em um material submetido a estado plano de deformações, um quadrado de lados iguais a 10 mm tem seu lado horizontal alongado de 4 μm, enquanto seu lado vertical permanece indeformado. Ao mesmo tempo, o ângulo do vértice inferior esquerdo aumenta de $0,4 \times 10^{-3}$ rad (Fig. 6.63). Determinar: (a) os eixos principais e as deformações principais; (b) a máxima deformação de cisalhamento e a deformação específica normal correspondente.

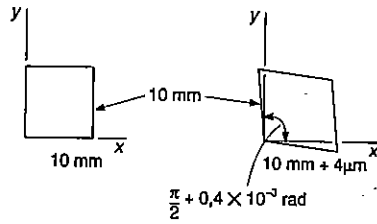


Fig. ex.6.63

(a) **Eixos principais e deformações principais.** Inicialmente determinamos as coordenadas dos pontos X e Y do círculo de Mohr para deformações. Temos

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^{-3} \text{ m}} = +400 \mu, \quad \epsilon_y = 0, \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Como o lado do quadrado associado com ϵ_x roda no sentido horário, o ponto X é marcado acima do eixo horizontal com coordenadas ϵ_x e $|\gamma_{xy}/2|$. Como $\epsilon_y = 0$ e o lado correspondente do quadrado roda no sentido anti-horário, o ponto Y é marcado diretamente abaixo da origem (Fig. 6.64). Desenhando o diâmetro XY, determinamos o centro C do círculo de Mohr. Temos

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200 \mu, \quad OY = 200 \mu$$

$$R = \sqrt{(OC)^2 + (OY)^2} = \sqrt{(200 \mu)^2 + (200 \mu)^2} = 283 \mu$$

As deformações principais são definidas pelas abscissas dos pontos A e B. Escrevemos

$$\epsilon_a = OA = OC + R = 200 \mu + 283 \mu = 483 \mu$$

$$\epsilon_b = OB = OC - R = 200 \mu - 283 \mu = -83 \mu$$

Os eixos principais Oa e Ob estão mostrados na Fig. 6.65. Visto que $OC = OY$, o ângulo para C no triângulo OCY é 45° .

Como o ângulo $2\theta_p$, que leva XY a coincidir com AB é de 45° no sentido horário, o ângulo θ_p que faz coincidir Ox com Oa é de $22,5^\circ$ no sentido horário (Fig. 6.65).

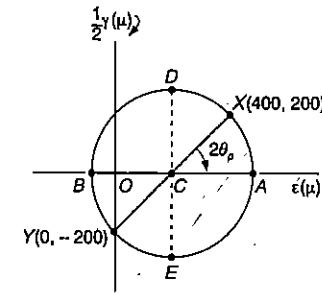


Fig. ex.6.64

(b) **Deformação de cisalhamento máxima.** Os pontos D e E definem a máxima deformação de cisalhamento no plano das deformações. Uma vez que as deformações principais têm sinais opostos, a deformação de cisalhamento é também a deformação máxima de cisalhamento real (v. Sec. 6.12). Temos

$$\frac{\gamma_{m\acute{a}x}}{2} = R = 283 \mu \quad \gamma_{m\acute{a}x} = 566 \mu$$

As deformações específicas normais correspondentes são ambas iguais a

$$\epsilon' = OC = 200 \mu$$

Os eixos de deformação de cisalhamento máxima são indicados na Fig. 6.66.

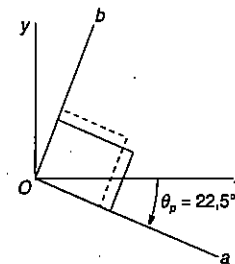


Fig. ex.6.65

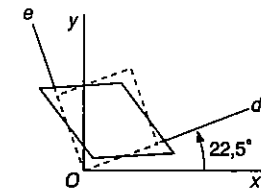


Fig. ex.6.66

*6.12 ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DAS DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS

Vimos na Sec. 6.5 que, para o caso mais geral de tensões, podemos determinar três eixos coordenados a, b e c , chamados eixos principais de tensão. Um pequeno cubo com faces perpendiculares aos três eixos está isento de tensões de cisalhamento (Fig. 6.25), isto é, são nulas as tensões τ_{ab}, τ_{bc} e τ_{ca} . Como foi lembrado na seção anterior, a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento se aplica quando a deformação do material é elástica e o material é homogêneo e isótropo. Nesse caso, então, $\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{ca} = 0$, o que quer dizer que os eixos a, b e c são os *eixos principais de deformação*. Um cubo pequeno de lado unitário, centrado em Q , com faces perpendiculares aos eixos principais, se deforma, transformando-se em um paralelepípedo retângulo de lados iguais a $1 + \epsilon_a, 1 + \epsilon_b$ e $1 + \epsilon_c$ (Fig. 6.67).

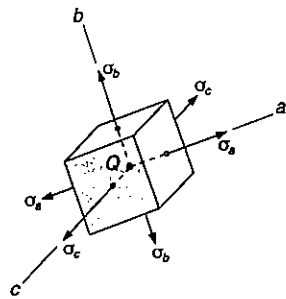


Fig. 6.25 (repetida)

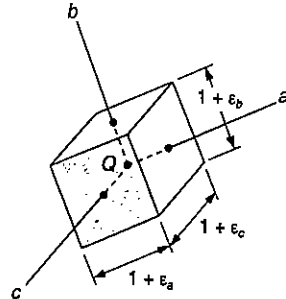


Fig. 6.67

Se o elemento da Fig. 6.67 girar em torno de um dos eixos principais em Q , digamos o eixo c (Fig. 6.68), o método de análise desenvolvido anteriormente para a transformação no estado plano de deformações pode ser usado na obtenção das componentes de deformações ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} , relativas às faces perpendiculares ao eixo c . Isso é possível, pois a dedução do método não envolveu nenhuma outra componente de deformação¹¹. Podemos então desenhar o círculo de Mohr usando os pontos A e B que correspondem aos eixos principais a e b (Fig. 6.69). De modo análogo, os círculos de diâmetros BC e CA podem ser usados para analisar a variação das deformações quando o elemento gira em torno dos eixos a e b , respectivamente.

¹¹ Podemos ver que as outras quatro faces do elemento permanecem retangulares e que suas arestas paralelas ao eixo c permanecem inalteradas.

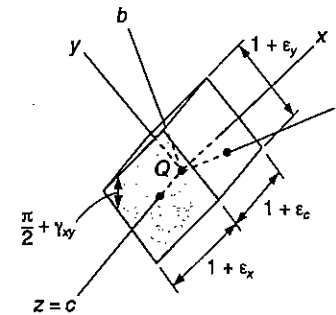


Fig. 6.68

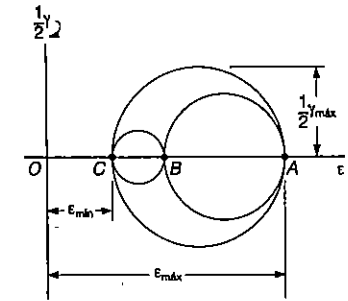


Fig. 6.69

A análise tridimensional de deformações pelo círculo de Mohr vai ficar limitada neste estudo às rotações em torno dos eixos principais (como foi o caso da análise de tensões), sendo usada para a determinação da deformação de cisalhamento máxima $\gamma_{m\acute{a}x}$ no ponto Q . Mas $\gamma_{m\acute{a}x}$ é igual ao diâmetro do maior dos três círculos indicados na Fig. 6.69. Temos então

$$\gamma_{m\acute{a}x} = |\epsilon_{m\acute{a}x} - \epsilon_{m\acute{i}n}| \tag{6.54}$$

onde $\epsilon_{m\acute{a}x}$ e $\epsilon_{m\acute{i}n}$ representam os valores *algébricos* das deformações máxima e mínima no ponto Q .

Voltando ao caso particular do *estado plano de deformações*, se selecionamos os eixos x e y como contidos no plano das deformações, vamos ter $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Assim o eixo z é um dos eixos principais em Q e o ponto correspondente no diagrama de círculo de Mohr é a origem O , onde $\epsilon = \gamma = 0$. Se os pontos A e B que definem os eixos principais no plano das deformações ficam situados em lados opostos em relação à origem O (Fig. 6.70a), as deformações principais correspondentes representam a máxima e a mínima deformações específicas no ponto Q . Ao mesmo tempo, a máxima deformação de cisalhamento no plano das deformações, correspondente aos pontos D e E , é igual à deformação de cisalhamento máxima em Q . Se, por outro lado, A e B ficarem situados no mesmo lado da origem O (Fig. 6.70b), isto é, se ϵ_a e ϵ_b têm o mesmo sinal, a máxima deformação de cisalhamento é definida pelos pontos D' e E' no círculo de diâmetro OA , e vamos ter $\gamma_{m\acute{a}x} = \epsilon_{m\acute{a}x}$

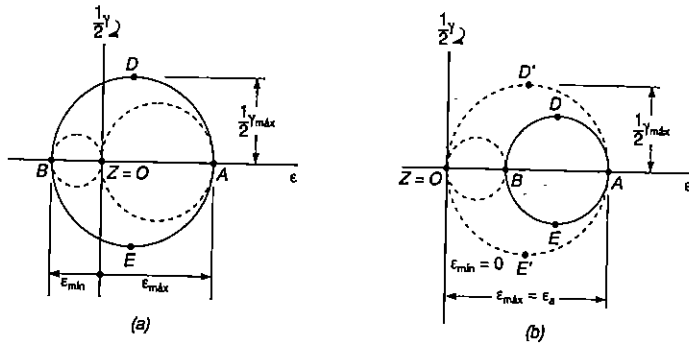


Fig. 6.70 Círculo de Mohr para estado plano de deformações.

Passemos agora a considerar um caso particular de *estado plano de tensões* que é encontrado em uma placa fina ou na superfície livre de um elemento estrutural ou de um componente de máquina (Sec. 6.1). Adotando os eixos x e y no plano das tensões, temos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, o que mostra que o eixo z é um dos três eixos principais de tensão. Como já vimos anteriormente, se a deformação é elástica e o material é homogêneo e isotrópico, a Lei de Hooke leva a $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; assim, o eixo z é também um eixo principal de deformação, podendo ser usado o círculo de Mohr para a análise das transformações de deformações no plano xy . De qualquer modo, como veremos agora, a Lei de Hooke *não* implica que $\epsilon_z = 0$; realmente, um estado plano de tensões não resulta, em geral, em um estado plano de deformações¹².

Chamando de a e b os eixos principais no plano das tensões, e de c o eixo perpendicular a esse plano, fazemos $\sigma_x = \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_b$ e $\sigma_z = 0$ nas Eqs. 2.28 para a Lei de Hooke generalizada (Sec. 2.12). Vamos escrever

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \quad (6.55)$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \quad (6.56)$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \quad (6.57)$$

Somando as Eqs. 6.55 e 6.56, membro a membro, temos

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1 - \nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \quad (6.58)$$

¹² Ver nota no rodapé da p. 664.

Calculando o valor de $\sigma_a + \sigma_b$ na Eq. 6.58 e substituindo-o na Eq. 6.57, escrevemos

$$\epsilon_c = \frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \quad (6.59)$$

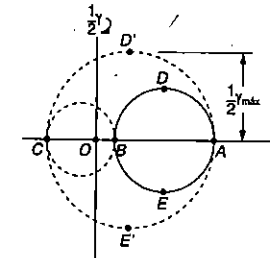


Fig. 6.71

A relação obtida define a terceira deformação principal em função das deformações principais no plano das deformações. Se o ponto B se situa entre A e C no diagrama de círculo de Mohr (Fig. 6.71), vemos que a deformação de cisalhamento máxima é igual ao diâmetro CA do círculo que corresponde a uma rotação em torno do eixo b , fora do plano de tensões.

EXEMPLO 6.5

Fitas para a medição de deformações foram colocadas na superfície de um componente de máquina, com várias direções. Como resultado das medições realizadas, ficou estabelecido que as deformações específicas principais na superfície livre são $\epsilon_a = +400 \mu$ e $\epsilon_b = -50 \mu$. Sabendo-se que o coeficiente de Poisson para o material é 0,30 determinar: (a) a máxima deformação de cisalhamento no plano das deformações; (b) o valor real da máxima deformação de cisalhamento próximo à superfície do componente.

(a) **Deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações.** Desenhemos o círculo de Mohr usando os pontos A e B que correspondem às deformações principais dadas (Fig. 6.72). A deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações é definida pelos pontos D e E e é igual ao diâmetro do círculo de Mohr:

$$\gamma_{\max(\text{no plano das deformações})} = 400 \mu + 50 \mu = 450 \mu$$

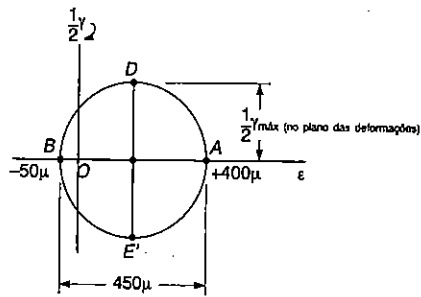


Fig. ex.6.72

(b) **Deformação de cisalhamento máxima.** Determinemos inicialmente a terceira deformação principal ϵ_c . Uma vez que temos um estado plano de tensões na superfície do componente de máquina, usaremos a Eq. 6.59 escrevendo

$$\epsilon_c = \frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0,30}{0,70} (400 \mu - 50 \mu) = -150 \mu$$

Desenhando o círculo de Mohr pelos pontos A e C e outro círculo pelos pontos B e C (Fig. 6.73), encontramos que o valor da máxima deformação de cisalhamento é igual ao diâmetro CA:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = 400 \mu + 150 \mu = 550 \mu$$

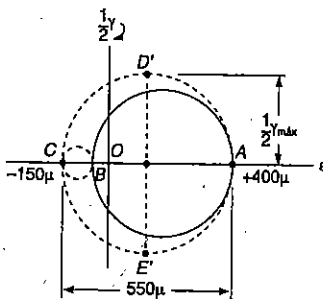


Fig. ex.6.73

Vemos que, apesar de ϵ_a e ϵ_b possuírem sinais opostos, a máxima deformação de cisalhamento no plano das tensões não representa a máxima deformação de cisalhamento real.

*6.13 MEDIDAS DAS DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS; ROSETAS DE DEFORMAÇÃO

As deformações específicas normais podem ser determinadas em qualquer direção na superfície de um elemento estrutural ou componente de máquina assinalando duas marcas superficiais A e B ao longo de uma linha na direção em que se deseja medir a deformação. A medida do segmento AB, antes e depois da carga, dá a deformação total δ desse segmento. Sendo L o comprimento indeformado de AB, calculamos a deformação específica ao longo de AB por $\epsilon_{AB} = \delta/L$.

Um método mais preciso de obtenção das deformações normais vem da utilização de fitas para medição das deformações. Uma fita para medições¹³ típica consiste de um arame condutor de eletricidade, dobrado da maneira indicada na Fig. 6.74, e colado a duas tiras de papel. Para tomarmos a medida da deformação ϵ_{AB} de um certo material na direção AB, o sensor é colocado à superfície do material, com os segmentos do arame voltados na direção de AB. Enquanto o material sofre um alongamento, o arame aumenta de comprimento e diminui de diâmetro, fazendo aumentar a resistência elétrica. Medindo-se a intensidade da corrente que passa pelo sensor, se consegue uma medida precisa e contínua da deformação específica normal ϵ_{AB} , enquanto o carregamento é aumentado.

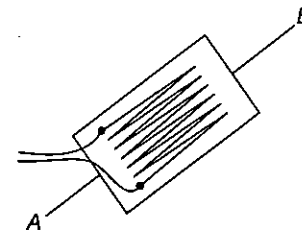


Fig. 6.74

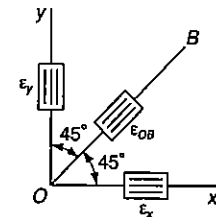


Fig. 6.75

13 Para facilidade de exposição, passaremos a designar por sensores as fitas para medição de deformações.

As componentes de deformação ϵ_x e ϵ_y podem ser determinadas em um ponto da superfície livre de um material pela simples medição das deformações normais específicas ao longo dos eixos x e y desenhados nesse ponto. Se usarmos um terceiro sensor para a direção da bissetriz OB do ângulo formado pelos eixos x e y , a Eq. 6.43 permite determinar a deformação de cisalhamento γ_{xy} (Fig. 6.75)

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (6.43)$$

Devemos observar que as componentes de deformações ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} em um certo ponto podem ser obtidas com resultados de medições normais feitas ao longo de três linhas *quaisquer* desenhadas por esse ponto (Fig. 6.76). Chamando de θ_1 , θ_2 e θ_3 os ângulos que cada uma das linhas faz com o eixo x , e de ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 as medições correspondentes, substituímos na Eq. 6.41 esses valores, obtendo as três equações

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (6.60)$$

que podem ser resolvidas simultaneamente para ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} ¹⁴.

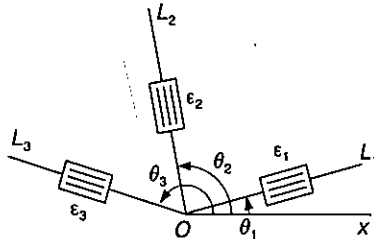


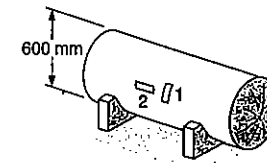
Fig. 6.76

O arranjo de sensores usado na medição de três deformações específicas ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 é conhecido pelo nome de *roseta*. A roseta usada na medição de deformações normais ao longo dos eixos x e y e de sua bissetriz é chamada de roseta a 45°. Outro tipo usado com frequência é a roseta a 60° (ver Prob. Resolvido 6.7).

14 Deve ser observado que a superfície livre, em que são medidas as deformações, está em estado plano de tensões, enquanto as Eqs. 6.41 e 6.43 foram deduzidas para um estado plano de deformações. Como já foi visto, no entanto, a normal à superfície livre é um eixo principal de deformações, de modo que permanecem válidas as deduções feitas na Sec. 6.10.

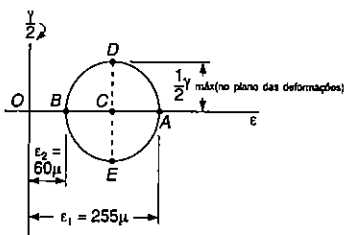
PROBLEMA RESOLVIDO 6.6

Um tanque cilíndrico que é usado para o transporte de gás sob pressão tem diâmetro interno de 600 mm e paredes de 20 mm de espessura. Foram colocados sensores na superfície da parede do tanque, nas direções longitudinal e transversal. As medições feitas indicam deformações específicas de 255 μ na direção transversal e 60 μ na direção longitudinal. Por intermédio de um ensaio de torção foi determinado o módulo de elasticidade do material, $G = 80$ GPa. Determinar: (a) a pressão interna no gás contido no tanque; (b) as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima na parede do tanque.



(a) **Pressão interna no tanque.** As deformações específicas são as deformações principais na superfície do tanque. Desenhemos o círculo de Mohr para deformações marcando os pontos A e B correspondentes às deformações principais. A máxima deformação de cisalhamento no plano das deformações é igual ao diâmetro do círculo.

$$\gamma_{\text{máx}}(\text{no plano das deformações}) = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255 \mu - 60 \mu = 195 \mu$$



Da Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento, temos

$$\begin{aligned} \tau_{\text{máx}}(\text{no plano de deformações}) &= G\gamma_{\text{máx}}(\text{no plano de deformações}) \\ &= (80 \times 10^9 \text{ Pa})(195 \times 10^{-6}) \\ &= 15,60 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Substituindo este valor e os dados na Eq. 6.33, escrevemos

$$\tau_{\text{máx}}(\text{no plano das deformações}) = \frac{pr}{4t} \quad 15,60 \text{ MPa} = \frac{p(0,3 \text{ m})}{4(0,02 \text{ m})}$$

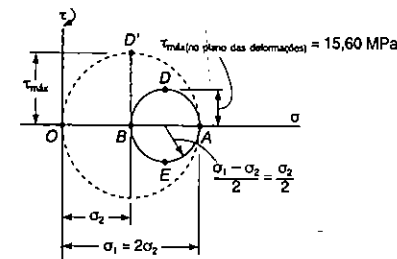
resolvendo p, temos

$$p = 4,16 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima.** Para um vaso cilíndrico de pressão de paredes finas, temos $\sigma_1 = 2\sigma_2$. Desenhemos o círculo de Mohr para tensões, obtendo

$$\sigma_2 = 2\tau_{\text{máx}}(\text{no plano das deformações}) = 2(15,60 \text{ MPa}) \quad \sigma_2 = 31,2 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2(31,2 \text{ MPa}) \quad \sigma_1 = 62,4 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



A tensão de cisalhamento máxima é igual ao diâmetro OA e corresponde a uma rotação de 45° em redor de um eixo longitudinal.

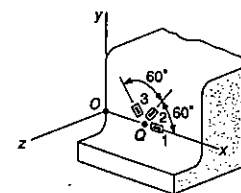
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \sigma_2 = 31,2 \text{ MPa} \quad \tau_{\text{máx}} = 31,2 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 6.7

Na superfície de uma base de máquina foram feitas medições de deformações em um ponto Q, através de uma roseta a 60°, obtendo-se os seguintes resultados:

$$\epsilon_1 = 40 \mu \quad \epsilon_2 = 980 \mu \quad \epsilon_3 = 330 \mu$$

Usando os eixos coordenados indicados, determinar para o ponto Q: (a) as componentes de deformações ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} ; (b) as deformações principais; (c) a deformação de cisalhamento máxima. (Adotar $\nu = 0,29$.)



(a) Componentes de deformação $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$. Para os eixos coordenados indicados

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 120^\circ$$

Substituindo esses valores nas Eqs. 6.60 vamos ter

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_x(1) + \epsilon_y(0) + \gamma_{xy}(0)(1) \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x(0,500)^2 + \epsilon_y(0,866)^2 + \gamma_{xy}(0,866)(0,500) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x(-0,500)^2 + \epsilon_y(0,866)^2 + \gamma_{xy}(0,866)(-0,500) \end{aligned}$$

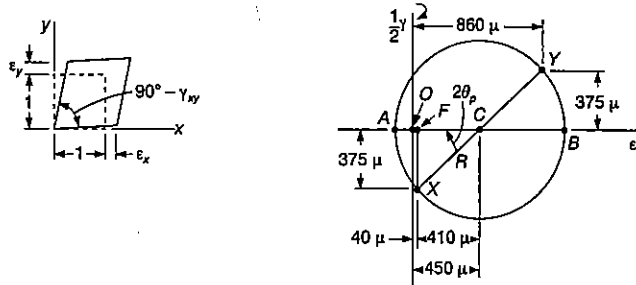
Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \quad \epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \quad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0,866}$$

Com os valores dados de ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 , encontramos

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 40 \mu & \epsilon_y &= \frac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] = +860 \mu \\ \gamma_{xy} &= (980 - 300)/0,866 = 750 \mu \end{aligned}$$

A figura mostra essas deformações em um elemento.



b) Deformações principais. Desenhamos o círculo de Mohr marcando os pontos $X(40, -375)$ e $Y(860, 375)$, lembrando que X é marcado abaixo do eixo horizontal porque o lado do elemento associado com ϵ_x gira no sentido anti-horário.

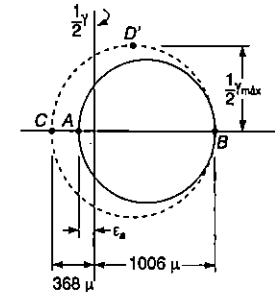
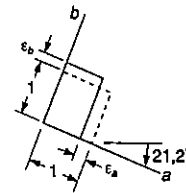
$$\epsilon_{méd} = \frac{1}{2}(860 \mu + 40 \mu) = 450 \mu$$

$$R = \sqrt{(375 \mu)^2 + (410 \mu)^2} = 556 \mu$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{375 \mu}{410 \mu} \quad 2\theta_p = 42,4^\circ \quad \theta_p = 21,2^\circ$$

Os pontos A e B correspondem às deformações principais. Temos

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \epsilon_{méd} - R = 450 \mu - 556 \mu & \epsilon_a &= -106 \mu \\ \epsilon_b &= \epsilon_{méd} + R = 450 \mu + 556 \mu & \epsilon_b &= +1006 \mu \end{aligned}$$



Vamos usar a Eq. 6.59 para a determinação da deformação principal ϵ_c , uma vez que $\sigma_z = 0$ na superfície.

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0,29}{1-0,29}(-106 \mu + 1006 \mu)$$

$$\epsilon_c = -368 \mu$$

(c) Deformação de cisalhamento máxima. Marcando o ponto C e desenhando o círculo de Mohr pelos pontos B e C , vamos obter o ponto D' , escrevendo então

$$\frac{1}{2} \gamma_{máx} = \frac{1}{2}(1006 \mu + 368 \mu) \quad \gamma_{máx} = 1374 \mu$$

PROBLEMAS

6.116 a 6.119 Para o dado estado plano de deformações, usar os métodos da Sec. 6.10 para determinar o estado de deformação associado aos eixos x' e y' , que foram girados de um ângulo θ , no sentido mostrado.

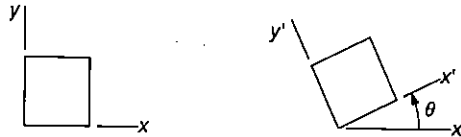


Fig. P6.116 a P6.123

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
6.116 e 6.120	+ 500 μ	- 300 μ	0	25°)
6.117 e 6.121	+ 350 μ	0	+ 120 μ	15°)
6.118 e 6.122	- 240 μ	+ 320 μ	- 330 μ	65°)
6.119 e 6.123	+ 240 μ	+ 160 μ	+ 150 μ	60°)

6.120 a 6.123 Para o dado estado plano de deformações, usar o círculo de Mohr para determinar o estado de deformação associado aos eixos x' e y' , que foram girados de um ângulo θ , no sentido mostrado.

6.124 a 6.127 Para o estado plano de deformação, usar o círculo de Mohr para determinar: (a) a orientação e a intensidade das deformações específicas normais principais; (b) a máxima deformação específica de cisalhamento, no plano; (c) a máxima deformação específica de cisalhamento.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
6.124	+ 320 μ	+ 160 μ	+ 300 μ
6.125	+ 300 μ	+ 60 μ	+ 100 μ
6.126	+ 80 μ	+ 320 μ	- 70 μ
6.127	- 180 μ	- 260 μ	+ 315 μ

6.128 e 6.129 Em um ponto da superfície de uma placa fina foi determinado o estado de deformações. Sabendo-se que a superfície da placa está isenta de tensões e o coeficiente de Poisson é 0,30, determinar: (a) a orientação e a intensidade das deformações principais; (b) a máxima deformação específica de cisalhamento, no plano; (c) a máxima deformação específica de cisalhamento.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
6.128	+ 48 μ	+ 92 μ	+ 240 μ
6.129	- 280 μ	0	- 165 μ

6.130 Um quadrado ABCD de 50 mm de lado é riscado sobre a superfície de uma placa fina, quando a placa está sem carga. Depois da placa ser carregada, observou-se que os comprimentos dos lados AB e AD foram aumentados, respectivamente, de $7,62 \times 10^{-3}$ mm e $1,27 \times 10^{-2}$ mm, enquanto que o ângulo DAB teve um decréscimo de $0,240 \times 10^{-3}$ rad. Sabendo-se que o coeficiente de Poisson é 1/3, determinar: (a) a orientação das deformações específicas normais principais; (b) a máxima deformação específica de cisalhamento, no plano; (c) a máxima deformação específica de cisalhamento.

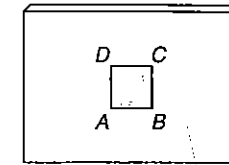


Fig. P6.130 e P6.131

6.131 Um quadrado ABCD, de 15 mm de lado é riscado sobre a superfície de uma placa fina, quando a placa está sem carga. Depois da placa ser carregada, observou-se que o comprimento do lado AB diminuiu em 12 μ m, enquanto que o comprimento AD permaneceu inalterado e o ângulo DAB teve um acréscimo de $0,180 \times 10^{-3}$ rad. Sabendo-se que o coeficiente de Poisson é 1/3, determinar: (a) a orientação e a intensidade das deformações específicas normais principais; (b) a máxima deformação específica de cisalhamento, no plano; (c) a máxima deformação específica de cisalhamento.

6.132 As deformações específicas normais determinadas com o uso da roseta da figura, colada na superfície de um componente estrutural, são:

$$\epsilon_1 = + 110 \mu \quad \epsilon_2 = + 212,5 \mu \quad \epsilon_3 = + 240 \mu$$

Determinar: (a) a orientação e a intensidade das deformações específicas normais, no plano da roseta; (b) a máxima deformação de cisalhamento, no plano.

6.133 As deformações específicas normais determinadas com o uso de uma roseta colada, como mostrado, na superfície de um componente estrutural, são:

$$\epsilon_1 = - 93,1 \mu \quad \epsilon_2 = - 385 \mu \quad \epsilon_3 = + 210 \mu$$

Determinar: (a) a orientação e a intensidade das deformações específicas normais no plano da roseta; (b) a máxima deformação de cisalhamento, no plano.

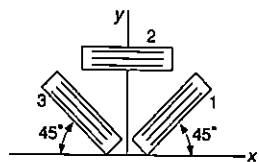


Fig. P6.132

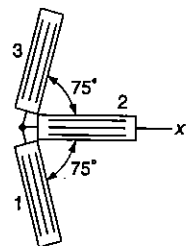


Fig. P6.133

6.134 As seguintes leituras foram obtidas, com uma roseta de deformação colada à superfície de um componente de máquina:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= -57,5 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} & \epsilon_2 &= -57,5 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \\ \epsilon_4 &= +220 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

Pede-se: (a) Qual deveria ser a leitura do extensômetro 3? (b) Determinar a máxima deformação específica de cisalhamento no plano da roseta.

6.135 As seguintes leituras foram obtidas, com uma roseta de deformação colada à superfície de um componente de máquina:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= -90 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} & \epsilon_3 &= -190 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \\ \epsilon_4 &= -240 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

Pede-se: (a) Qual deveria ser a leitura do extensômetro 1? (b) Determinar a máxima deformação específica de cisalhamento no plano da roseta.

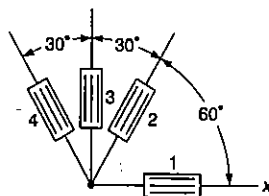


Fig. P6.134 e P6.135

6.136 Para o Prob. 6.132 e considerando $\nu = 0,30$, determinar: (a) as três deformações específicas normais no ponto onde as medidas foram feitas; (b) a máxima deformação específica de cisalhamento nesse ponto. (Nota: Lembrar que a superfície livre de um componente estrutural ou de máquina está em um estado plano de tensões.)

6.137 Resolver o Prob. 6.136, com os dados do Prob. 6.133.

6.138 Resolver o Prob. 6.136, com os dados do Prob. 6.134.

6.139 Resolver o Prob. 6.136, com os dados do Prob. 6.135.

6.140 e 6.141 As deformações abaixo foram determinadas na superfície da base de uma máquina de ferro fundido. Sabendo-se que $E = 70 \text{ GPa}$ e $G = 28 \text{ GPa}$, determinar os planos principais e as tensões principais: (a) pela determinação do correspondente estado plano de tensões. (Usar Eq. (2.36); Eq. (2.43); e as duas primeiras equações do Prob. 2.76); e então, usar o círculo de Mohr para tensões; (b) Usando o círculo das deformações principais; e então, determinar as correspondentes tensões.

6.140 $\epsilon_x = +210 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ $\epsilon_y = +50 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$

$\gamma_{xy} = -300 \times 10^{-6} \text{ rad}$

6.141 $\epsilon_x = -360 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ $\epsilon_y = -200 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$

$\gamma_{xy} = +330 \times 10^{-6} \text{ rad}$

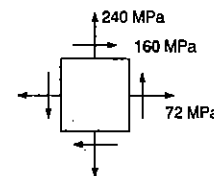


Fig. P6.142

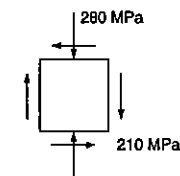


Fig. P6.143

6.142 e 6.143 O estado plano de tensões mostrado é conhecido na superfície de um componente de máquina, feito de aço de alta resistência. Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$ e $G = 80 \text{ GPa}$, determinar a orientação e a intensidade das três deformações específicas normais principais: (a) pela determinação do correspondente estado de deformação. (Usar a Eq. (2.43), e Eqs. (2.38)); e então, usar o círculo de Mohr para

deformação; (b) Usando o círculo de Mohr para tensões, determinar os planos principais e as tensões principais; e então, determinar as correspondentes deformações específicas normais.

6.144 Um único extensômetro de deformação é colado a um eixo de transmissão maciço de aço, com 100 mm de diâmetro e formando um ângulo de 25° com uma linha paralela ao eixo da peça. Sabendo-se que $G = 80 \text{ GPa}$, determinar o torque T indicado, se a leitura do extensômetro acusa $300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$.

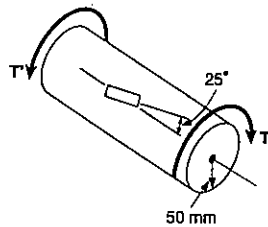


Fig. P6.144

6.145 Um único extensômetro de deformação, formando um ângulo de 18° com um plano horizontal, é usado para determinar a pressão do tanque cilíndrico de aço mostrado. O tanque tem espessura uniforme de 6,35 mm, diâmetro de 600 mm e é feito de um aço com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,30$. Determinar a pressão no tanque, uma vez que o extensômetro nos fornece uma deformação específica de $280 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$.

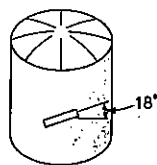


Fig. P6.145

6.146 Uma barra de aço AB , com $40 \times 150 \text{ mm/mm}$ de seção transversal, suporta uma carga P na extremidade B . Um único extensômetro, formando um ângulo de 45° com a horizontal, é colado à superfície da barra em um ponto C localizado a 400 mm da extremidade B e a 50 mm abaixo da borda superior da barra. Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,30$, determinar a intensidade da carga P , uma vez que através do extensômetro obtemos uma leitura de 240μ .

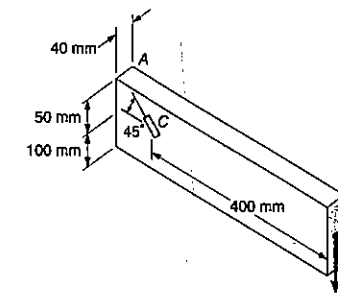


Fig. P6.146

6.147 Para a barra do Prob. 6.146, determinar a leitura que poderia ser obtida para vários carregamentos, se o extensômetro estivesse localizado em um ponto diretamente acima, distante 25 mm do ponto C , e com mesma orientação.

6.148 Nós expressamos por ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 as três medidas de deformação específica normal feitas com uma roseta à 60°. Pede-se: (a) Mostrar que a soma destas deformações e a soma do quadrado de suas diferenças são ambas independentes da orientação da roseta, e respectivamente iguais a:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_{méd} \quad (1)$$

e

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 = (4,5R^2) \quad (2)$$

onde $\epsilon_{méd}$ é a abscissa do centro do círculo de Mohr para as correspondentes deformações e R é o raio deste círculo; (b) Sabendo-se que as seguintes medidas foram feitas com esta roseta, em um dado ponto de um componente de máquina,

$$\epsilon_1 = +250 \mu \quad \epsilon_2 = +683 \mu \quad \epsilon_3 = -183 \mu$$

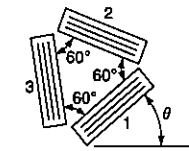


Fig. P6.148

determinar, neste ponto, as deformações específicas normais, no plano, e a máxima deformação específica de cisalhamento, no plano.

REVISÃO E SUMÁRIO

A primeira parte deste capítulo foi voltada ao estudo da *transformação das tensões* devido à rotação dos eixos, e suas aplicações na solução de problemas de engenharia; e a segunda parte, para o estudo similar da *transformação das deformações específicas*.

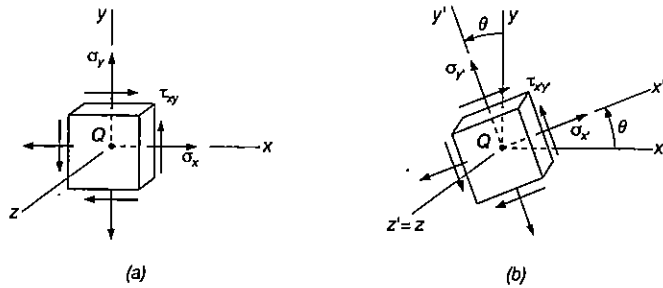


Fig. 6.5

Análise das tensões planas

Considerando inicialmente um *estado plano de tensões* em um dado ponto Q (Sec. 6.2) e denotando por σ_x , σ_y e τ_{xy} as componentes das tensões associadas com o elemento mostrado na Fig. 6.5a, nós desenvolvemos as seguintes fórmulas, que nos fornecem as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, associadas ao elemento depois de ter sofrido a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 6.5b):

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6.5)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6.7)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6.6)$$

Na Sec. 6.3, nós determinamos os valores do ângulo de rotação θ_p , que correspondem aos valores, máximo e mínimo, da tensão normal no ponto Q. Escrevemos

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.12)$$

Plano principais/tensões principais

Os dois valores de θ_p são defasados de 90° (Fig. 6.9) e definem os *planos de tensões principais* no ponto Q. Os correspondentes valores das tensões normais são as denominadas *tensões principais* em Q; obtemos

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.14)$$

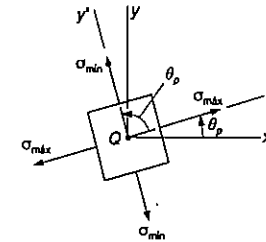


Fig. 6.9

Máxima tensão de cisalhamento no plano

Também notamos que o correspondente valor da tensão de cisalhamento é nula. Depois, determinamos os valores do ângulo θ_c , onde ocorre o maior valor da tensão de cisalhamento. Escrevemos

$$\operatorname{tg} 2\theta_c = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (6.15)$$

Os dois valores obtidos para θ_c são separados de 90° (Fig. 6.10). Também notamos que os planos de máxima tensão de cisalhamento estão a 45° dos planos principais. O valor máximo da tensão de cisalhamento, para uma rotação *no plano das tensões* é

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.16)$$

e os correspondentes valores das tensões normais são:

$$\sigma' = \sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (6.17)$$

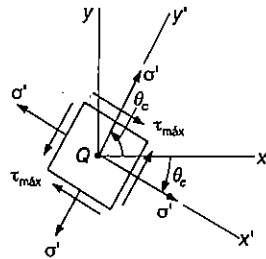


Fig. 6.10

Círculo de Mohr para tensões

Vimos na Sec. 6.4 que o círculo de Mohr fornece um método alternativo, baseado em considerações geométricas simples, para a análise da transformação das tensões planas. Dado o estado de tensões mostrado na Fig. 6.15a, plotamos o ponto X de coordenadas $\sigma_x - \tau_{xy}$ e o ponto Y de coordenadas $\sigma_y + \tau_{xy}$ (Fig. 6.15b). Desenhando o círculo de diâmetro XY, obtemos o círculo de Mohr. As abscissas dos pontos de interseção A e B do círculo com o eixo horizontal representam as tensões principais, e o ângulo de rotação que traz o diâmetro XY para AB é o ângulo dobrado θ_p , que define a orientação dos planos principais na Fig. 6.15a, sendo que ambos os ângulos têm o mesmo sentido. Também notamos que o diâmetro DE define a máxima tensão de cisalhamento e a orientação do plano correspondente (Fig. 6.17b) (Exemplo 6.2, Probs. Resolvidos 6.2 e 6.3)

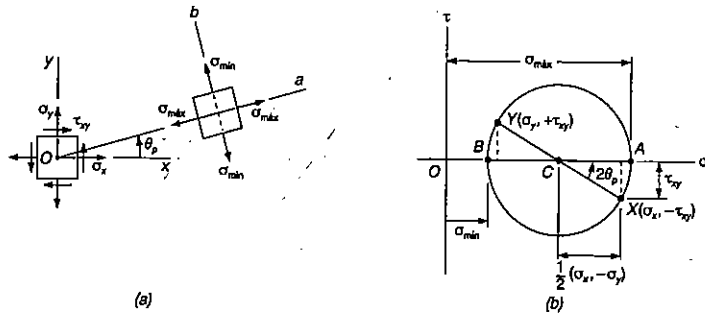


Fig. 6.15

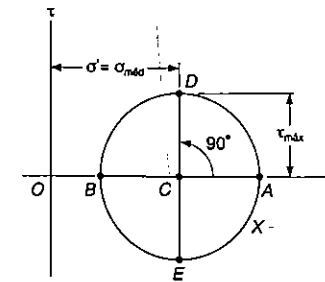


Fig. 6.17b

Estado geral de tensões

Considerando um estado geral de tensões, caracterizado por seis componentes de tensão (Sec. 6.5), mostramos que a tensão normal, sobre um plano de orientação arbitrária, pode ser expresso por uma fórmula quadrática de cossenos diretores, da normal a esse plano. Isto prova a existência de três eixos principais de tensão e três tensões principais em qualquer ponto. Girando um pequeno elemento cúbico em torno de cada um dos três eixos principais (Sec. 6.6), desenvolvemos os círculos de Mohr correspondentes que produzem os valores $\sigma_{máx}$, $\sigma_{mín}$ e $\tau_{máx}$ (Fig. 6.27). No caso particular de tensões planas, e se os eixos x e y forem escolhidos no plano das tensões, o ponto C coincide com a origem O. Se A e B estão localizados em lados opostos em relação a O, a máxima tensão de cisalhamento é igual a máxima tensão de cisalhamento no plano, como determinado na Sec. 6.3 e 6.4. Se A e B estão localizados do mesmo lado de O, nada podemos dizer. Se $\sigma_a > \sigma_b > 0$, por exemplo, a máxima tensão de cisalhamento será igual a $\frac{1}{2} \sigma_a$ e corresponde a uma rotação "fora do plano" das tensões (veja Sec. 6.6).

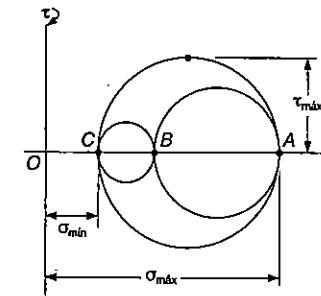


Fig. 6.27

Critérios de escoamento para materiais dúteis

Os *critérios de escoamento* para materiais dúteis, no estado plano de tensões, foram desenvolvidos na Sec. 6.7. Para prever se um componente estrutural ou de máquina irá falhar em algum ponto crítico devido ao escoamento do material, nós inicialmente determinamos as tensões principais σ_a e σ_b neste ponto, para uma dada condição de carregamento.

Então plotamos as coordenadas dos pontos σ_a e σ_b . Se este ponto cair dentro de uma certa área, o componente está seguro; se cair fora dela, o componente irá falhar. A área usada com o *critério da máxima tensão de cisalhamento* é mostrada na Fig. 6.38 e a área usada com o *critério da máxima energia de distorção*, na Fig. 6.39. Notamos que ambas as áreas dependem do valor da tensão de escoamento σ_e do material.

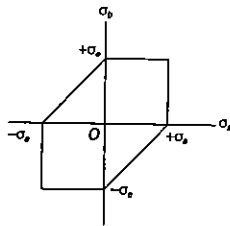


Fig. 6.38

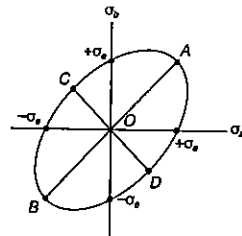


Fig. 6.39

Critérios de fratura para materiais quebradiços

Os *critérios de fratura* para materiais quebradiços ou frágeis, no estado plano de tensões, foram desenvolvidos na Sec. 6.8, de maneira similar. O mais comumente usado é o *critério de Mohr*, que se utiliza de resultados de vários tipos de testes disponíveis para um dado material. A área sombreada mostrada na Fig. 6.45b é usada depois de que as tensões últimas σ_{UT} e σ_{UC} forem determinadas, respectivamente, pelos ensaios de tração e compressão. Novamente, as tensões principais σ_a e σ_b são determinadas em um certo ponto de um componente estrutural ou de máquina, que está sendo investigado. Se o correspondente ponto cair dentro da área sombreada, o componente está seguro de falha; se cair fora, o componente irá romper.

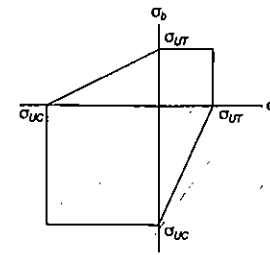


Fig. 6.45b

Vasos de pressão cilíndricos

Na Sec. 6.9, nós discutimos as tensões em *vasos de pressão de paredes finas* e desenvolvemos fórmulas que relacionam as tensões nas paredes dos vasos com a *pressão p* do fluido que eles contém. No caso de um *vaso cilíndrico* de raio interno r , e espessura t (Fig. 6.47), obtivemos as seguintes expressões para a *tensão tangencial* σ_1 e para a *tensão longitudinal* σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (6.30, 6.31)$$

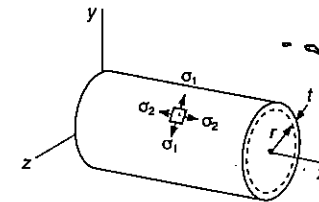


Fig. 6.47

Nós também encontramos que a *máxima tensão de cisalhamento* ocorre fora do plano das tensões e vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (6.34)$$

Vasos de pressão esféricos

No caso de um *vaso de pressão esférico*, de raio interno r e espessura t (Fig. 6.51), encontramos que as duas tensões principais são iguais:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{6.36}$$

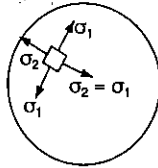


Fig. 6.51

Novamente, a *máxima tensão de cisalhamento* ocorre fora do plano das tensões; ou seja

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{6.37}$$

Análise das deformações planas

A última parte do capítulo foi voltado à *análise das deformações específicas*. Nas Secs. 6.10 e 6.11, discutimos a transformação das *deformações específicas planas* e introduzimos o *círculo de Mohr para o estado plano de deformações*. A discussão foi semelhante ao correspondente estudo da transformação das tensões no estado plano, exceto que, onde era usada a tensão de cisalhamento τ , agora usamos $\frac{1}{2}\gamma$, ou seja, *metade da deformação específica de cisalhamento*. As fórmulas obtidas para a transformação das deformações específicas, quando os eixos sofrem uma rotação de um ângulo θ , são:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \tag{6.44}$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \tag{6.45}$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \tag{6.49}$$

Círculo de Mohr para deformações

Usando o círculo de Mohr para deformações (Fig. 6.61), nós também obtemos as seguintes relações, que definem o ângulo de rotação θ_p correspondente aos *eixos principais de deformação* e aos valores das *deformações específicas principais* $\epsilon_{\text{máx}}$ e $\epsilon_{\text{mín}}$:

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{6.52}$$

$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{méd}} + R \quad \text{e} \quad \epsilon_{\text{mín}} = \epsilon_{\text{méd}} - R \tag{6.51}$$

onde:

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{6.50}$$

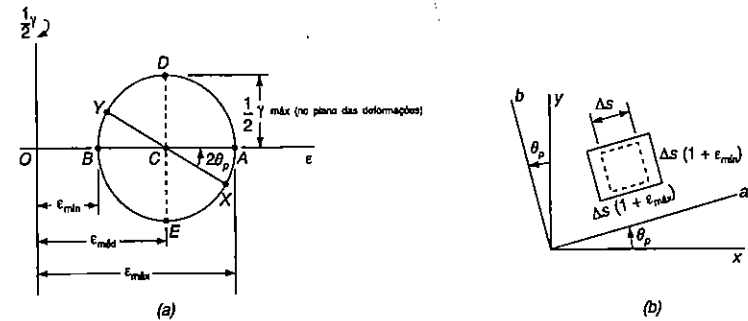


Fig. 6.61

A *máxima deformação específica de cisalhamento* encontrada para uma rotação, no plano das deformações, é:

$$\gamma_{\text{máx(no plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{6.53}$$

A Sec. 6.12 foi voltada à *análise tridimensional de deformações*, com aplicações para a determinação da *máxima deformação específica de cisalhamento*, nos casos particulares de *deformações planas e tensões planas*. No caso de *tensões no estado*

plano, também encontramos que a deformação principal ϵ_c , numa direção perpendicular ao plano das tensões, poderia ser expressa como segue, em termos das deformações específicas principais "no plano", ϵ_a e ϵ_b :

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_a + \epsilon_b) \quad (6.59)$$

Extensômetros

Finalmente, nós discutimos na Sec. 6.13 o uso dos *extensômetros elétricos* para a medição de deformações normais específicas na superfície de um elemento estrutural ou componente de máquina. Considerando uma *roseta de deformação*, consistindo de três extensômetros alinhados ao longo de linhas que formam, respectivamente, os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 em relação ao eixo x (Fig. 6.76), nós escrevemos as seguintes relações, que, através das medições correspondentes ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , dos extensômetros caracterizam o estado plano de deformações específicas naquele ponto:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy} \sin\theta_1 \cos\theta_1 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \sin^2\theta_2 + \gamma_{xy} \sin\theta_2 \cos\theta_2 \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \sin^2\theta_3 + \gamma_{xy} \sin\theta_3 \cos\theta_3 \end{aligned} \quad (6.60)$$

Estas equações podem ser resolvidas para ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} desde que ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 tenham sido determinadas.

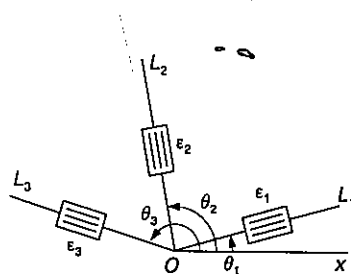


Fig. 6.76

PROBLEMAS DE REVISÃO

6.149 O círculo de Mohr mostrado corresponde ao estado de tensões dado nas Figs. 6.5a e b, Sec. 6.1. Notando que $\sigma_x = (OC' - CX') \cos(2\theta_p - 2\theta)$ e que $\tau_{x'y'} = (CX') \sin(2\theta_p - 2\theta)$, desenvolver as expressões σ_x e $\tau_{x'y'}$, dadas nas Eqs. (6.5) e (6.6), respectivamente. (Sugestão: Usar $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ e $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.)

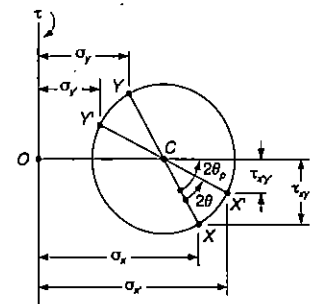


Fig. P6.149

6.150 Sabendo-se que o diâmetro da barra de aço ABD é 30 mm, determinar: (a) os planos principais; (b) as tensões principais; (c) a máxima tensão de cisalhamento, no ponto H.

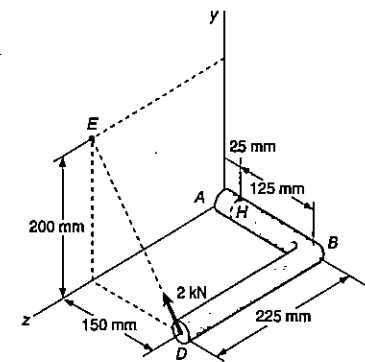


Fig. P6.150

6.151 Para a barra do Prob. 6.150, e sabendo-se que para o aço usado $E = 200$ GPa e $\nu = 0,30$, determinar as três deformações específicas principais e a máxima deformação específica de cisalhamento, no ponto H .

6.152 e 6.153 Para o estado plano de tensões mostrado, determinar: (a) os planos principais; (b) as tensões principais; (c) a máxima tensão de cisalhamento.

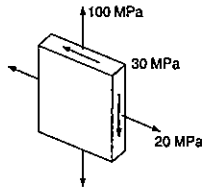


Fig. P6.152

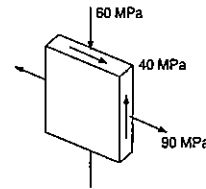


Fig. P6.153

6.154 As fibras de uma peça de madeira formam um ângulo de 15° com a vertical. Para o estado plano de tensões mostrado, determinar: (a) a tensão de cisalhamento, no plano, paralela às fibras; (b) a tensão normal perpendicular às fibras.

6.155 O vaso de pressão cilíndrico mostrado é fabricado com chapa de aço de 6,35 mm de espessura, soldada ao longo de uma hélice, formando um ângulo de 30° com a horizontal. Sabendo-se que a tensão normal admissível perpendicular à solda é de 80 MPa, determinar a maior pressão que pode ser usada no vaso.

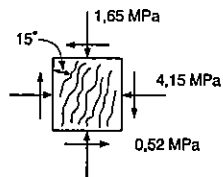


Fig. P6.154

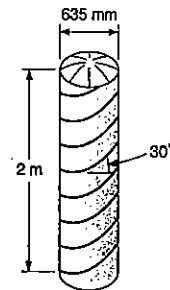


Fig. P6.155

6.156 Um vaso de pressão esférico é fabricado com chapa de aço de 100 mm de espessura e com tensão última igual a 360 MPa. Sabendo-se que uma pressão máxima admissível de 4,5 MPa é desejada, e que um coeficiente de segurança de 4,0 é requerido, determinar o máximo diâmetro interno admissível para o vaso.

6.157 Para o estado de tensões mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento, quando: (a) $\sigma_y = +80$ MPa; (b) $\sigma_y = -80$ MPa.

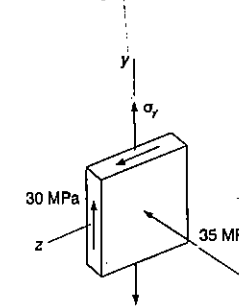


Fig. P6.157

6.158 Um extensômetro é colado horizontalmente, numa superfície cilíndrica de um vaso de pressão de 600 mm de diâmetro externo e 7,50 mm de espessura de parede. Sabendo-se que $E = 200$ GPa e $\nu = 0,25$ e que o extensômetro indica 120μ , determinar: (a) as três deformações específicas principais na superfície cilíndrica do vaso; (b) as tensões principais na parede; (c) a pressão medida dentro do vaso.

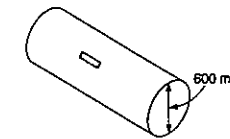


Fig. P6.158

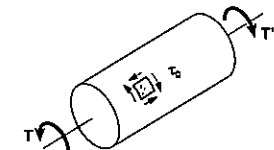


Fig. P6.159

6.159 Uma barra de alumínio fundido é feita de uma liga em que $\sigma_{UT} = 80$ MPa e $\sigma_{UC} = 200$ MPa. Sabendo-se que a intensidade T dos torques aplicados é gradual e crescente e usando o critério de Mohr, determinar a tensão de cisalhamento τ_0 para que possa ser esperada a ruptura.

6.160 O estado plano de tensões mostrado ocorre em uma barra feita de uma classe de aço, cuja tensão de escoamento à tração é de 310 MPa. Determinar o coeficiente de segurança, em relação ao escoamento, usando: (a) o critério da máxima tensão de cisalhamento; (b) o critério da máxima energia de distorção.

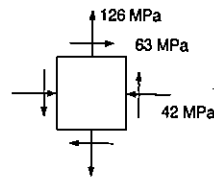


Fig. P6.160

Os problemas que seguem são para serem resolvidos com auxílio de um computador.

6.C1 Um estado plano de tensões é definido pelas componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} associadas com o elemento mostrado na Fig. a. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas ao elemento, depois de ser girado de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. b); (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.14, 6.16 e 6.18.

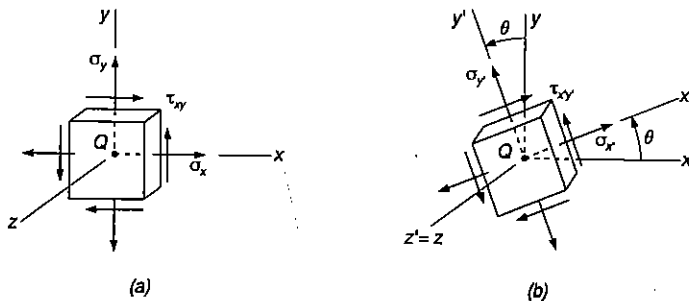


Fig. P6.C1

6.C2 Um estado plano de tensões é definido pelas componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} associadas ao elemento mostrado na Fig. a do Prob. 6.C1. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar os eixos principais, as tensões principais, a máxima tensão de cisalhamento, no plano, e a máxima tensão de cisalhamento; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.6, 6.8, 6.64 e 6.66.

6.C3 Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que, para um dado estado plano de tensões e uma dada tensão de escoamento de um material dútil, possa ser usado para determinar se o material irá escoar ou não. O programa poderá usar tanto o critério da máxima resistência ao cisalhamento, quanto o critério da máxima energia

de distorção. Ele deverá também imprimir os valores das tensões principais e, se o material não escoar, calcular o coeficiente de segurança; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.76, 6.78, 6.80 e 6.82.

6.C4 Pede-se: (a) Escrever um programa de computador, baseado no critério de fratura de Mohr para materiais quebradiços, que para um dado estado plano de tensões e, dados os valores de tensão última, na tração e na compressão, de um material, possa ser usado para determinar se a ruptura irá ocorrer. O programa deverá também imprimir os valores das tensões principais; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.88 até 6.91.

6.C5 Um estado plano de deformações é definido pelas componentes ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} associadas aos eixos x e y . Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular as componentes de deformação específica $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ e $\gamma_{x'y'}$ associadas aos eixos x' e y' , obtidos pela rotação dos eixos x e y , de um ângulo θ ; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.116 até 6.119.

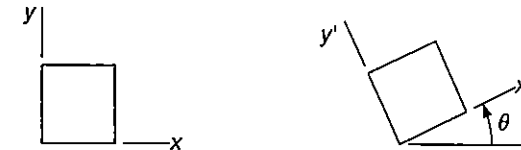


Fig. P6.C5

6.C6 Um estado plano de deformações é definido pelas componentes de deformação ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} associadas com os eixos x e y . Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a orientação e a intensidade das deformações específicas principais, a máxima deformação específica de cisalhamento no plano e a máxima deformação específica de cisalhamento; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.124 até 6.127.

6.C7 Um estado plano de deformações é definido pelas componentes de deformação específica ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} medidas em um ponto sobre a superfície de uma placa fina. Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a orientação e a intensidade das deformações específicas principais, a máxima deformação específica de cisalhamento no plano e a máxima deformação específica de cisalhamento; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.128 até 6.131.

6.C8 Uma roseta composta de três extensômetros formando, respectivamente, ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 com o eixo x , é colada à superfície livre de um componente de máquina, feito de um material com um dado coeficiente de Poisson ν . Pede-se: (a) Escrever um programa de computador que, com os dados obtidos dos extensômetros ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 , possa ser usado para calcular as componentes de deformação associadas aos eixos x e y , e para determinar

também a orientação e intensidade das três deformações específicas principais, a máxima deformação específica de cisalhamento no plano e a máxima deformação específica de cisalhamento; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 6.132, 6.134, 6.136 e 6.138.

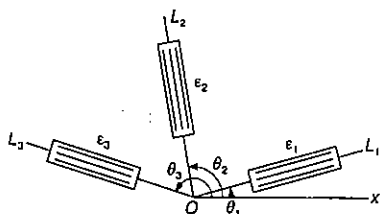


Fig. P6.C8

Capítulo 7

PROJETO DE VIGAS E EIXOS DE TRANSMISSÃO

7.1 INTRODUÇÃO

Nossa principal discussão neste capítulo será a de projetar vigas. Iremos verificar de que maneira devemos escolher o material e as dimensões da seção transversal de uma dada viga, de modo que ela não venha a falhar devido a um dado carregamento. Um outro aspecto importante do projeto de vigas é a estimativa da deflexão, para uma dada viga submetida à ação de um carregamento qualquer; este aspecto será analisado nos Capítulos 8 e 9¹.

Inicialmente iremos considerar *vigas prismáticas*, isto é, vigas retas com uma seção transversal uniforme, e notar que seu projeto depende primeiramente da determinação dos maiores valores de momento fletor e força cortante, gerados na viga por um dado carregamento (Sec. 7.2).

A determinação destes valores e as correspondentes seções críticas da viga onde ocorrem, é facilitada enormemente se nós desenharmos um *diagrama de forças cortantes* e um *diagrama de momento fletor* representando, respectivamente, a variação da força cortante V e do momento fletor M ao longo da viga. Os valores de V e M em vários pontos podem ser obtidos, tanto pelo desenho do diagrama de corpo livre, de sucessivas porções da viga (Sec. 7.3), ou de relações entre carga, força cortante e momento fletor, que serão desenvolvidos na Sec. 7.4.

Um outro método para a determinação dos valores máximos da força cortante e do momento fletor é baseado em expressões de V e M , em termos de *funções singulares* (Sec. 7.5).

¹ Um outro aspecto que deve ser considerado no projeto de vigas é a flambagem, que pode ocorrer em vigas que não são adequadamente restringidas, no sentido de impedir o movimento lateral. Neste capítulo vamos assumir que todas as vigas estão contraventadas, e a instabilidade lateral, portanto, não é possível de ocorrer.

Esta aproximação será discutida no Capítulo 8, para facilitar a determinação da declividade e da deflexão em vigas.

Na Sec. 7.6, nós discutiremos a distribuição das *tensões principais* ao longo da seção de uma viga e será mostrado que em alguns casos a máxima tensão normal pode ser maior que o valor Mc/I que ocorre na superfície da viga.

Levando em consideração os vários pontos apresentados nas seções precedentes, na Sec. 7.7, estudaremos um procedimento passo a passo de como projetar economicamente uma viga prismática. Uma particular atenção será dada às vigas de madeira, com uma seção retangular, e às vigas de perfil laminado de aço.

Na Sec. 7.8, iremos discutir o projeto de *vigas não-prismáticas*, isto é, o projeto de vigas com uma seção transversal variável. Pela escolha da forma e do tamanho da seção transversal variável, nós faremos o módulo resistente $W = I/c$ variando ao longo do comprimento da viga, da mesma forma que o momento fletor M . Assim seremos capazes de projetar vigas para que a máxima tensão normal, em cada seção, seja igual à tensão admissível. Estas vigas são chamadas *vigas de igual resistência*.

Na Sec. 7.9, discutiremos o projeto de eixos de transmissão, sujeitos a cargas transversais, assim como também a torques. Levaremos em consideração o efeito das tensões normais, devido à flexão, assim como o efeito das tensões de cisalhamento, devido à torção.

Finalmente, na Sec. 7.10, iremos analisar o estado de tensão em uma viga, num ponto localizado sob uma carga concentrada ou distribuída.

7.2 CONSIDERAÇÕES BÁSICAS PARA O PROJETO DE VIGAS PRISMÁTICAS

Vimos no Cap. 5 que uma viga de seção prismática submetida à ação de carregamento transversal pode apresentar tensões, normal e de cisalhamento, em qualquer seção transversal da viga. Vimos também na Sec. 4.5 que em regime elástico, a tensão normal σ_x em uma seção varia linearmente com a distância y do eixo neutro e o maior valor da tensão ocorre na fibra mais afastada do eixo neutro ($y = \pm c$). O valor de σ_x depende também do momento fletor M na seção, sendo que o maior valor ocorrerá na seção em que $|M|$ é máximo. Se substituirmos $|M|_{\text{máx}}$ em lugar de M na Eq. (4.15), vamos encontrar o valor máximo da tensão normal σ_m , que vamos designar por σ_m :

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}} C}{I} \quad (7.1)$$

A tensão correspondente pode ser de tração, como mostra a Fig. 7.1, ou de compressão. Como será visto na Sec. 7.3, em vigas com carga uniformemente distribuída e simplesmente apoiadas (Fig. 7.1), o momento máximo ocorre no meio do vão.

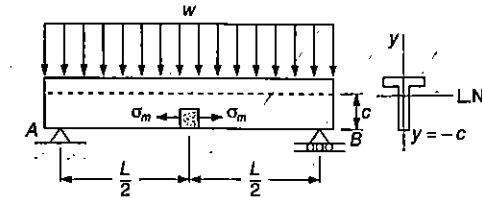


Fig. 7.1

O Capítulo 5 mostrou ainda que, para os tipos mais comuns de viga (vigas de seção retangular, perfis I e perfis de abas largas), a tensão de cisalhamento τ_{xy} em qualquer seção transversal é máxima na linha neutra. Como τ_{xy} depende do valor da força cortante V na seção, seu valor máximo vai ocorrer na linha neutra da seção onde $|V|$ é máximo. Se substituirmos $|V|_{\text{máx}}$ em lugar de V na Equação 5.10 vamos encontrar o valor máximo de τ_{xy} , que vamos designar por τ_m :

$$\tau_m = \frac{|V|_{\text{máx}} Q}{It} \quad (7.2)$$

onde t é a largura da seção transversal na linha neutra e Q o momento estático da área localizada acima ou abaixo da linha neutra em relação a essa linha. Como será visto na Sec. 7.3, em vigas com carga uniformemente distribuída e simplesmente apoiadas (Fig. 7.2), as seções onde ocorre força cortante máxima são as seções junto aos apoios da viga.

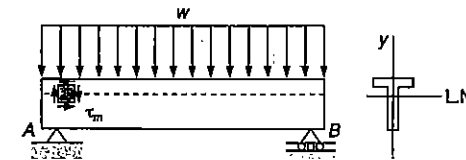


Fig. 7.2

O dimensionamento de uma viga fica geralmente condicionado ao valor $|M|_{\text{máx}}$ do momento fletor na viga. Devemos escolher o material, a forma e as dimensões da seção transversal de modo que o valor σ_m calculado pela Equação 7.1 não exceda o valor admissível da tensão normal σ_{adm} . Observamos que este critério é válido não só para materiais frágeis, que realmente apresentam ruptura a tração em uma seção transversal (Fig. 7.3a), mas também para os materiais dúteis, que se rompem em planos de tensão de cisalhamento máximo (Fig. 7.3b). De fato, o valor σ_{adm} para um dado material é baseado em dados obtidos de ensaio de tração, que provoca no material o mesmo estado de tensão que está representado na Fig. 7.3 (conf. Fig. 1.36).

No caso de vigas curtas, o dimensionamento pode ficar condicionado ao valor $|V|_{\text{máx}}$ da força cortante na viga. Devemos escolher o material, a forma e as dimensões da seção transversal de modo que o valor τ_m calculado pela Equação 7.2 não exceda o valor admissível da tensão de cisalhamento τ_{adm} . Observamos novamente que este critério é válido tanto para materiais frágeis como para materiais dúteis, uma vez que o estado de tensões em um ponto localizado na linha neutra da seção transversal (Fig. 7.4) é encontrado da mesma forma no corpo de prova submetido a um teste de torção (conf. Fig. 3.19).

Fica claro pelo que foi dito que o projeto de uma viga deve ser iniciado pela determinação das seções críticas da viga, onde ocorrem os valores máximos da força cortante e do momento fletor, bem como pelo cálculo dos valores $|M|_{\text{máx}}$ e $|V|_{\text{máx}}$. Esses cálculos se simplificam bastante, se construirmos um gráfico onde são marcados vários valores da força cortante V ou do momento fletor M para várias seções, em relação à distância x medida de uma das extremidades da viga. Esses gráficos são chamados *diagramas de forças cortantes* e *diagramas de momentos fletores*, e serão analisados nas Secs. 7.3 e 7.4. Outro método para a determinação dos valores máximos de momento fletor e de força cortante serão apresentados na Sec. 7.5 e são baseados no uso de *funções singulares*.

Às vezes, dependendo da forma da seção transversal e do valor da força cortante V na seção em que $|M| = |M|_{\text{máx}}$ pode acontecer que o valor máximo da tensão normal não ocorra em $y = \pm c$, mas em algum outro ponto da seção. Como será visto nas Secs. 7.6 e 7.7, uma combinação de valores altos de σ_x e τ_{xy} próximo à junção da alma e da aba de perfis I ou perfis de abas largas, pode resultar em um valor $\sigma_{\text{máx}}$ em um dos planos principais (Fig. 7.5), maior que o valor σ_m obtido pela Eq. 7.1.

Na Sec. 7.8 será discutido o dimensionamento de vigas *não-prismáticas*, isto é, vigas com seção transversal variável. Se escolhermos a forma e as dimensões da seção transversal variável de modo que o módulo resistente $W = I/c$ varie ao longo da via da mesma maneira que o momento fletor M , estamos projetando vigas em que a tensão normal máxima em cada seção pode ser igualada à tensão admissível. Essa viga é chamada *viga de igual resistência*.

Na Sec. 7.9 iremos considerar o projeto e dimensionamento de eixos de transmissão submetidos a carregamento transversal e a carregamento de torção ao mesmo tempo. Vamos levar em conta os efeitos da tensão normal provocada pela flexão e da tensão de cisalhamento provocada pela torção.

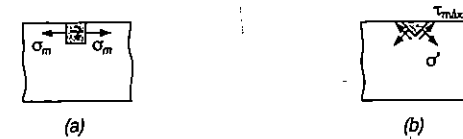


Fig. 7.3

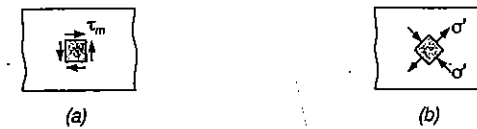


Fig. 7.4

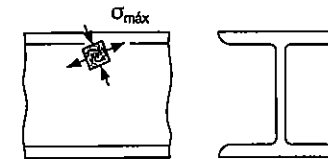


Fig. 7.5

Para finalizar, a Sec. 7.10 analisará o estado de tensões em uma viga, para um ponto situado sob carregamento concentrado ou distribuído.

7.3 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE

Como já foi citado, a determinação dos valores máximos absolutos da força cortante e do momento fletor fica bem facilitada se os valores de V e M são marcados em relação à distância x medida a partir de uma extremidade da viga. Além disso, veremos no Capítulo 8 que o estabelecimento de M como função de x é essencial para a determinação das deformações da viga.

Nos exemplos e problemas resolvidos que seguem, iremos obter o momento fletor e a força cortante em pontos escolhidos da viga, para desenharmos os diagramas de M e V . A obtenção desses valores será feita de maneira usual, passando uma seção no ponto onde queremos determiná-los e considerando o equilíbrio da parte da viga localizada à esquerda ou à direita da seção (Fig. 7.6).

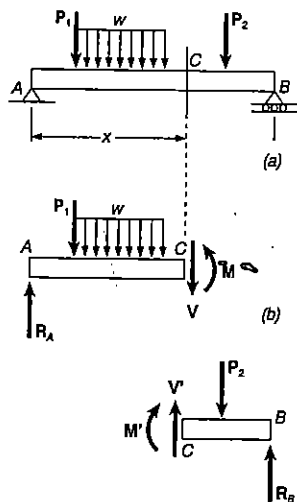


Fig. 7.6

Aproveitamos então para recordarmos a convenção de sinais já estabelecida para V e M (Secs. 5.2 e 4.2): a força cortante V e o momento fletor M são positivos em um ponto da viga quando os esforços internos solicitando a seção são dirigidos como indica a Fig. 7.7a. Essa convenção pode ser facilitada se observarmos que

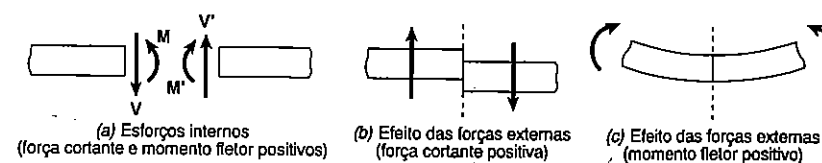


Fig. 7.7

1. A força cortante em C é positiva quando as forças externas (cargas e reações) que agem na viga tendem a cortar a viga em C como indica a Fig. 7.7b.
2. O momento fletor em C é positivo quando as forças externas atuando na viga tendem a flexionar a viga em C como indica a Fig. 7.7c.

Podemos ajudar a visualização se notarmos, como será visto no próximo exemplo, que a situação descrita pela Fig. 7.7, que corresponde a valores positivos da força cortante e do momento fletor, é exatamente a situação que ocorre na metade esquerda de uma viga simplesmente apoiada que suporta uma carga concentrada única, no meio do vão.

EXEMPLO 7.1

Desenhar os diagramas de força cortante e do momento fletor da viga simplesmente apoiada que tem uma força concentrada aplicada no seu ponto médio (Fig. 7.8).

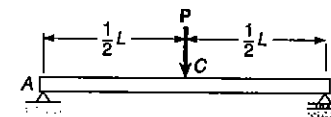


Fig. ex.7.8

Inicialmente, determinamos as reações de apoio, pelo diagrama de corpo livre de toda a viga (Fig. 7.9a); a intensidade de cada reação é igual a $P/2$.

Em seguida, cortamos a viga no ponto C , entre A e D , desenhando o diagrama de corpo livre de AC e CB (Fig. 7.9b). Adotando que a força cortante e o momento fletor são positivos, direcionamos os esforços internos V e V' e M e M' como indica a Fig. 7.7b. O estudo do equilíbrio do corpo livre AC nos leva a escrever que a soma de

componentes verticais e a soma dos momentos em relação a C das forças que agem no corpo livre são nulas. Encontramos então $V = +P/2$ e $M = +Px/2$. Os dois valores, V e M são positivos; isso pode ser verificado se observarmos que a reação em A tende a cortar e flexionar a viga em C como indicam as Figs. 7.7b e c. Podemos então marcar os valores V e M entre A e D (Figs. 7.9d e e); a força cortante tem valor constante e igual a $V = P/2$, enquanto o momento fletor cresce linearmente do valor $M = 0$ para $x = 0$ até o valor $M = PL/4$ para $x = L/2$.

Cortamos agora a viga no ponto E entre D e B , considerando o corpo livre EB (Fig. 7.9c). Escrevemos então que a soma das componentes verticais e a soma dos momentos em relação a E das forças que agem no corpo livre são nulas. Encontramos os valores $V = -P/2$ e $M = P(L-x)/2$. Vemos que a força cortante é negativa e o momento fletor é positivo; isso pode ser verificado se observarmos que a reação de apoio em B tende a flexionar a viga em E como indica a Fig. 7.7c, mas tende a cortar a viga de maneira contrária à indicada pela Fig. 7.7b. Podemos então completar os diagramas de força cortante e momento fletor das Figs. 7.9b e e; a força cortante tem valor constante e igual a $V = -P/2$ entre D e B , enquanto o momento fletor decresce linearmente do valor $M = PL/4$ para $x = L/2$ até o valor $M = 0$ para $x = L$.

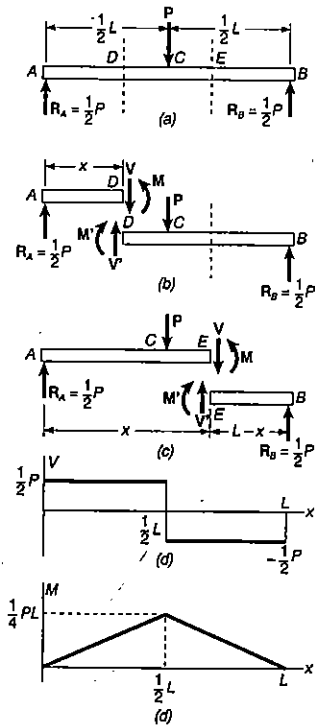


Fig. ex.7.9

Notamos no exemplo anterior que, para uma viga submetida apenas a cargas concentradas, a força cortante fica constante entre os pontos de aplicação de forças, enquanto o momento fletor tem variação linear entre esses pontos. Desse modo, para algumas situações, o desenho dos diagramas fica muito fácil, bastando calcular os valores de V e M em seções que ficam justamente à esquerda e à direita dos pontos de aplicação de cargas e reações (ver Prob. Resolvido 7.1).

EXEMPLO 7.2

Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga em balanço AB de vão L , que suporta uma carga uniformemente distribuída w (Fig. 7.10).

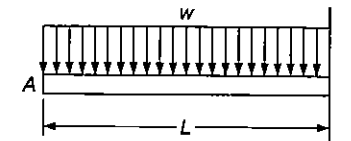


Fig. ex.7.10

Cortamos a viga em um ponto C entre A e B e desenhamos o diagrama de corpo livre de AC (Fig. 7.11a), direcionando V e M como indica a Fig. 7.7. Chamamos de x a distância de A a C e substituímos a carga distribuída ao longo de AC por sua resultante $w \cdot x$, que é aplicada no ponto médio de AC . Escrevemos então

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -wx - V = 0 & \quad V = -wx \\
 + \curvearrowright \Sigma M_C = 0: & \quad wx \left(\frac{x}{2} \right) + M = 0 & \quad M = -\frac{1}{2} wx^2
 \end{aligned}$$

Vemos que o diagrama de força cortante é representado por uma reta inclinada (Fig. 7.11b) e o diagrama de momento fletor² é representado por uma parábola (Fig. 7.11c). Os valores máximos de M e V ocorrem em B , onde temos

$$V_B = -wL \quad M_B = -\frac{1}{2} wL^2$$

² N. T.: Por problemas técnicos, os desenhos dos diagramas de momento fletor foram mantidos exatamente como no original; estando, portanto, em desacordo com as normas brasileiras, que recomendam sejam desenhados ao inverso (rotação de 180° em relação ao eixo x).

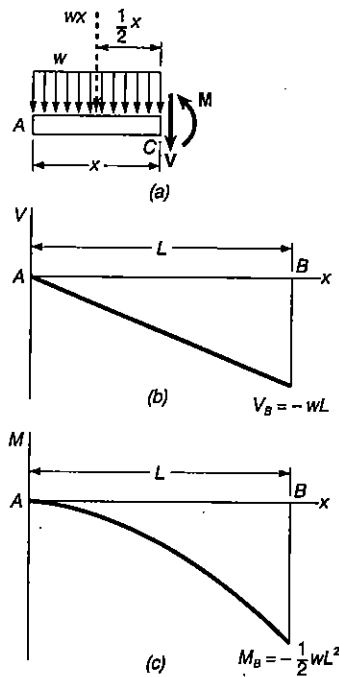
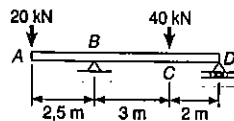


Fig. ex.7.11

PROBLEMA RESOLVIDO 7.1

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga com carregamento indicado.



Solução. Determinamos as reações considerando a viga toda como corpo livre, encontrando

$$R_B = 46 \text{ kN } \uparrow \quad R_D = 14 \text{ kN } \uparrow$$

Inicialmente determinamos os esforços solicitantes internos exatamente à direita da força de 20 kN em A. Considerando como corpo livre a porção da viga à esquerda da seção 1 e adotando que V e M são positivos (de acordo com a convenção estabelecida), escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 \quad V_1 = -20 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_1 = 0: \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

Em seguida consideramos como corpo livre a parte da viga à esquerda da Sec. 2, escrevendo

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 \quad V_2 = -20 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_2 = 0: \quad (20 \text{ kN})(2,5 \text{ m}) + M_2 = 0 \quad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para as Secs. 3, 4, 5 e 6, os esforços são determinados da mesma maneira com os diagramas de corpo livre indicados. Vamos ter

$$V_3 = +26 \text{ kN} \quad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_4 = +26 \text{ kN} \quad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

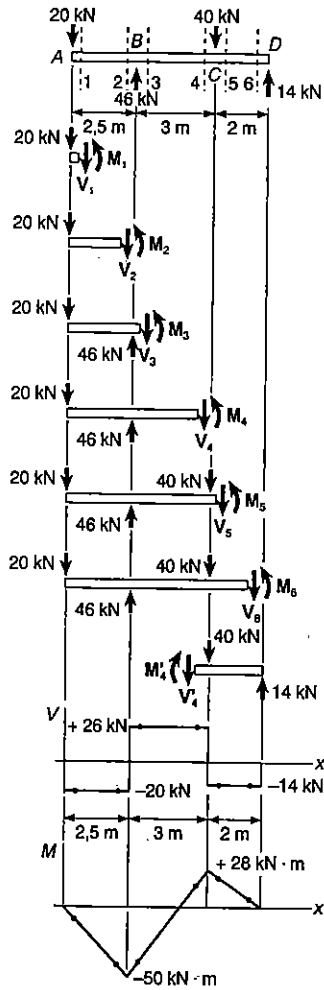
$$V_5 = -14 \text{ kN} \quad M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_6 = -14 \text{ kN} \quad M_6 = 0$$

Para alguns resultados acima, o cálculo pode ser simplificado se considerarmos o corpo livre formado pela parte da viga à direita da seção. Por exemplo, tomando a parte da viga que fica à direita da Sec. 4, escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40 \text{ kN} + 14 \text{ kN} = 0 \quad V_4 = -26 \text{ kN}$$

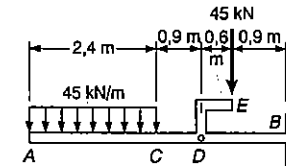
$$+\curvearrowright \Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14 \text{ kN})(2 \text{ m}) = 0 \quad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



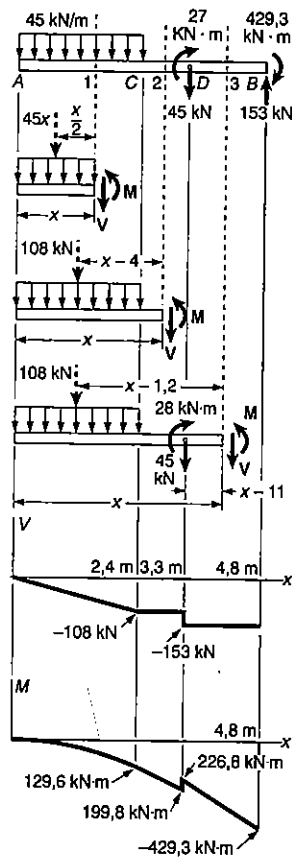
Podemos agora marcar os seis pontos nos diagramas de força cortante e momento fletor. Como já foi dito na Sec. 7.2, a força cortante é constante entre as forças concentradas e o momento fletor varia linearmente entre elas; obtemos então os diagramas de força cortante e momento fletor indicados.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.2

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga em balanço AB. A carga distribuída é de 45 kN/m e se estende ao longo de 2,4 m de viga, havendo ainda uma força de 45 kN aplicada em E.



Solução. A carga concentrada de 45 kN é substituída pelo sistema de força-conjugado aplicada em D. A reação em B é determinada considerando-se toda a viga como corpo livre.



Trecho de A a C. Consideremos a porção esquerda da viga dividida pela Sec. 1. Vamos calcular os esforços internos a uma distância x do ponto A. A parte da carga distribuída que age nessa porção da viga é substituída pela sua resultante, e escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: -45x - V = 0$$

$$V = -45x \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: -45x(1/2x) + M = 0$$

$$M = -22,5x^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O diagrama de corpo livre que fizemos pode ser usado para qualquer valor de x menor que 2,4 m, e as expressões encontradas para V e M são válidas para o trecho $0 < x < 2,4 \text{ m}$.

Trecho de C a D. Considerando a porção da viga à esquerda da Sec. 2 e mais uma vez substituindo a carga distribuída por sua resultante, obtemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: -108 \text{ kN} - V = 0$$

$$V = -108 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: 108(x - 1,2) + M = 0$$

$$M = 129,6 - 108x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Essas expressões se aplicam para o trecho $2,4 \text{ m} < x < 3,3 \text{ m}$.

Trecho de D a B. Para o trecho $3,3 \text{ m} < x < 4,8 \text{ m}$, o corpo livre é a parte esquerda em relação à Sec. 3. Obtemos

$$V = -153 \text{ kN} \quad M = 305,1 - 153x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Podemos agora marcar os diagramas de momento fletor e força cortante para toda a viga. Vemos que o conjugado de momento $27 \text{ kN} \cdot \text{m}$ aplicado em D provoca uma descontinuidade no diagrama de momento fletor.

PROBLEMAS

7.1 a 7.6 Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado.

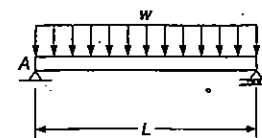


Fig. P7.1 e 7.7

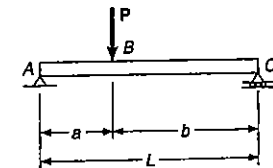


Fig. P7.2 e P7.8

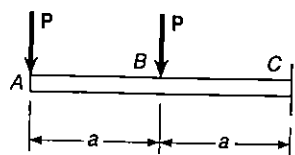


Fig. P7.3 e 7.9

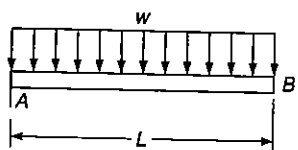


Fig. P7.4 e P7.10

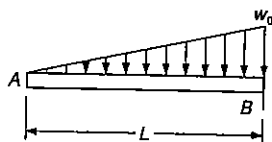


Fig. P7.5 e 7.11

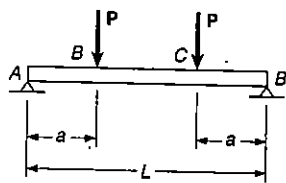
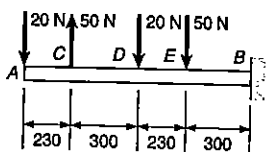


Fig. P7.6 e P7.12

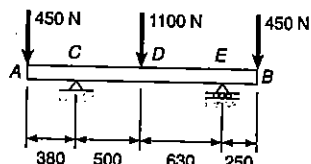
7.7 a 7.12 Determinar as equações das curvas dos diagramas da força cortante e do momento fletor, para a viga com o carregamento indicado. (Adotar a origem no ponto A.)

7.13 e 7.14 Desenhar os diagramas de força cortante e do momento fletor para a viga com o carregamento mostrado e determinar o máximo valor absoluto: (a) da força cortante; (b) do momento fletor.



Dimensões em mm

Fig. P7.13



Dimensões em mm

Fig. P7.14

7.15 até 7.18 Desenhar os diagramas de força cortante e do momento fletor para a viga com o carregamento mostrado e determinar o máximo valor absoluto: (a) da força cortante; (b) do momento fletor.

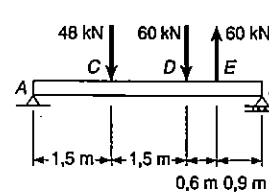


Fig. P7.15

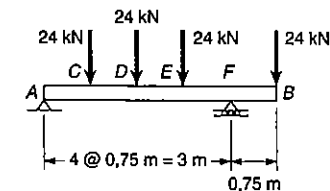


Fig. P7.16

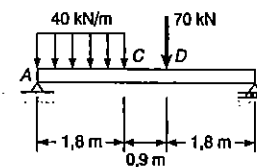


Fig. P7.17

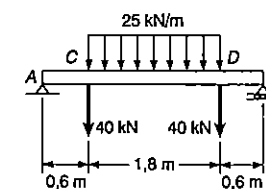


Fig. P7.18

7.19 e 7.20 Desenhar os diagramas de força cortante do momento fletor para a viga AB, submetida ao carregamento indicado.

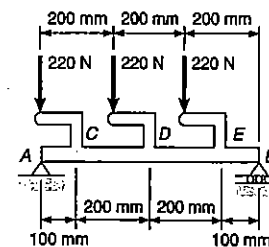


Fig. P7.19

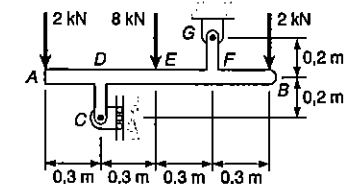


Fig. P7.20

7.21 e 7.22 Assumindo que a reação do solo sobre a viga, de baixo para cima, se distribui uniformemente, desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado e determinar o máximo valor absoluto: (a) da força cortante; (b) do momento fletor.

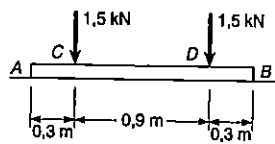


Fig. P7.21

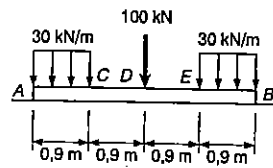


Fig. P7.22

7.23 e 7.24 Para a viga e o carregamento mostrado, determinar: (a) a máxima tensão normal numa seção transversal em C; (b) a máxima tensão de cisalhamento numa seção transversal imediatamente à esquerda de B.

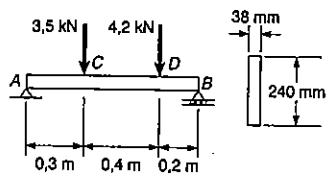


Fig. P7.23

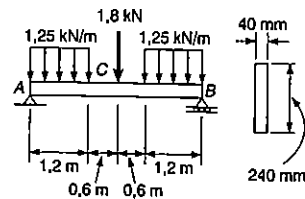


Fig. P7.24

7.25 e 7.26 Para a viga e o carregamento mostrado, determinar: (a) a máxima tensão normal numa seção transversal em D; (b) a máxima tensão de cisalhamento numa seção transversal imediatamente à direita de A. (Assumir que $\tau_m = V/A_{alma}$)

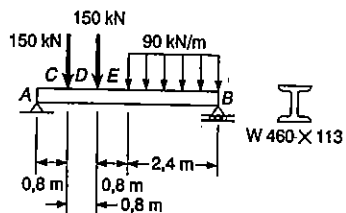


Fig. P7.25

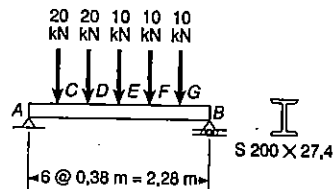


Fig. P7.26

7.27 e 7.28 Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado e determinar a máxima tensão normal devido à flexão.

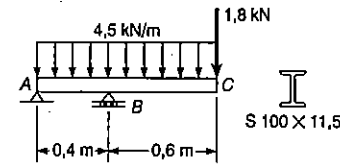


Fig. P7.27

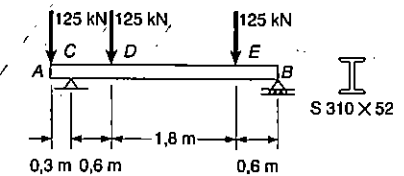


Fig. P7.28

7.29 e 7.30 Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado e determinar a máxima tensão normal devido à flexão.

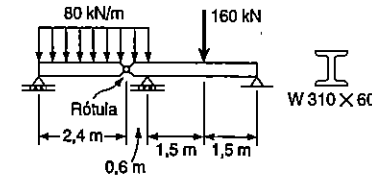


Fig. P7.29

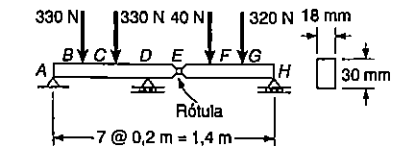


Fig. P7.30

7.31 Determinar: (a) a intensidade P de duas forças, dirigidas de baixo para cima, para que o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja tão pequeno quanto possível; (b) a correspondente tensão normal máxima devido à flexão. (Sugestão: Desenhar o diagrama do momento fletor, e então comparar os valores absolutos do maior momento fletor, positivo e negativo, obtidos.)

7.32 Sabendo-se que $P = Q = 530$ N, determinar: (a) a distância a, para que o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja tão pequeno quanto possível; (b) a correspondente tensão normal devido à flexão. (Veja a sugestão do Prob. 7.31.)

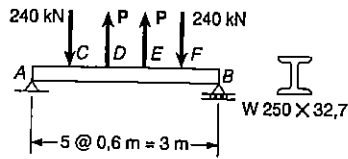


Fig. P7.31

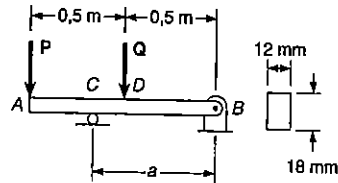


Fig. P7.32

7.33 Resolver o Prob. 7.32, considerando que $P = 350 \text{ N}$ e $Q = 530 \text{ N}$.

7.34 Determinar: (a) a distância a para que o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja tão pequeno quanto possível; (b) a correspondente tensão normal, devido à flexão. (Veja a sugestão do Prob. 7.31.)

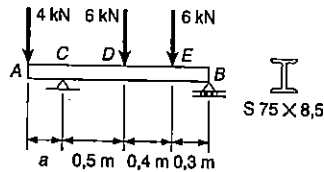


Fig. P7.34

7.35 Uma barra de aço maciça, de diâmetro d , é apoiada como mostrado. Sabendo-se que para o aço $\gamma = 7,7 \times 10^4 \text{ N/m}^3$, determinar o menor diâmetro d que pode ser usado, se a tensão normal não deve exceder 35 MPa .

*7.36 Uma barra de aço uniforme de diâmetro d é içada por cabos de um guindaste, amarrados em A e B . Pede-se: (a) determinar a distância a , entre as extremidades da barra e os pontos onde os cabos estão atados, para que o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja o menor possível; (b) determinar a correspondente tensão normal máxima devido à flexão, sabendo-se que $d = 20 \text{ mm}$ e $L = 4 \text{ m}$ e que para o aço $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. (Veja a sugestão do Prob. 7.31.)

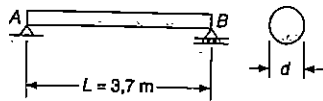


Fig. P7.35

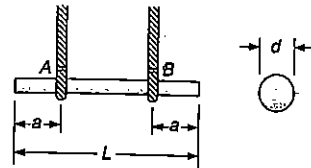


Fig. P7.36

7.4 RELAÇÕES ENTRE CARREGAMENTO, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Quando uma viga suporta mais de duas ou três cargas concentradas, ou quando suporta carregamentos distribuídos, o método descrito na Sec. 7.3 para marcar os valores da força cortante e do momento fletor pode se mostrar muito trabalhoso. Podemos tornar bem mais fácil a construção do diagrama de força cortante e principalmente o diagrama de momento fletor, se levarmos em consideração algumas relações que existem entre carga, força cortante e momento fletor.

Vamos considerar a viga simplesmente apoiada AB com carregamento uniformemente distribuído w por unidade de comprimento (Fig. 7.12a). Tomemos dois pontos C e C' da viga, distanciados entre si de uma distância Δx . A força cortante e o momento fletor em C serão designados por V e M , respectivamente, sendo considerados positivos; a força cortante e o momento fletor em C' serão designados por $V + \Delta V$ e $M + \Delta M$.

Separando a porção CC' da viga, desenhamos seu diagrama de corpo livre (Fig. 7.12b). As forças atuantes no corpo livre incluem o carregamento de intensidade $w \Delta x$ e os esforços internos em C e C' . As forças cortantes e momentos fletores foram adotados como positivos, e são dirigidos como mostra a figura.

Relações entre o carregamento e a força cortante. Escrevemos que a soma das componentes verticais das forças que agem no corpo livre CC' é nula, encontrando

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V - (V + \Delta V) - w \Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w \Delta x$$

Dividindo os dois membros da equação acima por Δx , e fazendo Δx tender a zero, obtemos

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.3)$$

A Eq. 7.3 indica que, para uma viga com o carregamento indicado na Fig. 7.12a, o declive dV/dx da curva que representa a variação de força cortante é negativo; o valor numérico do declive em qualquer ponto é igual ao carregamento por unidade de comprimento naquele ponto.

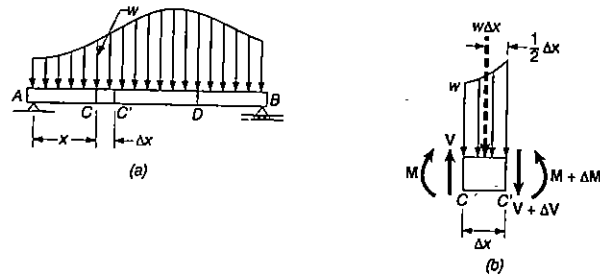


Fig. 7.12

Integrando (7.3) entre os pontos C e D, temos

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w \, dx \quad (7.4)$$

$$V_D - V_C = - (\text{Área do diagrama de carregamento entre C e D}) \quad (7.4')$$

O mesmo resultado poderia ser obtido considerando-se o equilíbrio da porção CD da viga, pois a área abaixo da curva do carregamento representa a carga total aplicada em C a D.

Devemos observar que a Eq. 7.3 não é válida em um ponto em que haja uma força concentrada aplicada, pois a curva da força cortante é descontínua nesse ponto, como mostrou a Sec. 7.2. Do mesmo modo deixam de ter validade as Eqs. 7.4 e 7.4' quando existem cargas concentradas entre C e D, uma vez que elas não levam em conta a variação brusca da força cortante provocada pela presença de carga concentrada. Desse modo, as Eqs. 7.4 e 7.4' devem ser aplicadas apenas entre os pontos de aplicação de cargas concentradas.

Relações entre a força cortante e o momento fletor. Analisando novamente o diagrama de corpo livre da Fig. 7.12b, e escrevendo a equação de equilíbrio dos momentos das forças aplicadas em relação a C', temos

$$+\sum M_{C'} = 0: \quad (M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

Dividindo dois membros da equação acima por Δx e fazendo Δx tender a zero, obtemos

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.5)$$

A Eq. 7.5 indica que o declive dM/dx do gráfico de momento fletor é igual ao valor da força cortante. Isso vale para os pontos em que a força cortante tem um valor bem definido, quer dizer, para os pontos onde não hajam forças concentradas. A Eq. 7.5 mostra também que a força cortante é nula em pontos onde o momento fletor é máximo. Esta propriedade facilita a determinação dos pontos onde é mais provável a ruptura da viga por flexão.

Integrando (7.5) entre os pontos C e D, temos

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V \, dx \quad (7.6)$$

$$M_D - M_C = (\text{Área do diagrama de força cortante entre C e D}) \quad (7.6')$$

A área sob a curva de força cortante deve ser considerada positiva quando a força cortante é positiva e negativa para os pontos onde a força cortante é negativa. As Eqs. 7.6 e 7.6' permanecem válidas, mesmo no caso em que existam forças concentradas entre C e D, se o gráfico da força cortante tiver sido desenhado corretamente. As equações deixam de ter validade quando um conjugado for aplicado em algum ponto entre C e D, uma vez que elas não levam em conta a mudança brusca do diagrama de momento fletor provocada por um conjugado (ver Prob. Resolvido 7.6).

EXEMPLO 7.3

Desenhar o diagrama de força cortante e momento fletor para a viga simplesmente apoiada da Fig. 7.13, determinando depois o valor máximo do momento fletor.

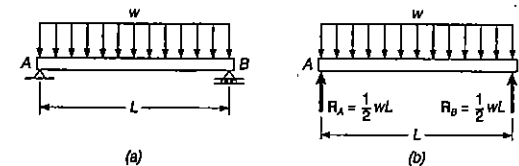


Fig. ex.7.13

Considerando toda a viga como diagrama de corpo livre, determinamos a intensidade das reações dos apoios (Fig. 7.13b).

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} wL$$

Em seguida, desenhamos o diagrama de força cortante. Na seção da extremidade A da viga, a força cortante é igual à reação R_A , isto é, igual a $\frac{1}{2} wL$, como podemos verificar considerando como corpo livre uma pequena parte da viga. A Eq. 7.4 fornece o valor da força cortante V em qualquer ponto da viga a uma distância x do ponto A. Escrevemos então

$$V - V_A = - \int_0^x w \, dx = - wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{1}{2} wL - wx = w \left(\frac{1}{2} L - x \right)$$

O diagrama de força cortante é uma reta inclinada que intercepta o eixo x no ponto $x = L/2$ (Fig. 7.14a). Considerando agora o momento fletor, vemos inicialmente que $M_A = 0$. Para determinarmos o valor de M do momento fletor a uma distância x do ponto A, usamos a Eq. 7.6. Vamos ter

$$M - M_A = \int_0^x V \, dx$$

$$M = \int_0^x w \left(\frac{1}{2} L - x \right) dx = \frac{1}{2} w(Lx - x^2)$$

O diagrama de momento fletor é uma parábola. O valor máximo do momento fletor ocorre em $x = L/2$, onde V (e portanto dM/dx) é zero. Levando o valor $x = L/2$ à equação acima, obtemos $M = wL^2/8$ (Fig. 7.14b).

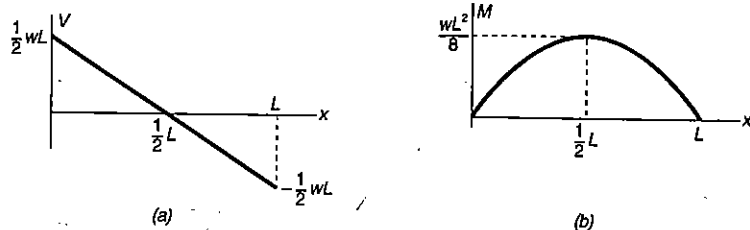


Fig. ex.7.14

Em muitos casos de engenharia, precisamos conhecer o valor do momento fletor em apenas alguns pontos. Tendo sido desenhado o diagrama de força cortante e após determinarmos o valor de M em uma das extremidades da viga, poderemos calcular o valor do momento fletor em qualquer ponto calculando a área delimitada

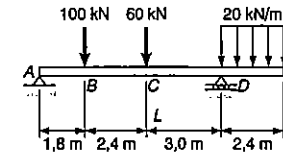
pelo gráfico da força cortante e usando a Equação 7.6. Por exemplo, na viga do Ex. 7.3, sendo $M_A = 0$, podemos obter o valor do momento fletor máximo da viga calculando a área do triângulo sombreado no diagrama de força cortante da Fig. 7.14a. Temos

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

Neste exemplo, vemos que o diagrama de carga é uma reta horizontal, o diagrama de força cortante é uma reta inclinada e o diagrama de momento fletor é uma parábola. Se o diagrama de carga fosse uma reta inclinada (primeiro grau), o diagrama de força cortante seria uma parábola (segundo grau) e o diagrama de momento fletor seria uma parábola cúbica (terceiro grau). Os diagramas de força cortante e de momento fletor serão sempre, respectivamente um grau e dois graus acima do diagrama de carga. Tendo em mente essa propriedade, ficamos aptos a esboçar os diagramas de força cortante e momento fletor sem a necessidade de determinarmos as funções $V(x)$ e $M(x)$, bastando calcular alguns valores de M e V . Podemos conseguir esboços bem precisos se nos lembrarmos do fato de que, em qualquer ponto onde os diagramas sejam curvas contínuas, o declive da curva de força cortante é igual a $-w$ e o declive da curva do momento fletor é igual a V .

PROBLEMA RESOLVIDO 7.3

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento indicados, determinando a localização e intensidade: (a) da força cortante máxima; (b) do momento fletor máximo; (c) do momento fletor mínimo.



Solução. Calculamos as reações dos apoios considerando a viga toda como um corpo livre.

$$R_D = 116 \text{ kN}$$

$$R_A = 92 \text{ kN}$$

Vemos que em *A* e *E* o momento fletor é nulo; desse modo, em duas seções (marcadas por pequenas circunferências) já são conhecidos os momentos fletores para a construção do diagrama.

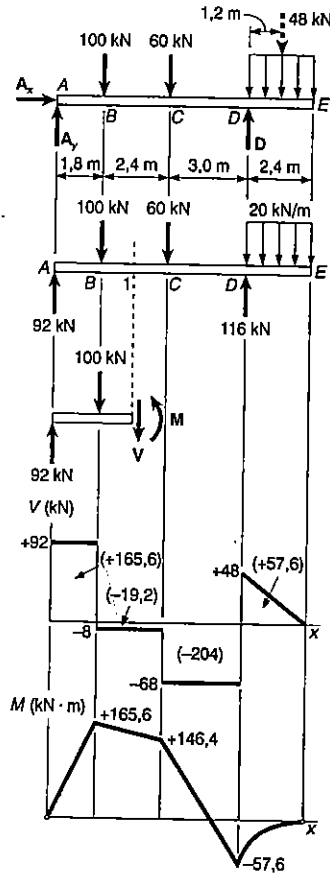


Diagrama de força cortante. Como $dV/dx = -w$, vemos que entre as cargas concentradas o declive do gráfico de força cortante é zero (e portanto a força cortante é constante). A força cortante em qualquer ponto pode ser obtida se dividirmos a viga em duas partes, considerando cada uma delas como um corpo livre. Usando por exemplo a parte da viga à esquerda da seção 1, obtemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad +92 - 100 - V = 0$$

$$V = -8 \text{ kN}$$

Diagrama de momento fletor. Sabemos que a área sob o diagrama de força cortante entre dois pontos é igual à variação do momento fletor entre esses pontos. Calculamos então a área de cada parte do diagrama de força cortante, marcando seu valor, por conveniência, no próprio diagrama. Sendo $M_A = 0$; escrevemos

$$M_B - M_A = +165,6 \quad M_B = +165,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -19,2 \quad M_C = +146,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D - M_C = -20,4 \quad M_D = -57,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_E - M_D = +57,6 \quad M_E = 0$$

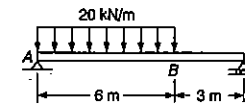
O valor encontrado $M_E = 0$, que já era conhecido, serve como verificação dos resultados obtidos.

A força cortante é constante entre duas forças concentradas sucessivas, de modo que o declive dM/dx é igualmente constante. O diagrama de momento fletor pode ser desenhado unindo-se por linhas retas os pontos conhecidos. Dos diagramas de *V* e *M* temos

- (a) $V_{\text{máx}} = 92 \text{ kN}$ entre *A* e *B*
- (b) $M_{\text{máx}} = +165,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ no ponto *B*.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.4

Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga com o carregamento indicado, determinando o ponto de momento máximo e a intensidade do momento fletor nesse ponto.



Solução. Calculamos as reações dos apoios considerando a viga toda como um corpo livre,

$$R_A = 80 \text{ kN}\uparrow \quad R_C = 40 \text{ kN}\uparrow$$

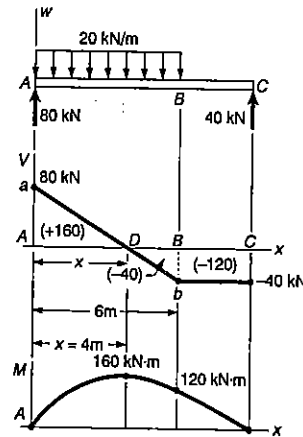


Diagrama de força cortante. A força cortante na seção exatamente à direita de A é $V_A = +80 \text{ kN}$. A variação da força cortante entre dois pontos é igual a *menos* a área sob o diagrama de carregamento entre esses dois pontos. Obtemos V_B escrevendo

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$

$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

O diagrama de força cortante entre os pontos A e B é representado por uma linha reta, pois o declive $dV/dx = -w$ é constante entre esses dois pontos. Entre B e C, a área sob o diagrama de carregamento é nula; assim,

$$V_C - V_B = 0 \quad V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

e a força cortante é constante entre B e C.

Diagrama de momento fletor. Vemos que os momentos fletores das seções extremas são iguais a zero. Para determinarmos o momento máximo, calculamos a posição do ponto D da viga, onde $V = 0$. A parte do diagrama de força cortante entre A e B tem dois triângulos semelhantes: DAA e DBb . Desse modo

$$\frac{x}{80 \text{ kN}} = \frac{6 - x}{40 \text{ kN}} \quad x = 4 \text{ m}$$

O momento fletor máximo ocorre na seção D, onde temos $dM/dx = V = 0$. Calculamos as áreas das várias partes do diagrama de força cortante, que vão marcadas em parênteses no próprio diagrama. Sendo a área do diagrama de força cortante entre dois pontos igual à variação do momento fletor entre esses pontos, escrevemos

$$M_D - M_A = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B - M_D = -40 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_B = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_C = 0$$

O diagrama de momento fletor consiste em um arco de parábola seguido de um segmento de reta; o declive da parábola em A é igual ao valor de V nesse ponto.

O momento fletor máximo é

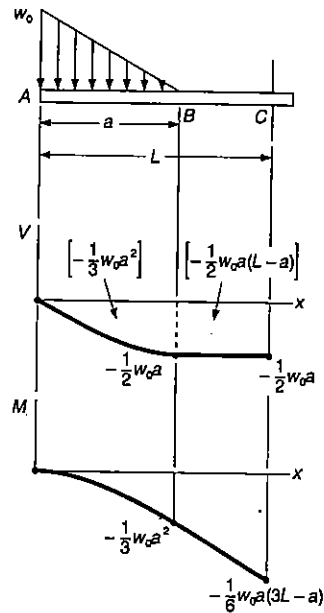
$$M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 7.5

Esboçar o diagrama de força cortante e o diagrama de momento fletor da viga em balanço da figura.

Solução. *Diagrama de força cortante.* Na extremidade livre da viga encontramos $V_A = 0$. Entre os pontos A e B, a área sob o diagrama de carregamento é $1/2 w_0 \cdot a$; calculamos V_B fazendo

$$V_B - V_A = -\frac{1}{2} w_0 a \quad V_B = -\frac{1}{2} w_0 a$$



Entre B e C a viga não está carregada e, desse modo, $V_B = V_C$. Em A, temos $w = w_0$ e, de acordo com a Eq. 7.3, o declive do diagrama de força cortante é $dV/dx = -w_0$, enquanto em B o declive é $dV/dx = 0$. Entre A e B o diagrama de carga decresce linearmente, sendo o diagrama de força cortante parabólico. Entre B e C, sendo $w = 0$, o diagrama de força cortante é uma linha horizontal.

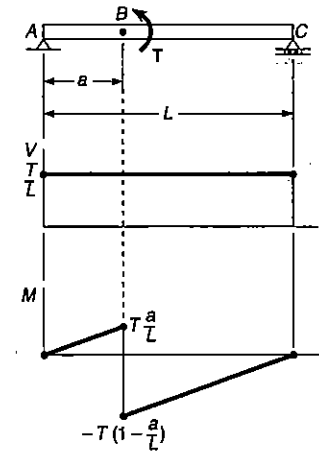
Diagrama de momento fletor. O momento M_A na seção livre extrema da viga é zero. Calculando a área sob o gráfico de força cortante, temos

$$\begin{aligned} M_B - M_A &= -\frac{1}{3}w_0a^2 & M_B &= -\frac{1}{3}w_0a^2 \\ M_C - M_B &= -\frac{1}{2}w_0a(L-a) \\ M_C &= -\frac{1}{6}w_0a(3L-a) \end{aligned}$$

O esboço do diagrama de momento fletor se completa usando-se a propriedade $dM/dx = V$. Vemos que entre A e B o diagrama é representado por uma parábola cúbica, com declive igual a zero em A. Para o trecho entre B e C, o diagrama é representado por uma linha reta.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.6

A viga AC tem como carregamento o conjugado aplicado no ponto B, de momento T. Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga.



Solução. Considerando toda a viga como um corpo livre, calculamos

$$R_A = \frac{T}{L} \uparrow \quad R_C = \frac{T}{L} \downarrow$$

A força cortante em qualquer ponto é constante e igual a T/L . Como o conjugado é aplicado em B, o diagrama de momento fletor é descontínuo nesse ponto; o valor do momento fletor decresce bruscamente a partir do valor T .

PROBLEMAS

- 7.37 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.1.
- 7.38 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.2.
- 7.39 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.3.
- 7.40 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.4.
- 7.41 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.5.
- 7.42 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.6.
- 7.43 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.15.
- 7.44 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.14.
- 7.45 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.17
- 7.46 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.18.
- 7.47 a 7.50 Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado e determinar o máximo valor absoluto: (a) da força cortante; (b) do momento fletor.

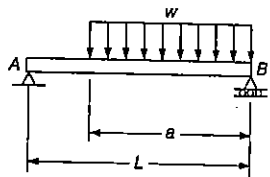


Fig. P7.47

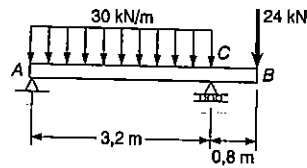


Fig. P7.48

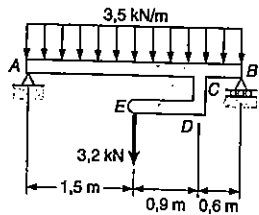


Fig. P7.49

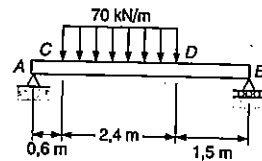


Fig. P7.50

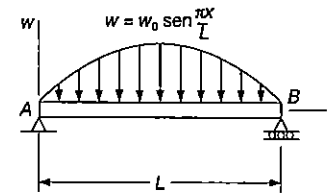


Fig. P7.51

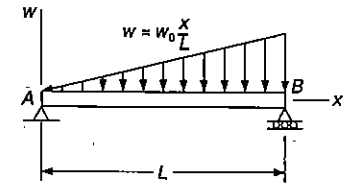


Fig. P7.52

- 7.53 e 7.54 Determinar as equações das curvas dos diagramas de força cortante e de momento fletor, para a viga com o carregamento mostrado. Determinar também o máximo valor absoluto do momento fletor na viga.

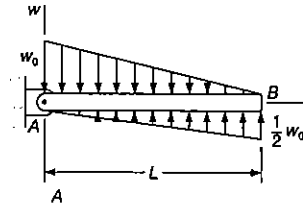


Fig. P7.53

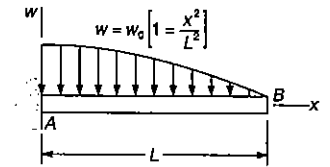


Fig. P7.54

- 7.55 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.23.
- 7.56 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.24.
- 7.57 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.25.
- 7.58 Usando o método da Sec. 7.4, resolver o Prob. 7.26.
- 7.59 a 7.62 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) o máximo valor absoluto do momento fletor; (b) a máxima tensão normal devido à flexão.

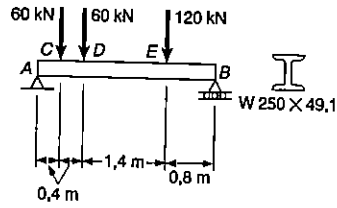


Fig. P7.59

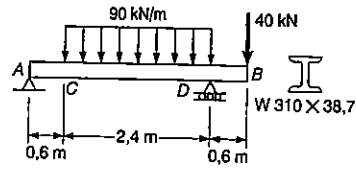


Fig. P7.60

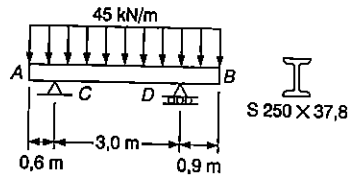


Fig. P7.61

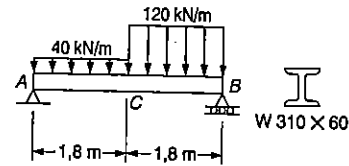


Fig. P7.62

7.63 a 7.66 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a maior tensão normal devido a flexão; (b) a maior tensão de cisalhamento numa seção transversal.

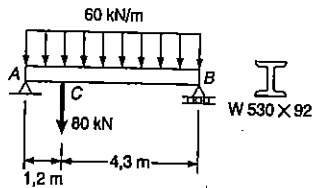


Fig. P7.63

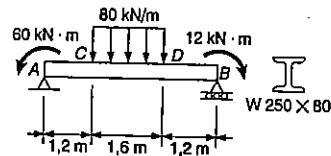


Fig. P7.64

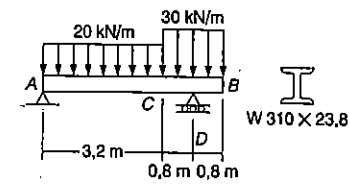


Fig. P7.65

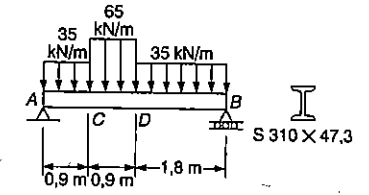


Fig. P7.66

*7.67 A viga AB suporta uma carga uniformemente distribuída de 7 kN/m e duas cargas concentradas P e Q. A tensão normal devido a flexão, na borda inferior da seção transversal, é de +100 MPa em D e +70 MPa em E. Pedese: (a) Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga; (b) Determinar a máxima tensão normal que ocorre na viga, devido a flexão.

*7.68 A viga AB suporta duas cargas concentradas P e Q. A tensão normal devido a flexão na borda inferior da seção transversal da viga é de +55 MPa em D e +37,5 MPa em F. Pedese: (a) Desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga; (b) Determinar a máxima tensão normal que ocorre na viga, devido a flexão.

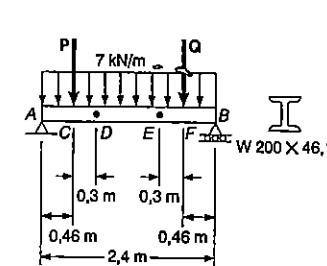


Fig. P7.67

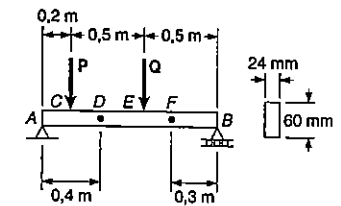


Fig. P7.68

*7.5 UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES SINGULARES PARA DETERMINAR A FORÇA CORTANTE E O MOMENTO FLETOR EM UMA VIGA

Revedo a análise feita nas duas seções precedentes, nós notamos que a força cortante e o momento fletor poderiam raramente ser descritos por funções analíticas simples. No caso da viga em balanço do Exemplo 7.2 (Fig. 7.10), que suporta uma carga uniformemente distribuída w , a força cortante e o momento fletor *podiam* ser representados por funções analíticas simples, isto é, $V = -wx$ e $M = -\frac{1}{2}wx^2$; isto porque não existia *descontinuidade* no carregamento da viga.

Por outro lado, no caso da viga bi-apoiada do Exemplo 7.1, a qual havia somente carregamento no ponto médio C , a carga P aplicada em C representa uma *singularidade* do carregamento da viga. Esta singularidade resultou em descontinuidade da força cortante e do momento fletor e necessitou o uso de funções analíticas diferentes para representar V e M nas porções da viga localizadas, respectivamente, à esquerda e à direita do ponto C . No Prob. Resolvido 7.2, a viga teve que ser dividida em três porções, nas quais diferentes funções foram usadas para representar a força cortante e o momento fletor. Esta situação nos leva a contar com a representação gráfica das funções para V e M , fornecidas pelos diagramas de força cortante e de momento fletor e, posteriormente na Sec. 7.4, com um método gráfico de integração para determinar V e M para a carga distribuída w .

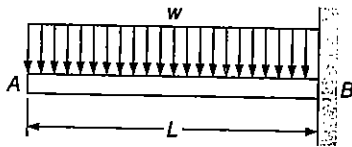


Fig. 7.10 (repetida)

O propósito desta seção é mostrar como o uso de *funções singulares* torna possível representar a força cortante V e o momento fletor M por expressões matemáticas simples.

Considere uma viga bi-apoiada AB , de comprimento $2a$, que suporta um carregamento uniformemente distribuído w_0 , desde o ponto médio C até a extremidade direita da viga (Fig. 7.15). Inicialmente desenhamos o diagrama de corpo livre da viga toda (Fig. 7.16a); substituindo o carregamento distribuído por uma carga concentrada equivalente e somando os momentos em torno de B , escrevemos:

$$+ \uparrow \Sigma M_B = 0: \quad (w_0 a) \left(\frac{1}{2} a\right) - R_A(2a) = 0 \quad R_A = \frac{1}{4} w_0 a$$

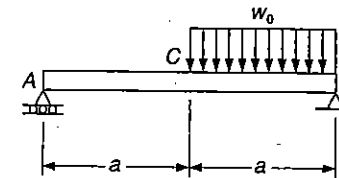


Fig. 7.15

Depois cortamos a viga em um ponto D , entre A e C . Do diagrama de corpo livre para AD (Fig. 7.16b), concluímos que para o intervalo $0 < x < a$, a força cortante e o momento fletor são expressos, respectivamente, pelas funções:

$$V_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a \quad \text{e} \quad M_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a x$$

Cortando, agora, a viga em um ponto E , entre C e B , desenhamos o diagrama de corpo livre da porção AE (Fig. 7.16c). Substituindo a carga distribuída por uma carga concentrada equivalente, escrevemos

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad \frac{1}{4} w_0 a - w_0(x - a) - V_2 = 0 \\ + \uparrow \Sigma M_E = 0: & \quad -\frac{1}{4} w_0 a x + w_0(x - a) \left[\frac{1}{2}(x - a)\right] + M_2 = 0 \end{aligned}$$

e concluímos que, no intervalo $a < x < 2a$, a força cortante e o momento fletor são expressos, respectivamente, pelas funções:

$$V_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0(x - a) \quad \text{e} \quad M_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0(x - a)^2$$

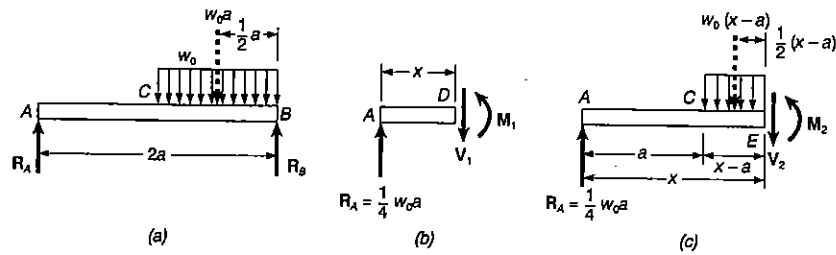


Fig. 7.16

Como indicamos anteriormente nesta seção, o fato da força cortante e do momento fletor serem representados por diferentes funções de x , depende somente se x é menor ou maior do que a , que é devido à descontinuidade do carregamento da viga. Portanto, as funções $V_1(x)$ e $V_2(x)$ podem ser representadas por uma única expressão:

$$V(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0 \langle x - a \rangle \tag{7.7}$$

se especificarmos que o segundo termo deverá ser incluído em nossos cálculos quando $x \geq a$, e ignorando quando $x < a$. Em outras palavras, as chaves $\langle \rangle$ deverão ser substituídas pelos parênteses usuais $()$, quando $x \geq a$ e, por zero, quando $x < a$. Com a mesma convenção, o momento fletor pode ser representado em qualquer ponto da viga por uma única expressão:

$$M(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0 \langle x - a \rangle^2 \tag{7.8}$$

Da convenção que adotamos, segue que as chaves $\langle \rangle$ podem ser diferenciadas ou integradas, como nos parênteses usuais. Ao invés de calcularmos o momento fletor pelo diagrama de corpo livre, nós poderíamos ter usado o método indicado na Sec. 7.4 e integrado a expressão obtida, para $V(x)$:

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(x) dx = \int_0^x \frac{1}{4} w_0 a dx - \int_0^x w_0 \langle x - a \rangle dx$$

Depois da integração, e observando que $M(0) = 0$, obtemos como antes,

$$M(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0 \langle x - a \rangle^2$$

Ainda mais, usando novamente a mesma convenção, notamos que a carga distribuída em qualquer ponto da viga pode ser expressa como

$$w(x) = w_0 \langle x - a \rangle^0 \tag{7.9}$$

Certamente, as chaves devem ser substituídas por zero, para $x < a$, e por parênteses, para $x \geq a$; então, verificamos que $w(x) = 0$ para $x < a$ e, sendo $\langle x - a \rangle^0 = (x - a)^0 = 1$, vem que $w(x) = w_0$ para $x \geq a$. Da Sec. 7, nos lembramos que a força cortante poderia ter sido obtida pela integração da função $-w(x)$. Observando que $V = \frac{1}{4} w_0 a$, para $x = 0$, escrevemos:

$$V(x) - V(0) = - \int_0^x w(x) dx = - \int_0^x w_0 \langle x - a \rangle^0 dx$$

$$V(x) - \frac{1}{4} w_0 a = w_0 \langle x - a \rangle^1$$

Resolvendo para $V(x)$ e eliminando o expoente 1, obtemos novamente

$$V(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0 \langle x - a \rangle$$

As expressões $\langle x - a \rangle^0$, $\langle x - a \rangle$, $\langle x - a \rangle^2$ são chamadas *funções singulares*. Por definição, nós temos, para $n \geq 0$,

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \tag{7.10}$$

Podemos também notar que sempre que a quantidade entre chaves é positiva ou zero as chaves poderão ser substituídas pelos parênteses usuais, e sempre que a quantidade é negativa, estas chaves se anulam.

As três funções singulares correspondentes, respectivamente, para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ estão plotadas na Fig. 7.17. Notamos que a função $\langle x - a \rangle^0$ é descontínua para $x = a$, e é da forma de um "degrau". Por essa razão é denominada como *função degrau*. De acordo com (7.10), e uma vez que $\langle x - a \rangle^0 = 1$, para qualquer valor de $\langle x - a \rangle$, temos³

3 Visto que $\langle x - a \rangle^0$ é descontínua para $x = a$, pode ser argumentado que esta função é indefinida à esquerda, para $x = a$, ou ser assumido ambos os valores 0 e 1 para $x = a$. Todavia, definindo $\langle x - a \rangle^0$ como igual a 1, quando $x = a$, como determinado em (7.11), tem a vantagem ser inequívoco e, então, prontamente aplicável a um programa de computador.

$$\langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \quad (7.11)$$

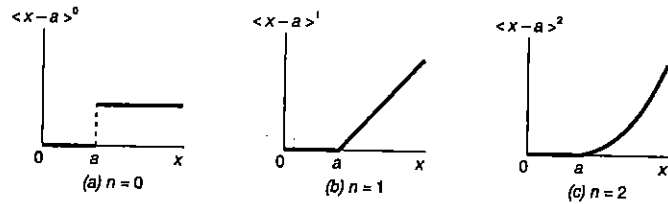


Fig. 7.17

Destas definições de funções singulares, fica claro que

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n + 1} \langle x - a \rangle^{n+1} \quad \text{para } n \geq 0 \quad (7.12)$$

e

$$\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1 \quad (7.13)$$

A maioria dos carregamentos de vigas, encontrados na prática da engenharia, podem ser divididos em carregamentos básicos como mostrado na Fig. 7.18. Onde foram aplicadas, as correspondentes funções $w(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ foram expressas em termos de funções singulares, com suas representações gráficas. Observar que, das expressões iniciais, as outras podem ser obtidas por integração.

Depois de um dado carregamento ter sido dividido em carregamentos comuns da Fig. 7.18, as funções $V(x)$ e $M(x)$, representando a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto da viga, podem ser obtidas pela adição das correspondentes funções, associadas com cada um dos carregamentos básicos e com as reações de apoio.

Se tivermos um carregamento distribuído que não se estenda até o final do vão, ou um carregamento distribuído que não seja contínuo, podemos substituí-lo por uma combinação de carregamento equivalente, como mostrado na Fig. 7.19, onde o carregamento distribuído atinja a extremidade da viga. (Veja também o Exemplo 7.4 e o Prob. Resolvido 7.7.)

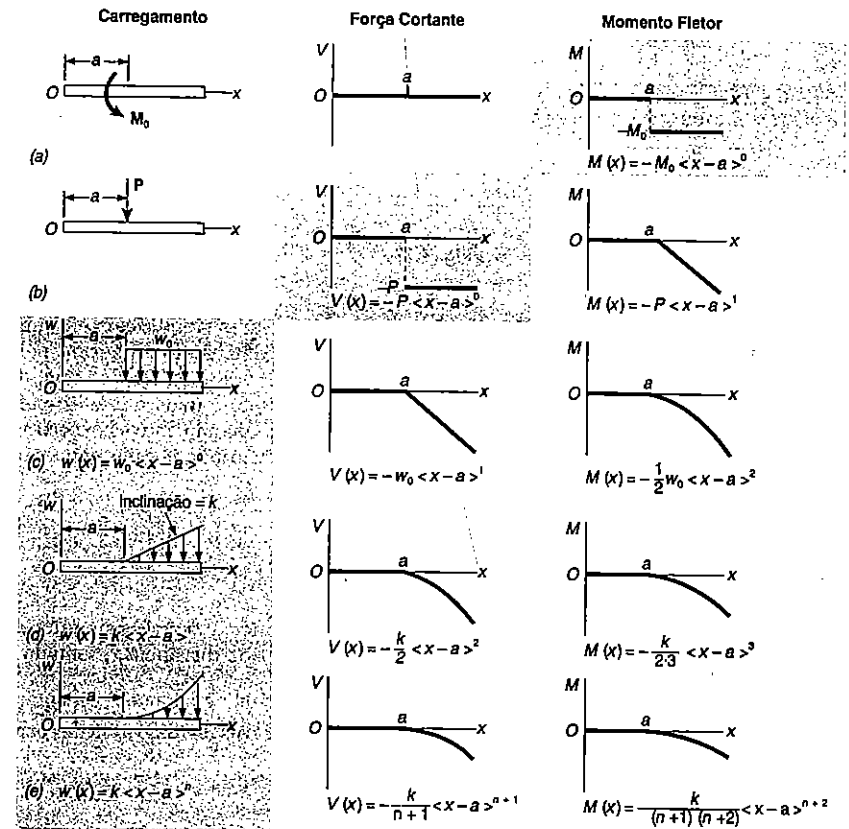


Fig. 7.18 Carregamentos comuns e correspondentes, força cortante e momento fletor, expressos em termos de funções singulares.

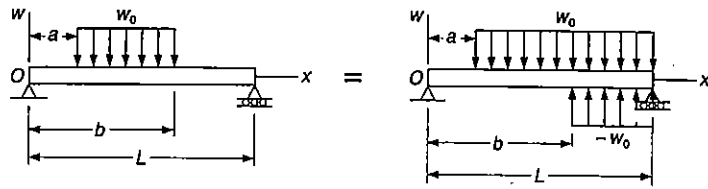


Fig. 7.19

Como veremos na Sec. 8.6, o uso das funções singulares simplificam enormemente a determinação de deflexões em vigas. Esta aproximação foi sugerida pela primeira vez em 1862, pelo matemático alemão A. Clebsch (1833-1872). Todavia, ao matemático e engenheiro inglês W. H. Macaulay (1853-1936) é dado o crédito pela introdução das funções singulares aos problemas de vigas, usando chaves especiais, na forma usada aqui, e estas chaves < > são geralmente denominadas como *chaves de Macaulay*.⁴

EXEMPLO 7.4

Para a viga com o carregamento mostrado (Fig. 7.20a) e usando as funções singulares, expressar a força cortante e o momento fletor como funções da distância x , tomada a partir do apoio A.

Nós, inicialmente determinamos a reação em A, através do diagrama de corpo livre (Fig. 7.20b) e escrevendo:

$$\sum F_x = 0: \quad A_x = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0: \quad & -A_y(3,6 \text{ m}) + (1,2 \text{ kN})(3 \text{ m}) \\ & + (1,8 \text{ kN})(2,4 \text{ m}) + 1,44 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \end{aligned}$$

$$A_y = 2,60 \text{ kN}$$

Em seguida, substituímos o carregamento distribuído dado, por dois carregamentos equivalentes estendidos até a extremidade direita (Fig. 7.20c) e, expressamos a carga distribuída $w(x)$ como o somatório das correspondentes funções:

$$w(x) = +w_0(x - 0,6)^0 - w_0(x - 1,8)^0$$

⁴ W. H. Macaulay "Note on the Deflection of Beams", Messenger of Mathematics, vol. 48, pp. 129-130, 1919.

A função $V(x)$ é obtida pela integração de $w(x)$, invertendo os sinais + e -, e adicionando ao resultado as constantes A_y e $-P(x - 0,6)^0$, que representam as respectivas contribuições para a força cortante, da reação em A e da carga concentrada. (Nenhuma outra constante de integração é necessária.) Uma vez que o momento concentrado não afeta diretamente a força cortante, ele poderá ser ignorado no cálculo. Nós escrevemos

$$V(x) = -w_0(x - 0,6)^1 + w_0(x - 1,8)^1 + A_y - P(x - 0,6)^0$$

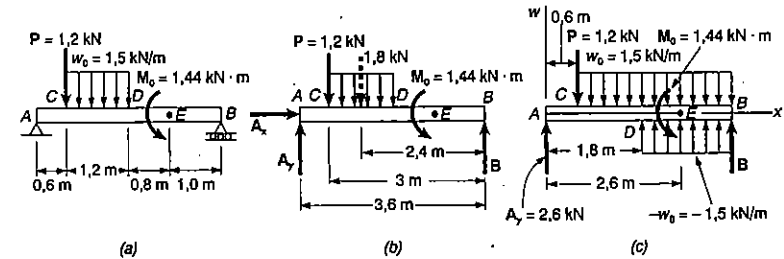


Fig. ex.7.20

De maneira similar, a função $M(x)$ é obtida pela integração de $V(x)$ e adicionando ao resultado a constante $-M_0(x - 2,6)^0$ representando a contribuição do momento concentrado ao momento fletor. Nós temos

$$\begin{aligned} M(x) = & -\frac{1}{2}w_0(x - 0,6)^2 + \frac{1}{2}w_0(x - 1,8)^2 \\ & + A_yx - P(x - 0,6)^1 - M_0(x - 2,6)^0 \end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos da reação e das cargas, nas expressões obtidas para $V(x)$ e $M(x)$ e, tendo o cuidado de não efetuar qualquer produto ou potências envolvendo as chaves, obtemos as seguintes expressões para a força cortante e para o momento fletor, em qualquer ponto da viga:

$$V(x) = -1,5(x - 0,6)^1 + 1,5(x - 1,8)^1 + 2,6 - 1,2(x - 0,6)^0$$

$$\begin{aligned} M(x) = & -0,75(x - 0,6)^2 + 0,75(x - 1,8)^2 \\ & + 2,6x - 1,2(x - 0,6)^1 - 1,44(x - 2,6)^0 \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.5

Para a viga com o carregamento do Exemplo 7.4, determinar os valores numéricos da força cortante e do momento fletor no ponto médio D.

Fazendo $x = 1,8$ m nas expressões encontradas para $V(x)$ e $M(x)$ do Exemplo 7.4, obtemos

$$V(1,8) = -1,5(1,2)^1 + 1,5(0)^1 + 2,6 - 1,2(1,2)^0$$

$$M(1,8) = -0,75(1,2)^2 + 0,75(0)^2 + 2,6(1,8) - 1,2(1,2)^1 - 1,44(-0,8)^0$$

Lembrando que, todas as vezes que uma quantidade entre chaves é positiva ou zero, as chaves podem ser substituídas por parênteses usuais; e que, sempre que essa quantidade é negativa as chaves se anulam, nós escrevemos:

$$\begin{aligned} V(1,8) &= -1,5(1,2)^1 + 1,5(0)^1 + 2,6 - 1,2(1,2)^0 \\ &= -1,5(1,2) + 1,5(0) + 2,6 - 1,2(1) \\ &= -1,8 + 0 + 2,6 - 1,2 \end{aligned}$$

$$V(1,8) = -0,4 \text{ kN}$$

e

$$\begin{aligned} M(1,8) &= -0,75(1,2)^2 + 0,75(0)^2 + 2,6(1,8) - 1,2(1,2)^1 - 1,44(0) \\ &= -1,08 + 0 + 4,68 - 1,44 - 0 \\ M(1,8) &= +2,16 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Aplicação para Programa de Computador. As funções singulares se prestam bem para o uso de computadores. Inicialmente notamos que a função degrau $\langle x - a \rangle^0$, a qual iremos representá-la pelo símbolo STP, pode ser definida por um comando IF/THEN/ELSE como sendo igual a 1, para $x \geq A$, e igual a 0, caso contrário. Qualquer outra função singular $\langle x - a \rangle^n$, com $n \geq 1$, pode então ser expresso como um produto da função algébrica ordinária $(x - a)^n$ e a função degrau $\langle x - a \rangle^0$. Então, a função singular $\langle x - a \rangle^n$ será programada como

$$(X - A)^{\wedge} N * STP \quad (\text{BASIC})$$

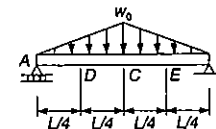
ou

$$(X - A) ** N * STP \quad (\text{FORTRAN})$$

Quando k diferentes funções singulares são envolvidas, tal como $\langle x - a_i \rangle^n$, onde $i = 1, 2, \dots, k$, então as correspondentes k funções degraus STP(I), onde $I = 1, 2, \dots, K$, podem ser definidas por um "loop" contendo um único comando IF/THEN/ELSE.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.7

Para a viga e o carregamento mostrado determinar: (a) as equações que definem a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto; (b) a força cortante e o momento fletor nos pontos C, D e E.



Reações. A carga total é $\frac{1}{2}w_0L$; devido a simetria, cada reação é igual à metade do valor, ou seja, $\frac{1}{4}w_0L$.

Carga Distribuída. A carga distribuída dada é substituída por dois carregamentos equivalentes estendidos até a extremidade direita. Usando-se uma função singular para expressar o segundo carregamento, nós escrevemos:

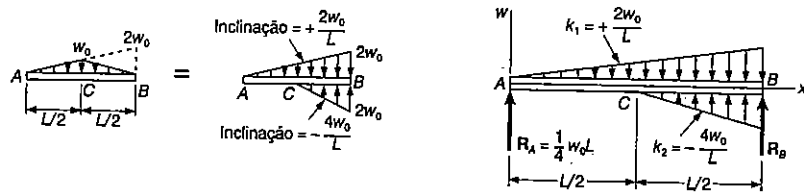
$$w(x) = k_1x + k_2\langle x - \frac{1}{2}L \rangle = \frac{2w_0}{L}x - \frac{4w_0}{L}\langle x - \frac{1}{2}L \rangle \quad (1)$$

(a) **Equações para força cortante e momento fletor.** Nós obtemos $V(x)$ pela integração de (1), trocando-se os sinais, e adicionando uma constante igual a R_A :

$$V(x) = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{2w_0}{L}\langle x - \frac{1}{2}L \rangle^2 + \frac{1}{4}w_0L \quad (2)$$

Obtemos $M(x)$ pela integração; visto que não há momento concentrado, não é necessário a constante de integração:

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \frac{1}{2}L \rangle^3 + \frac{1}{4}w_0Lx \quad (3)$$

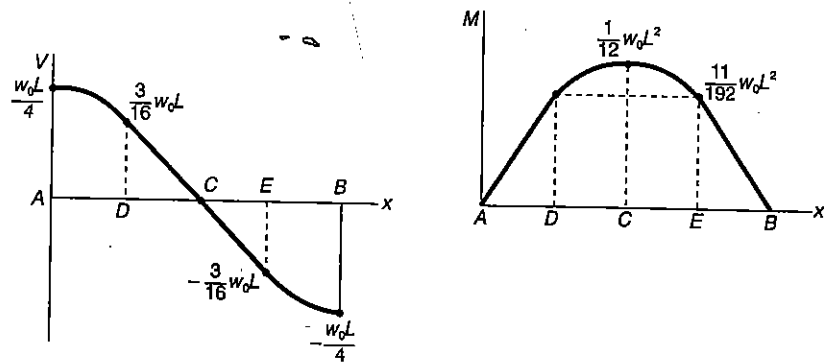


(b) Força cortante e momento fletor em C, D e E

No ponto C: Tomando-se $x = \frac{1}{2}L$ nas Equações (2) e (3) e lembrando-se que, quando uma quantidade entre chaves é positiva ou zero, as chaves podem ser substituídas por parênteses, nós temos:

$$V_C = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \frac{2w_0}{L} (0)^2 + \frac{1}{4}w_0L \quad V_C = 0$$

$$M_C = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{1}{2}L\right)^3 + \frac{2w_0}{3L} (0)^3 + \frac{1}{4}w_0L\left(\frac{1}{2}L\right) \quad M_C = \frac{1}{12}w_0L^2$$



No ponto D: Tomando-se $x = \frac{1}{4}L$, nas Eqs. (2) e (3) e lembrado que uma chave que contém uma quantidade negativa é igual a zero, escrevemos:

$$V_D = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{1}{4}L\right)^2 + \frac{2w_0}{L} \left(-\frac{1}{4}L\right)^2 + \frac{1}{4}w_0L \quad V_D = \frac{3}{16}w_0L$$

$$M_D = -\frac{w_0}{3L} \left(\frac{1}{4}L\right)^3 + \frac{2w_0}{3L} \left(-\frac{1}{4}L\right)^3 + \frac{1}{4}w_0L\left(\frac{1}{4}L\right) \quad M_D = \frac{11}{192}w_0L^2$$

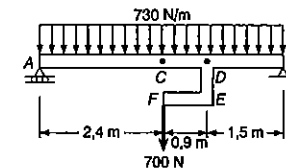
No ponto E: Tomando-se $x = \frac{3}{4}L$ nas Eqs (2) e (3), nós temos:

$$V_E = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{3}{4}L\right)^2 + \frac{2w_0}{L} \left(\frac{1}{4}L\right)^2 + \frac{1}{4}w_0L \quad V_E = -\frac{3}{16}w_0L$$

$$M_E = -\frac{w_0}{3L} \left(\frac{3}{4}L\right)^3 + \frac{2w_0}{3L} \left(\frac{1}{4}L\right)^3 + \frac{1}{4}w_0L\left(\frac{3}{4}L\right) \quad M_E = \frac{11}{192}w_0L^2$$

PROBLEMA RESOLVIDO 7.8

A barra rígida DEF é soldada no ponto D a uma viga de aço AB. Para o carregamento indicado, determinar: (a) as equações que definem a força cortante e o momento fletor, em qualquer ponto da viga; (b) a localização e a intensidade do maior momento fletor.



Reações. Vamos considerar a viga e a barra como um corpo livre e observar que a carga total é 4204 N. Devido a simetria, cada uma das reações é igual a 2102 N.

Diagrama de Carregamento Modificado. Substituindo a carga de 700 N aplicada em F um sistema força-momento em D então obtemos um diagrama de carregamento consistindo de um momento concentrado, três cargas concentradas (incluindo as duas reações) e uma carga uniformemente distribuída.

$$w(x) = 730 \text{ N/m} \quad (1)$$

(a) *Equações da força cortante e do momento fletor.* Nós obtemos $V(x)$ pela integração de (1), mudando-se o sinal e adicionando as constantes representativas das contribuições de R_A e P na força cortante. Visto que P somente afeta $V(x)$ para valores de x maior que 3,3 m, usamos uma função degrau para expressar esta contribuição.

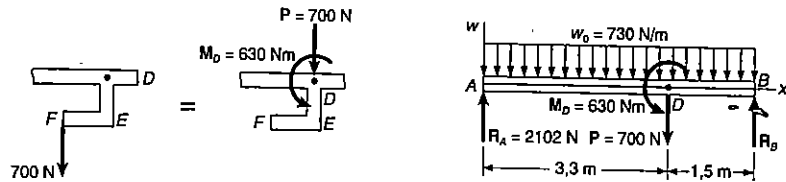
$$V(x) = -730x + 2102 - 700 \langle x - 3,3 \rangle^0 \quad (2)$$

Obtemos $M(x)$ pela integração de (2) e usando uma função degrau para representar a contribuição do momento concentrado M_D :

$$M(x) = -365x^2 - 700 \langle x - 3,3 \rangle^1 - 630 \langle x - 3,3 \rangle^0 \quad (3)$$

(b) *Maior momento fletor.* Uma vez que M é máximo ou mínimo quando $V = 0$, levamos $V = 0$ em (2) e resolvemos esta equação para x , para encontrar a localização do maior momento fletor. Considerando os primeiros valores de x menores que 3,3 m, e notando que para tais valores a chave é igual a zero, escrevemos:

$$-730x + 2102 = 0 \quad x = 2,88 \text{ m}$$



Considerando agora valores de x maiores que 3,3 m, para o qual a chave é igual a 1, escrevemos:

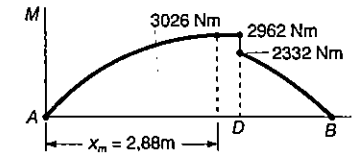
$$-730x + 2102 - 700 = 0 \quad x = 1,92 \text{ m}$$

Visto que este valor não é maior que 3,3 m, ele deve ser rejeitado. Então, o valor de x correspondente ao maior momento fletor é

$$x_m = 2,88 \text{ m}$$

Substituindo este valor para x na Eq. (3), obtemos

$$M_{m\acute{a}x} = -365(2,88)^2 + 2102(2,88) - 700(-1,38)^1 - 630(-1,38)^0$$



e lembrando que as chaves que contém uma quantidade negativa são iguais a zero,

$$M_{m\acute{a}x} = -365(2,88)^2 + 2102(2,88) \quad M_{m\acute{a}x} = 3026 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O diagrama de momento fletor está plotado. Notar a descontinuidade no ponto D , devido ao momento concentrado aplicado nesse ponto. Os valores de M imediatamente à esquerda e imediatamente à direita de D foram obtidos fazendo-se $x = 3,3$ m na Equação (3) e substituindo a função degrau $\langle x - 3,3 \rangle^0$ por 0 e 1, respectivamente.

PROBLEMAS

Nos problemas seguintes, assumir a origem das coordenadas no ponto A.

7.69 a 7.72 Pede-se: (a) Para a viga com o carregamento mostrado e usando funções singulares, escrever as equações que definem as curvas do diagrama de força cortante e de momento fletor; (b) Determinar o máximo momento fletor na viga.

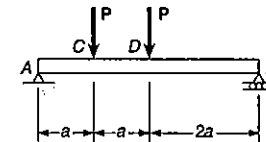


Fig. P7.69

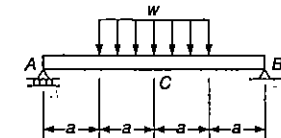


Fig. P7.70

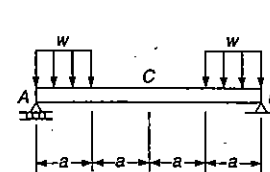


Fig. P7.71

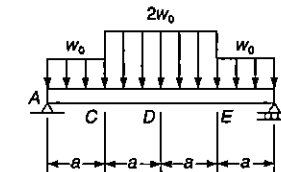


Fig. P7.72

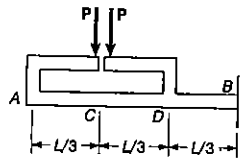


Fig. P7.73

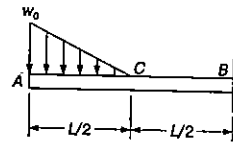


Fig. P7.74

7.73 e 7.74 Pede-se: (a) Para a viga com o carregamento mostrado e usando funções singulares, escrever as equações que definem as curvas do diagrama de força cortante e de momento fletor; (b) Determinar o momento fletor no ponto B.

7.75 e 7.76 Pede-se: (a) Para a viga com o carregamento mostrado e usando funções singulares, escrever as equações que definem as curvas do diagrama de força cortante e de momento fletor; (b) Determinar o máximo momento fletor na viga.

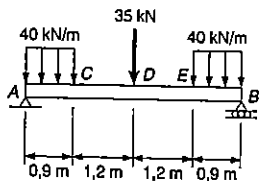


Fig. P7.75

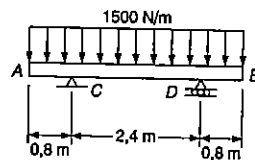


Fig. P7.76

7.77 e 7.78 Pede-se: (a) Para a viga com o carregamento mostrado e usando as funções singulares, escrever as equações que definem as curvas dos diagramas de forças cortante e de momento fletor; (b) Determinar o máximo momento fletor na viga.

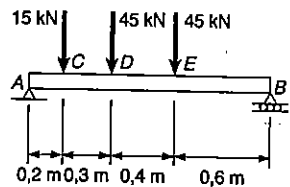


Fig. P7.77

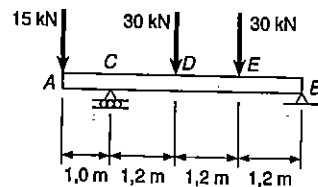


Fig. P7.78

7.79 a 7.82 Pede-se: (a) Para a viga com o carregamento mostrado e usando as funções singulares, escrever as equações que definem as curvas dos diagramas de força cortante e de momento fletor; (b) Determinar a localização e a intensidade do máximo momento fletor na viga e a máxima tensão normal devido à flexão.

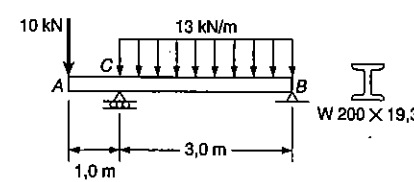


Fig. P7.79

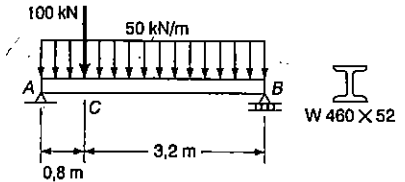


Fig. P7.80

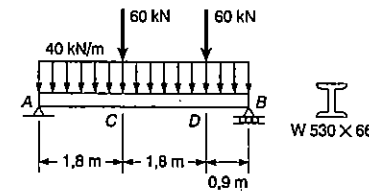


Fig. P7.81

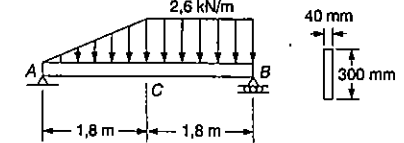


Fig. P7.82

7.83 e 7.84⁵ Para a viga com o carregamento indicado usando as funções singulares, pede-se escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a força cortante e o momento fletor, em seções distantes ΔL uma da outra, a começar pela extremidade A e a terminar no apoio da direita.

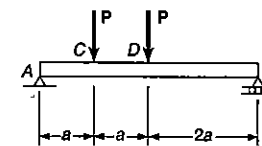


Fig. P7.83

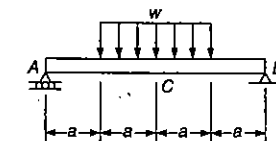


Fig. P7.84

5 Os Probs. 7.83 até 7.88 necessitam do uso de um computador.

7.85 a 7.88 Pede-se: (a) Para uma viga com o carregamento indicado e usando as funções singulares, escrever um programa de computador que possa ser usado para tabular os valores da força cortante e do momento fletor, em seções distantes de ΔL , começando pela extremidade A e terminando na extremidade B; (b) Usando a tabulação da parte a, localizar, por interpolação, o ponto onde $V = 0$, e então, calcular o máximo momento fletor na viga e a máxima tensão normal devido à flexão.

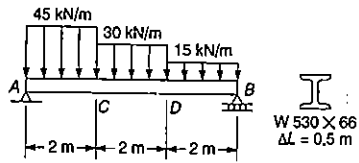


Fig. P7.85

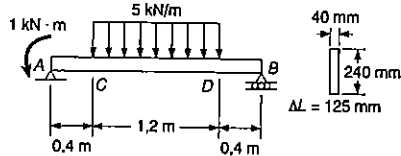


Fig. P7.86

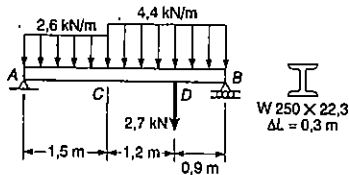


Fig. P7.87

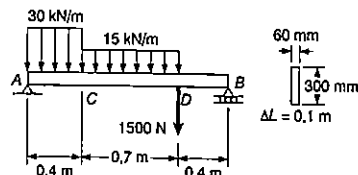


Fig. P7.88

7.6 TENSÕES PRINCIPAIS EM UMA VIGA

Consideremos a viga prismática AB submetida a uma carga transversal arbitrária (Fig. 7.21); chamemos de M e V o momento fletor e a força cortante que agem em uma seção no ponto C. Vimos nos Capítulos 4 e 5 que, dentro do regime elástico, as tensões que se exercem em um pequeno elemento de faces perpendiculares, respectivamente aos eixos x e y , se reduzem à tensão normal $\sigma_m = M \cdot c / I$ se o elemento está situado na superfície livre da viga, ou à tensão de cisalhamento $\tau_m = VQ / It$ se o elemento estiver na linha neutra. A Fig. 7.22 ilustra esse fato.

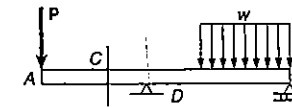


Fig. 7.21

Em qualquer outro ponto da viga, o elemento vai estar submetido simultaneamente à tensão normal

$$\sigma_x = - \frac{My}{I} \tag{7.14}$$

onde y é a distância da fibra em que se encontra o elemento até a linha neutra, e à tensão de cisalhamento

$$\tau_{xy} = - \frac{VQ}{It} \tag{7.15}$$

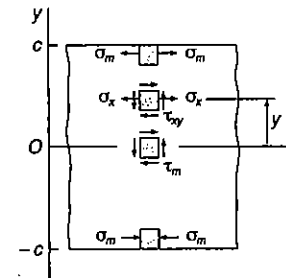


Fig. 7.22

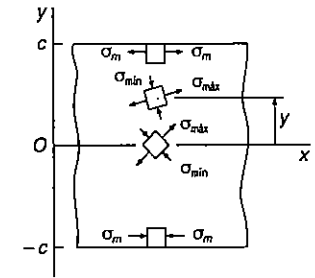


Fig. 7.23

onde Q é momento estático em relação ao eixo neutro da parte da seção transversal localizada acima do ponto onde se calcula a tensão, e t é a largura da seção transversal nesse ponto. Usando qualquer um dos métodos de análise apresentados no Capítulo 6, podemos obter as tensões principais em qualquer ponto da seção transversal (Fig. 7.23).

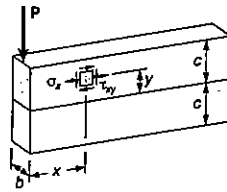


Fig. 7.24

Surge agora a seguinte questão: A tensão normal máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$ pode, em algum ponto da viga, suplantar o valor $\sigma_m = M \cdot c/I$ calculado para a superfície da viga? Se isso for possível a determinação da maior tensão normal na viga envolve um trabalho de análise bem mais amplo que a simples utilização da Eq. 7.1 para o cálculo de $|M|_{m\acute{a}x}$. Vamos tentar responder a esta questão investigando a distribuição das tensões principais em uma viga em balanço de seção retangular a estreita, submetida a uma força concentrada P na sua extremidade livre (Fig. 7.24).

O Capítulo 5 mostrou que as tensões normal e de cisalhamento em um ponto localizado à distância x da força P e à distância y acima da linha neutra são dadas pelas Eqs. 5.16 e 5.15, respectivamente. O momento de inércia da seção transversal é

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(bh)(2c)^2}{12} = \frac{Ac^2}{3}$$

onde A é a área da seção transversal e c é igual à metade da altura da viga. Escrevemos então

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} = \frac{Pxy}{\frac{1}{3}Ac^2}$$

ou

$$\sigma_x = 3 \frac{P}{A} \frac{xy}{c^2} \tag{7.16}$$

e

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \tag{7.17}$$

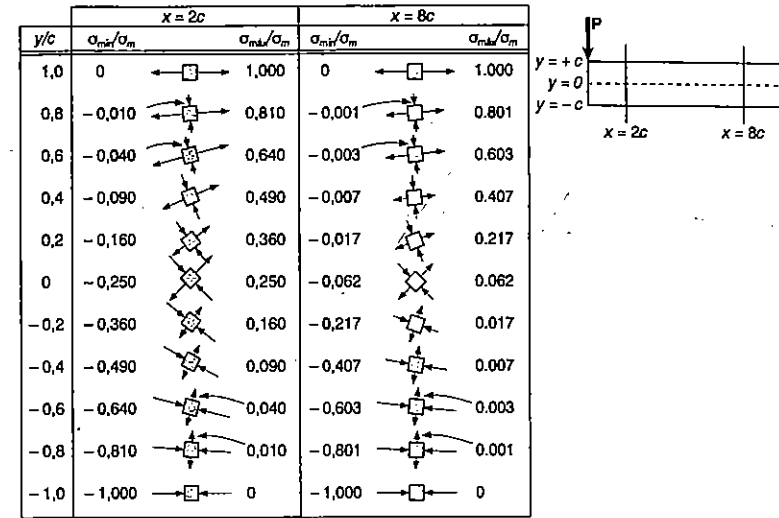


Fig. 7.25 Distribuição de tensões principais em duas seções transversais de uma viga em balanço, de seção retangular, suportando uma única carga concentrada.

O valor $\sigma_{m\acute{a}x}$ pode ser encontrado, para qualquer ponto da viga⁶, pelo método das Secs. 6.3 ou 6.4. A Fig. 7.25 mostra os resultados obtidos para as relações $\sigma_{m\acute{a}x}/\sigma_m$ e $\sigma_{m\acute{i}n}/\sigma_m$ em duas seções transversais da viga, correspondentes aos pontos $x = 2c$ e $x = 8c$. Em cada uma das seções, essas relações foram calculadas em onze diferentes pontos. A orientação dos eixos principais também é indicada na Fig. 7.25, para cada um dos onze pontos.

Nas duas seções estudadas, fica claro que $\sigma_{m\acute{a}x}$ não excede o valor σ_m . Se ocorre $\sigma_{m\acute{a}x} > \sigma_m$ em outro ponto qualquer da viga, será nas proximidades do ponto de aplicação da força P, onde σ_m é pequeno comparado com τ_m .⁷ Mas, para seções próximas do ponto de aplicação de cargas, não tem validade o princípio de Saint-Venant, de modo que não podemos usar as Eqs. 7.16 e 7.17, exceto no caso pouco comum de carga com distribuição parabólica ao longo da seção (conf. Sec. 5.7). Para as seções próximas aos pontos de aplicação de cargas, devem ser usados métodos mais avançados de análise, que levem em conta os efeitos de concentração de tensões. Do que foi dito, podemos concluir que, para vigas com seção retangular, a tensão máxima normal é dada pela Eq. 7.1.

⁶ V. Prob. 7.126.

⁷ V. Prob. 7.127.

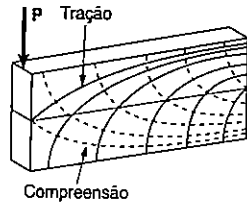


Fig. 7.26 Trajetórias de tensões.

A conclusão acima vale também para muitas vigas de seção transversal não-retangular. Algumas vezes podem ocorrer valores de $\sigma_{m\acute{a}x}$ maiores que σ_m , quando a largura da seção transversal varia de modo a provocar valores altos de τ_{xy} em pontos próximos à superfície da viga. É o caso de perfis I ou perfis de abas largas, no ponto de junção das abas com a alma do perfil. Devemos então calcular a tensão principal $\sigma_{m\acute{a}x}$ nesses pontos, para a seção onde $|M|$ é máximo (ver Prob. Resolvido 7.11).

Na Fig. 7.25 estão indicadas as direções dos eixos principais de onze pontos da viga nas duas seções estudadas. Se a análise feita fosse estendida a mais pontos e a um número maior de seções transversais, poderiam ser desenhados dois sistemas de curvas ortogonais na face da viga (Fig. 7.26). Um dos sistemas seria constituído de curvas tangentes aos eixos principais correspondentes a $\sigma_{m\acute{a}x}$ enquanto o outro sistema se constituiria das curvas tangentes aos eixos principais correspondentes a $\sigma_{m\acute{i}n}$. Esses sistemas de curvas são chamados *trajetórias de tensões*. O primeiro grupo de trajetórias (linhas cheias) define em cada um dos seus pontos a direção da tensão máxima de tração, enquanto o segundo grupo de trajetórias (linhas tracejadas) indica a direção da tensão máxima de compressão.⁸

7.7 PROJETO DE VIGAS PRISMÁTICAS

As Secs. 7.2 e 7.6 mostraram que o projeto de uma viga depende essencialmente do valor absoluto máximo, $|M|_{m\acute{a}x}$ do momento fletor na viga. Na seção crítica em que ocorre o momento máximo absoluto, a tensão normal máxima ocorre na superfície da viga, sendo calculada pela Eq. 7.1. No entanto, como vimos na seção precedente, em

⁸ Um material frágil, como o concreto, vai romper por tração em planos perpendiculares às trajetórias de tração. Para proporcionar segurança à ruptura, a armação da viga deve ser colocada de maneira a interceptar esses planos. Por outro lado, os enrijecedores colocados na alma de vigas para prevenir os efeitos de instabilidade lateral só apresentarão rendimento se interceptarem planos perpendiculares às trajetórias de compressão.

certas formas de seção transversal podemos encontrar o valor $\sigma_{m\acute{a}x}$ em qualquer outro ponto da viga. Além disso, há situações em que o projeto da viga depende do valor máximo absoluto $|V|_{m\acute{a}x}$ da força cortante na viga e não do valor $|M|_{m\acute{a}x}$.

Um dimensionamento correto de viga deve levar em conta todos esses pontos. Ao mesmo tempo, ele deve levar ao projeto mais econômico. Isso significa que, entre vigas de mesmo material, quando outros dados coincidem, devemos escolher aquela de menor peso por unidade de comprimento (e, portanto, de menor seção transversal). O procedimento para o dimensionamento de uma viga deve incluir os seguintes passos⁹:

1. Determinamos os valores σ_{adm} e τ_{adm} do material de uma tabela de propriedades de materiais ou de especificações do projeto. Podemos também calcular esses valores a partir de σ_U e τ_U apropriando um coeficiente de segurança (Sec. 1.9). Adotando por hora que o valor σ_{adm} é igual para tração e compressão, procedemos como segue.
2. Com as condições de carregamento dadas, desenhamos os diagramas de força cortante e momento fletor determinando os valores máximos absolutos $|V|_{m\acute{a}x}$ e $|M|_{m\acute{a}x}$.
3. Assumimos que o dimensionamento da viga é controlado pelo valor da tensão normal no ponto $y = \pm c$ na seção transversal de máximo momento fletor. Calculamos então o mínimo valor admissível do módulo resistente $W = I/c$. Substituímos σ_{adm} em lugar de σ_m na Eq. 7.1 e calculamos $W = I/c$, encontrando

$$W_{m\acute{i}n} = \frac{|M|_{m\acute{a}x}}{\sigma_{adm}} \quad (7.18)$$

4. Entre as seções transversais utilizáveis, consideramos aquelas com módulo resistente $W > W_{m\acute{i}n}$, escolhendo entre elas a seção com menor peso por unidade de comprimento. Ela será a seção mais econômica para a qual $\sigma_m \leq \sigma_{adm}$. Devemos notar que essa seção não é necessariamente a que possui o menor valor de W (ver Exemplo 7.6). Em certos casos, podemos ficar limitados por outras considerações, tais como restrições no valor da altura da seção transversal ou valores admissíveis para a deflexão da viga (Capítulos 8 e 9).

⁹ Assumimos neste capítulo que as vigas estudadas são convenientemente contraventadas contra instabilidade lateral, e que possuem dispositivos para prevenir contra a flambagem localizada da alma em pontos de cargas concentradas.

5. Uma vez escolhida a viga, devemos verificar sua resistência à força cortante. Levando os valores de Q , I e t na Eq. 7.2, determinamos o valor máximo τ_m da tensão de cisalhamento τ_{xy} na viga:

$$\tau_m = \frac{|V|_{\text{máx}} Q}{It} \quad (7.19)$$

Sabemos que no caso de vigas na seção retangular a tensão de cisalhamento máxima é dada por (Sec. 5.6)

$$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{|V|_{\text{máx}}}{A} \quad (7.20)$$

Para os perfis I ou perfis de abas largas, é costume adotar-se que toda força cortante é resistida apenas pela alma, de modo que

$$\tau_m = \frac{|V|_{\text{máx}}}{A_{\text{alma}}} \quad (7.21)$$

Se o valor encontrado para τ_m exceder o valor τ_{adm} , devemos adotar uma seção transversal maior; ao contrário, se $\tau_m \leq \tau_{\text{adm}}$, a viga adotada é aceitável¹⁰.

6. No caso de perfis I e perfis de abas largas, é importante fazer-se uma verificação do valor $\sigma_{\text{máx}}$ na junção da alma com as abas na seção de momento máximo, para que não ocorra que $\sigma_{\text{máx}}$ exceda o valor σ_{adm} . Usualmente basta que se tenha uma estimativa rápida de $\sigma_{\text{máx}}$ sendo desnecessário o cálculo das componentes de tensões σ_x e τ_{xy} .

A discussão acima se limitou aos casos de materiais que apresentam o mesmo valor σ_{adm} na tração e na compressão. Quando σ_{adm} é diferente para tração e compressão, devemos escolher a seção transversal de modo que $\sigma_m < \sigma_{\text{adm}}$ tanto para tração como para compressão. Se a seção transversal não for simétrica em relação à linha neutra, a maior tensão de tração e a maior tração de compressão não precisam ocorrer obrigatoriamente na seção de momento máximo $|M|$. Uma delas pode ocorrer onde M é máximo, e a outra onde M é mínimo. Desse modo, no procedimento descrito, o

¹⁰ Devemos observar que o fato de ocorrer $\tau_m > \tau_{\text{adm}}$ significa apenas que $|V|_{\text{máx}}$ é um valor muito alto para a seção adotada. Isso não quer dizer que o material irá romper por cisalhamento; na verdade, um material frágil atingiria a ruptura por tração ao longo de um plano principal de tensão. Do mesmo modo, $\sigma_m > \sigma_{\text{adm}}$ indica apenas que $|M|_{\text{máx}}$ é um valor muito alto para a seção adotada; enquanto um material frágil realmente rompe por tração, um material dútil apresentaria ruptura por cisalhamento ao longo de um plano de cisalhamento máximo (conf. Sec. 7.2).

segundo passo deve incluir a determinação de $M_{\text{máx}}$ e de $M_{\text{mín}}$, enquanto o terceiro passo deve ser modificado para levar em conta tanto tensões de tração como tensões de compressão.

EXEMPLO 7.6

Escolher um perfil de abas largas para suportar a força de 67 kN como indica a Fig. 7.21. A tensão normal admissível é de 165 MPa e a tensão de cisalhamento admissível é de 100 MPa, para o aço utilizado.

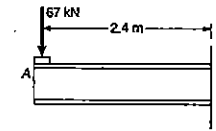


Fig. ex.7.27

1. As tensões admissíveis são dadas:

$$\sigma_{\text{adm}} = 165 \text{ MPa} \quad \tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$$

2. A força cortante é constante ao longo da viga e o momento máximo ocorre em B. Temos

$$|V|_{\text{máx}} = |V| = 67 \text{ kN}$$

$$|M|_{\text{máx}} = (67 \text{ kN})(2,4 \text{ m}) = 160,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. O módulo resistente mínimo para a seção é

$$\begin{aligned} W_{\text{mín}} &= \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{160,8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{165 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 0,975 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ &= 975 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

4. Recorrendo à tabela de *Propriedade dos perfis laminados* do Apêndice C, vemos que os perfis estão colocados em grupos de mesma altura, e cada grupo tem os perfis ordenados em ordem de peso decrescente. Escolhemos em cada grupo o perfil mais leve que tenha um módulo resistente $W = I/c$ pelo menos igual a $W_{\text{mín}}$. Os perfis escolhidos desse modo são W 530 × 66, W 460 × 74, W 410 × 60, W 360 × 64, W 310 × 74, W 250 × 80. O perfil mais econômico é o W 410 × 60 que pesa apenas 600 N/m, embora tenha módulo

maior que três dos outros perfis. O peso total da viga vai ser $600 \times 2,4 = 144 \text{ N}$; esse valor é pequeno se comparado com a força de 67 kN e será desprezado na análise a seguir.

5. Da tabela, vemos que a alma do perfil $W 410 \times 60$ tem $7,7 \text{ mm}$ de espessura. Como a seção tem 407 mm de altura, a área da alma pode ser adotada igual a 3134 mm^2 . Levando esse valor à Eq. 7.21 encontramos

$$\tau_m = \frac{|V|_{\text{máx}}}{A_{\text{alma}}} = \frac{67 \times 10^3 \text{ N}}{3134 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 21,38 \text{ MPa}$$

verificando que $\tau_m < \tau_{\text{adm}}$. A viga adotada é aceitável.

6. Vamos verificar agora se a tensão normal máxima em um ponto imediatamente inferior à aba superior na seção de momento fletor máximo excede a tensão normal admissível¹¹. A espessura da aba é de $12,8 \text{ mm}$ e temos nesse ponto

$$y = 407/2 - 12,8 = 190,7 \text{ mm}$$

Da tabela retiramos o valor do momento de inércia da seção em relação à linha neutra, $I = 216 \times 10^{-6} \text{ mm}^4$. Assim, no ponto considerado, a tensão longitudinal é

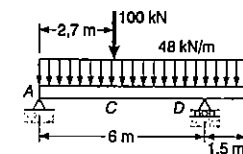
$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{(160,8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0,1907 \text{ m})}{216 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 142 \text{ MPa}$$

Como τ_{xy} nesse ponto é menor que τ_m , podemos ver facilmente, por um esquema de círculo de Mohr, que $\sigma_{\text{máx}} < 165 \text{ MPa}$.

¹¹ O uso desse ponto é conservativo, uma vez que omitimos o efeito do arredondamento entre a aba e a alma do perfil.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.9

A viga biapoiada com balanço AB suporta uma carga uniformemente distribuída de 48 kN/m e uma carga concentrada de 100 kN em C . Sabendo-se que para o aço usado $\sigma_{\text{adm}} = 165 \text{ MPa}$ e $\tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$, selecionar o perfil de abas largas a ser usado.



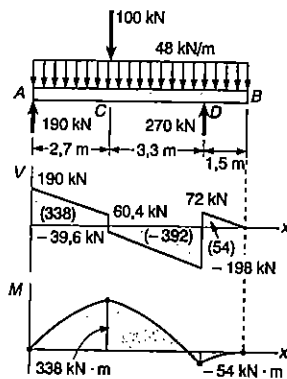
Diagramas de força cortante e momento fletor. Usando os métodos das Secs. 7.3 e 7.4, desenhamos os diagramas e observamos que:

$$|M|_{\text{máx}} = 338 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad |V|_{\text{máx}} = 198 \text{ kN}$$

Módulo resistente. Para $|M|_{\text{máx}} = 338 \text{ kN} \cdot \text{m}$ e $\sigma_{\text{adm}} = 165 \text{ MPa}$, o módulo resistente mínimo aceitável para perfil de abas largas é:

$$W_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{338 \text{ kN} \cdot \text{m}}{165 \text{ MPa}} = 2048 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Seleção do perfil de abas largas. Da tabela de perfis de abas largas do Apêndice C, compilamos uma lista de perfis que tem um módulo resistente maior que $W_{\text{mín}}$ e o mais próximo deste dentro do grupo de perfis com mesma altura nominal.



PERFIL	W (mm ³)
W610 x 101	2530 x 10 ³
W530 x 92	2080 x 10 ³
W460 x 113	2390 x 10 ³
W410 x 114	2200 x 10 ³
W360 x 122	2020 x 10 ³
W310 x 143	2150 x 10 ³

Agora selecionamos o perfil mais econômico,

W530 x 92

Tensão de cisalhamento. Assumimos que a força cortante máxima esteja uniformemente distribuída sobre a área da alma de um perfil W530 x 92, escrevemos:

$$\tau_m = \frac{V_{m\acute{a}x}}{A_{alma}} = \frac{198 \text{ kN}}{5,44 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 36,4 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}$$

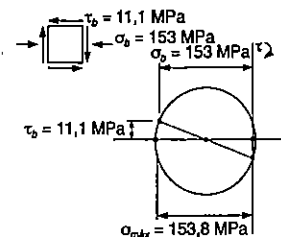
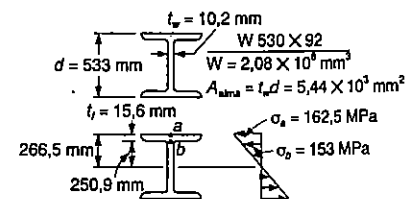
Máxima tensão normal na alma. Verificamos se a tensão máxima no ponto b da seção crítica, onde M é máximo, irá exceder a $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$. Escrevemos:

$$\sigma_a = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W} = \frac{338 \text{ kN} \cdot \text{m}}{2,08 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 162,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (162,5 \text{ MPa}) \frac{0,2509}{0,2665} = 153 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = \frac{V}{A_{alma}} = \frac{60,4 \text{ kN}}{5,44 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 11,1 \text{ MPa}$$

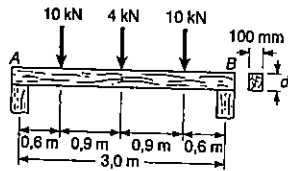
Um esboço do círculo de Mohr irá mostrar que $\sigma_{m\acute{a}x} < 165 \text{ MPa}$.



Comentário. Notamos que o peso linear do perfil escolhido (92 kg/m ou 900 N/m) é aproximadamente 2% do carregamento distribuído dado (48 kN/m). Uma vez que o módulo resistente de W530 x 92 (2,08 x 10⁻³ m³) é aproximadamente 6% maior que o mínimo requerido W_{min} = 2,048 x 10⁻³ m³, concluímos que $\sigma_{m\acute{a}x} < 165 \text{ MPa}$ mesmo quando o peso da viga é incluído.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.10

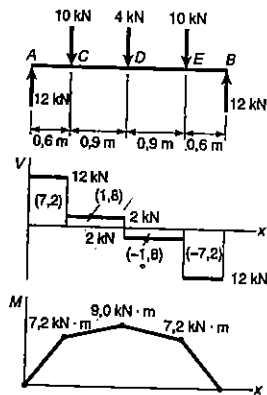
Uma viga de madeira AB tem 3,0 m de vão e 100 mm de largura. Ela suporta as três cargas concentradas indicadas. Determinar a mínima altura necessária d para a viga, sabendo-se que, para a qualidade de madeira usada, $\sigma_{adm} = 12600 \text{ kPa}$ e $\tau_{adm} = 840 \text{ kPa}$.



Momento fletor e força cortante máximos. Uma vez desenhados os diagramas de momento fletor e de força cortante, vemos que

$$V_{m\acute{a}x} = 9,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_{m\acute{a}x} = 12 \text{ kN}$$



Dimensionamento baseado na tensão normal admissível. Inicialmente exprimimos o módulo resistente da seção W , em termos de altura d . Temos

$$I = 1/12 bd^3 \qquad W = I/c = 1/6 bd^2$$

$$W = 1/6 (0,1)d^2 = 0,0167 d^2$$

Para $M_{m\acute{a}x} = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$ e $\sigma_{adm} = 12600 \text{ kPa}$, escrevemos:

$$W = \frac{M_{m\acute{a}x}}{\sigma_{adm}} = 0,0167 d^2 = \frac{9 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{12600 \times 10^3 \text{ N/m}^2}$$

$$d^2 = 0,0427 \qquad d = 0,206 \text{ m} = 206 \text{ mm}$$

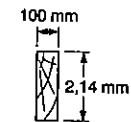
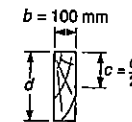
Com esse valor, satisfazemos a restrição de que $\sigma_m \leq 12600 \text{ kPa}$.

Verificação da tensão de cisalhamento. Para $V_{m\acute{a}x} = 12 \text{ kN}$ e $d = 206 \text{ mm}$, encontramos

$$\tau_m = \frac{3 V_{m\acute{a}x}}{2A} = \frac{3(12000 \text{ N}) 10^{-3}}{2(0,1 \text{ m})(0,206 \text{ m})}$$

$$\tau_m = 873 \text{ kPa}$$

Como $\tau_{adm} = 840 \text{ kPa}$, vemos que a altura $d = 0,206 \text{ m}$ não é aceitável, e devemos redimensionar a viga de acordo com a restrição $\tau_m \leq 840 \text{ kPa}$.



Dimensionamento baseado na tensão de cisalhamento admissível. Como sabemos que o dimensionamento é controlado pela tensão de cisalhamento, escrevemos

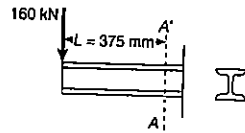
$$\tau_m = \tau_{m\acute{a}x} = \frac{3 V_{m\acute{a}x}}{2A} \qquad 840 \times 10^3 \text{ kPa} = \frac{3(12000 \text{ N})}{2(0,1 \text{ m}) d}$$

$$d = 0,214 \text{ m}$$

A tensão normal é menor que $\sigma_{adm} = 12600 \text{ kPa}$, e a altura $d = 0,214 \text{ m}$ é aceitável.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.11

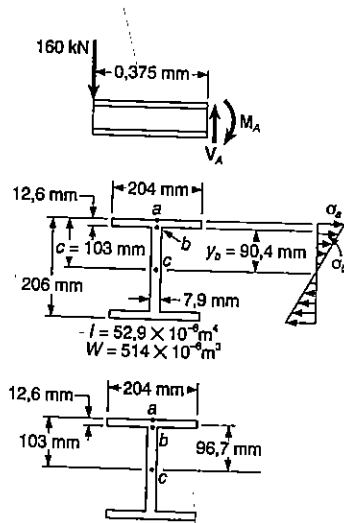
Aplica-se uma força de 160 kN na extremidade de uma viga W200 x 52. Verificar se a tensão normal na viga satisfaz uma especificação de projeto que a limita ao valor de 125 MPa. Desprezar o efeito dos adocamentos e da concentração de tensões.



Força cortante e momento fletor. Na seção A-A' temos

$$M_A = (160 \text{ kN})(0,375 \text{ m}) = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_A = 160 \text{ kN}$$

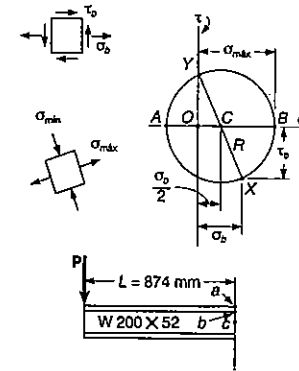


Tensões normais no plano transversal. Recorrendo aos dados da tabela de *Propriedades dos perfis de aço laminado* no Apêndice C, calculamos as tensões σ_a e σ_b .

$$\text{No ponto } a: \sigma_a = \frac{M_A}{W} = \frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}}{514 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 116,7 \text{ MPa}$$

$$\text{No ponto } b: \sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (116,7 \text{ MPa}) \frac{90,4 \text{ mm}}{103 \text{ mm}} = 102,4 \text{ MPa}$$

Vemos que as tensões normais no plano transversal são menores que 125 MPa.



Tensões de cisalhamento no plano transversal.

$$\text{No ponto } a: \quad Q = 0 \quad \tau_a = 0$$

No ponto *b*:

$$Q = (204 \times 12,6)(96,7) = 249 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 249 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_b = \frac{V_A Q}{I t} = \frac{(160 \text{ kN})(249 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(52,9 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,0079 \text{ m})} = 95,3 \text{ MPa}$$

Tensão principal no ponto *b*. O estado de tensões no ponto *b* consiste na tensão normal $\sigma_b = 102,4 \text{ MPa}$ e na tensão de cisalhamento $\tau_b = 95,3 \text{ MPa}$. Desenhando o círculo de Mohr, encontramos:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_b + R = \frac{1}{2} \sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$

$$= \frac{102,4}{2} + \sqrt{\left(\frac{102,4}{2}\right)^2 + (95,3)^2}$$

A especificação $\sigma_{\text{máx}} \leq 125 \text{ MPa}$ não é satisfeita.

Comentário. Para essa viga com esse carregamento, a tensão principal em b é 36% maior que a tensão normal no ponto a . Se o comprimento da viga fosse de 874 mm, a tensão normal máxima ocorreria no ponto a .

PROBLEMAS

7.89 a 7.92 Para a viga com o carregamento mostrado, dimensionar a seção transversal da viga, sabendo-se que para o tipo de madeira usada a $\sigma_{\text{adm}} = 12 \text{ MPa}$ e $\tau_{\text{adm}} = 825 \text{ kPa}$.

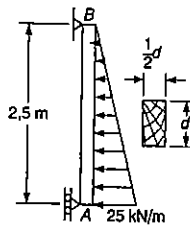


Fig. P7.89

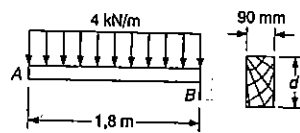


Fig. P7.90

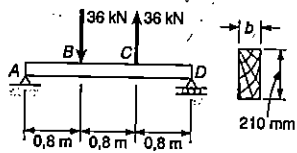


Fig. P7.91

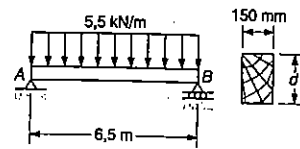


Fig. P7.92

7.93 a 7.96 Para a viga com o carregamento mostrado, dimensionar a seção transversal da viga, sabendo-se que para o tipo de madeira usada a $\sigma_{\text{adm}} = 12 \text{ MPa}$ e $\tau_{\text{adm}} = 860 \text{ kPa}$.

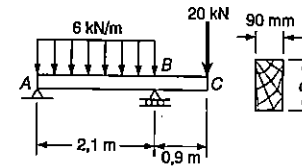


Fig. P7.93

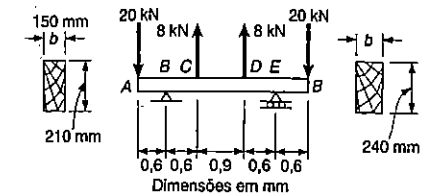


Fig. P7.94

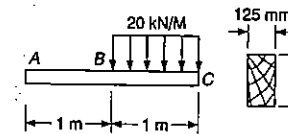


Fig. P7.95

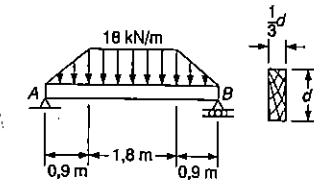


Fig. P7.96

7.97 a 7.100 Sabendo-se que $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ MPa}$ e $\tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$, selecionar o perfil I de abas largas que poderia ser usado para suportar o carregamento mostrado.

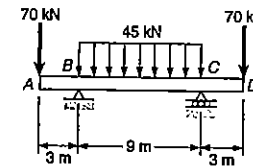


Fig. P7.97

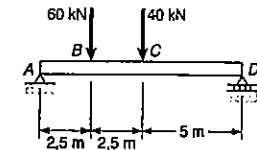


Fig. P7.98

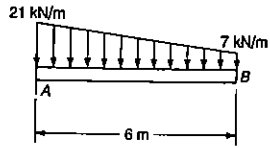


Fig. P7.99

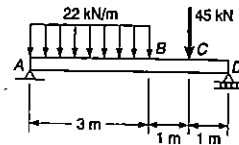


Fig. P7.100

7.101 a 7.104 Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$, selecionar o perfil I de abas largas que poderá ser usado para suportar o carregamento mostrado.

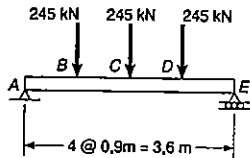


Fig. P7.101

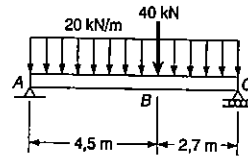


Fig. P7.102

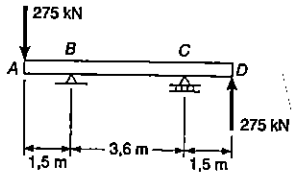


Fig. P7.103

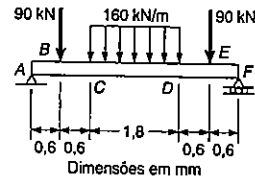


Fig. P7.104

7.105 Dois perfis de aço laminado são soldados juntos e usados para suportar o carregamento mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 90 \text{ MPa}$, determinar o perfil mais leve que pode ser usado.

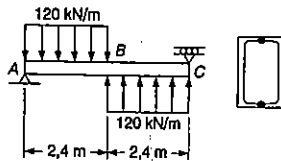


Fig. P7.105

7.106 Três placas são soldadas juntas para formar a viga mostrada. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$, determinar a mínima largura b do flange que pode ser usado.

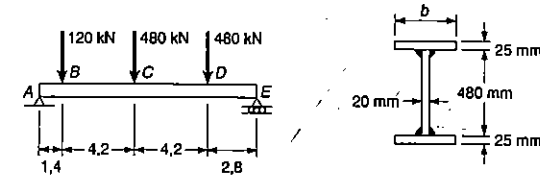


Fig. P7.106

7.107 Dois perfis laminados de aço, em forma de cantoneira, L102 x 76, são perfeitamente unidos para suportar o carregamento mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 85 \text{ MPa}$, determinar a mínima espessura da cantoneira que pode ser usada.

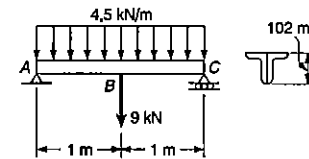


Fig. P7.107

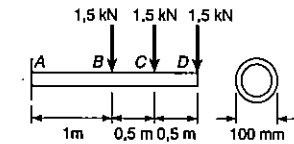


Fig. P7.108

7.109 Quatro vigas de 4,5 m suportam uma carga de 21,5 kN/m e são apoiadas, como mostrado, em uma longarina AD e em paredes de concreto. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 90 \text{ MPa}$, selecionar o perfil de abas largas que poderá ser usado: (a) para as vigas; (b) para a longarina AD.

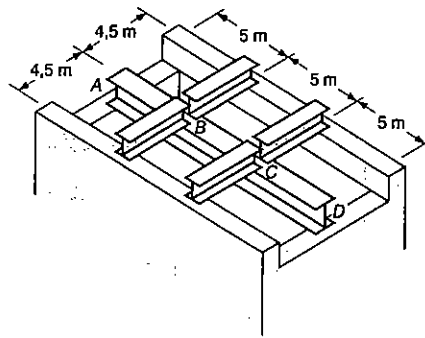


Fig. P7.109

7.110 A viga ABC está fixada às vigas DBE e FCG. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$, selecionar o perfil laminado de abas largas, que poderá ser usado: (a) para a viga ABC; (b) para a viga DBE; (c) para a viga FCG.

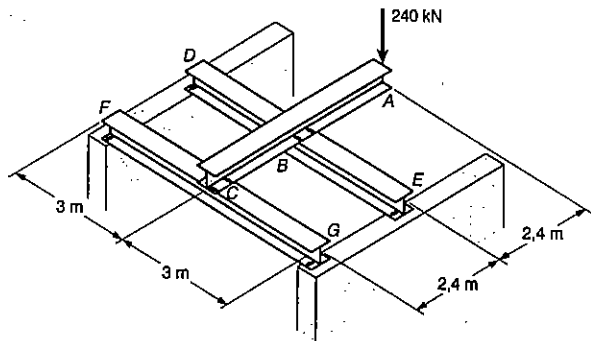


Fig. P7.110

7.111 e 7.112 Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$, selecionar o perfil laminado I para a viga, que poder ser usado para suportar o carregamento distribuído dado, quando este é colocado sobre o solo.

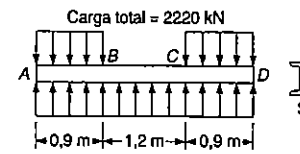


Fig. P7.111

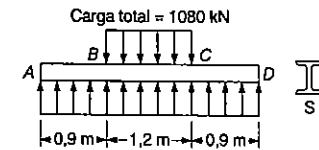


Fig. P7.112

7.113 A barra de 100 mm de largura suporta uma carga de 11 kN e repousa sobre uma fundação, que exerce um carregamento linearmente distribuído como mostrado. Pede-se: (a) Determinar os valores de w_A e w_B , correspondente ao equilíbrio; (b) Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 170 \text{ MPa}$, determinar a mínima espessura t que pode ser usada.

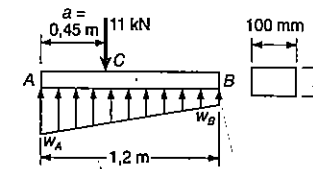


Fig. P7.113

7.114 Resolver o Prob. 7.113, assumindo que a distância a é mudada para 0,55 m.

7.115 e 7.116 Determinar a carga uniformemente distribuída admissível w , para a viga mostrada, sabendo-se que $\sigma_{adm} = +70 \text{ MPa}$ na tração, $\sigma_{adm} = -130 \text{ MPa}$, na compressão, e que $\tau_{adm} = 60 \text{ MPa}$.

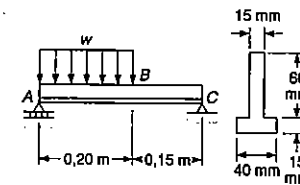


Fig. P7.115

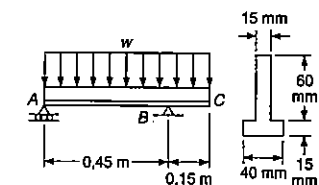


Fig. P7.116

7.117 Determinar o valor admissível de P para o carregamento mostrado, sabendo-se que $\sigma_{adm} = +55 \text{ MPa}$ na tração, $\sigma_{adm} = -125 \text{ MPa}$ na compressão, e $\tau_{adm} = 30 \text{ MPa}$.

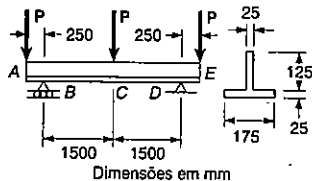


Fig. P7.117

7.118 Resolver o Prob. 7.117, assumindo que o perfil laminado T da viga é invertido.

7.119 As vigas AB, BC e CD têm seções transversais como mostrado e são articuladas por pinos conectores em B e C. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = +150$ MPa na tração e $\sigma_{adm} = -110$ MPa na compressão, determinar: (a) o maior valor admissível de P para que na viga BC não sejam ultrapassadas as tensões admissíveis; (b) a máxima distância a, para que nas vigas em balanço AB e CD, as tensões admissíveis também não sejam excedidas.

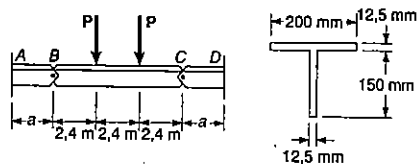


Fig. P7.119

7.120 As vigas AB, BC e CD têm seções transversais como mostrado e são articuladas por pinos conectores em B e C. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = +150$ MPa na tração e $\sigma_{adm} = -110$ MPa na compressão, determinar: (a) o maior valor admissível de w para que na viga BC não sejam ultrapassadas as tensões admissíveis; (b) a máxima distância a, para que nas vigas em balanço AB e CD, as tensões admissíveis também não sejam excedidas.

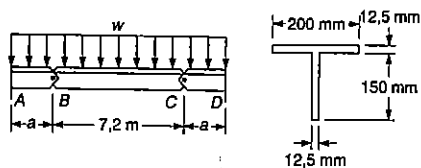


Fig. P7.120

7.121 Uma carga uniformemente distribuída de 66 kN/m deve ser suportada pelas vigas AB e CD, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 140$ MPa e $\tau_{adm} = 85$ MPa, determinar: (a) o menor comprimento admissível l da viga CD, se no perfil laminado de aço W460 x 74 as tensões não devem exceder as admissíveis; (b) o perfil laminado de aço que poderá se usado na viga CD. Desprezar o peso próprio de ambas as vigas.

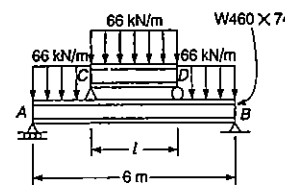


Fig. P7.121

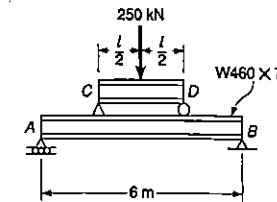


Fig. P7.122

7.123 Resolver o Prob. 7.121, considerando que um perfil laminado de aço W530 x 66 é usado na viga AB.

7.124 e 7.125 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a largura b da viga e a distância x, para que a tensão normal máxima σ_m e a máxima tensão de cisalhamento τ_m na viga sejam simultaneamente iguais a

$$\sigma_{adm} = 11 \text{ MPa}$$

$$\tau_{adm} = 760 \text{ kPa}$$

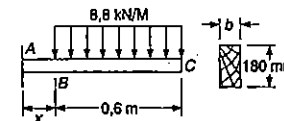


Fig. P7.124

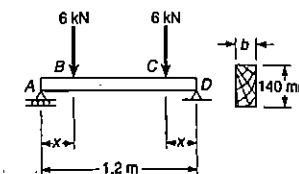


Fig. P7.125

7.126 Usando as Eqs. (7.16) e (7.17), mostrar que em qualquer seção transversal da viga da Fig. 7.24: (a) as direções dos eixos principais de tensão são definidos pela relação

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{c^2 - y^2}{xy}$$

(b) o máximo valor da tensão normal é

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{3 P xy}{2 A c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c^2 - y^2}{xy} \right)^2} \right]$$

***7.127** Usando a equação derivada da parte b do Prob. 7.126, mostrar que, em qualquer seção transversal da viga da Fig. 7.24, onde $x \geq 0,5444c$, o maior valor de $\sigma_{m\acute{a}x}$ ocorre para $y = c$. (Sugestão: Denotando por σ_m , o valor correspondente de $\sigma_{m\acute{a}x}$ para $y = c$ e as posições $x/c = u$ e $y/c = v$, escrever uma equação definindo os valores de v para $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_m$, e mostrar que, para $u \geq 0,5444$, a única raiz real dessa equação é $v = 1$).

7.128 Para a viga e o carregamento do Prob. Resolvido 7.11, determinar a máxima tensão de cisalhamento nos pontos a, b e c .

7.129 Para a viga e o carregamento mostrado, determinar a máxima tensão de cisalhamento nos pontos a, b e c .

7.130 Para a viga e o carregamento mostrado, determinar a máxima tensão normal nos pontos a, b e c .

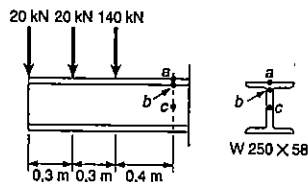


Fig. P7.129 e 130

*7.8 VIGAS DE IGUAL RESISTÊNCIA

Nosso estudo até aqui se limitou à análise de vigas prismáticas, isto é, às vigas de seção transversal constante. Como vimos, o dimensionamento das vigas prismáticas é conduzido de forma que as tensões nas seções críticas sejam no máximo iguais aos valores admissíveis da tensão normal e da tensão de cisalhamento. Segue daí que, nas outras seções transversais, as tensões ficam com valores abaixo dos valores admissíveis. Algumas seções têm valores de tensões realmente bem mais baixos que os valores admissíveis. Desse modo, uma viga prismática é quase sempre superdimensionada, e o uso de vigas não-prismáticas pode levar à economia apreciável de material.

O dimensionamento de uma viga é baseado normalmente no valor σ_m da tensão normal. Assim, o projeto de uma viga não-prismática estará correto se o módulo resistente $W = I/c$ de cada seção transversal satisfizer a equação $\sigma_m = M/W$, onde σ_m é igual à tensão admissível. Calculando o valor de W , escrevemos

$$W = \frac{M}{\sigma_{adm}} \tag{7.22}$$

onde M é o momento fletor de cada seção. Uma viga dimensionada dessa maneira é chamada *viga de igual resistência*.

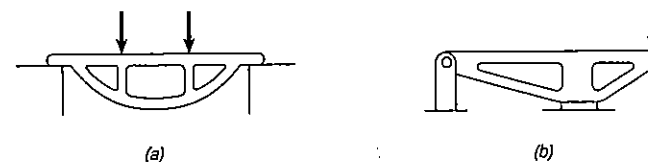


Fig. 7.28

Para peças como componentes de máquinas forjados ou fundidos não é difícil mudar a seção transversal ao longo do comprimento, conseguindo economia de material (Fig. 7.28). Já para um perfil laminado é impraticável variar a seção transversal de modo contínuo ao longo do seu comprimento. Ainda assim, podemos conseguir boa economia de material pelo uso de placas soldadas em algumas partes do perfil, onde o momento fletor apresenta valores altos (Fig. 7.29).

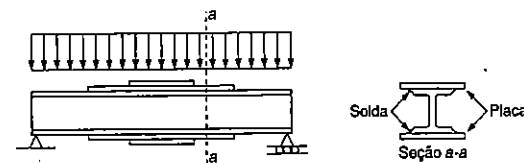


Fig. 7.29

EXEMPLO 7.7

Uma viga simplesmente apoiada AB de vão L será construída colocando-se placas de madeira compensada de mesma largura b e comprimento variado L (Fig. 7.24). A viga deve ser projetada como viga de igual resistência para suportar uma carga concentra-

da no meio do vão. Expressar o comprimento L de uma placa em função da distância h até a face superior da viga, do vão L e da altura h_0 de uma viga de seção transversal constante dimensionada para suportar o mesmo carregamento.

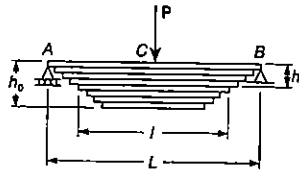


Fig. ex.7.30

O momento fletor para $x \leq 1/2 L$ é (Fig. 7.31):

$$M = \frac{1}{2} Px \quad (7.23)$$

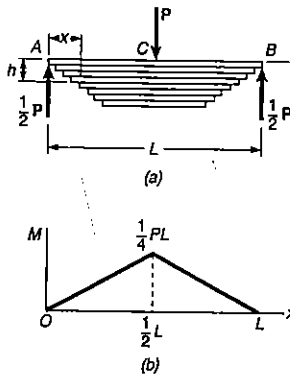


Fig. ex.7.31

O módulo resistente para uma seção retangular vale (Fig. 7.26):

$$W = \frac{1}{c} = \frac{bh^3/12}{h/2} = bh^2/6 \quad (7.24)$$

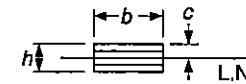


Fig. ex.7.32

Levando os valores de (7.23) e (7.24) em (7.22), temos

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{1}{2} Px}{\sigma_{adm}} \quad (7.25)$$

Essa relação deve ser satisfeita também por uma viga de seção constante em $x = L/2$ e com $h = h_0$:

$$\frac{bh_0^2}{6} = \frac{(\frac{1}{2} P)(\frac{1}{2} L)}{\sigma_{adm}} \quad (7.26)$$

Dividindo membro a membro as expressões (7.25) e (7.26), encontramos

$$\frac{h^2}{h_0^2} = \frac{2x}{L} \quad (7.27)$$

Expressando o comprimento L de uma placa situada à distância h da face superior por

$$l = L - 2x = L \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \quad (7.28)$$

podemos substituir o valor $2x/L$ de (7.27) em (7.28), encontrando

$$l = L \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right) \quad (7.29)$$

Devemos salientar que o resultado obtido não levou em conta a resistência da viga à força cortante; o dimensionamento completo pode levar à necessidade de se estender várias placas ao longo de todo o comprimento L da viga.

É fundamental que as placas sejam coladas umas às outras se desejamos que o conjunto trabalhe como uma peça única, pois aparecem nesse caso tensões horizontais de cisalhamento que não serão resistidas por placas simplesmente justapostas (conf. Capítulo 5). Assim, existe uma semelhança apenas superficial entre a viga de chapas coladas deste exemplo e o caso de um feixe de molas que consiste de várias chapas independentes.

*7.9 DIMENSIONAMENTO DE EIXOS DE TRANSMISSÃO

Na Sec. 3.7 foi discutido o dimensionamento de eixos de transmissão levando-se em conta apenas as tensões produzidas pelo torque exercido no eixo. No entanto, se a potência transmitida ao eixo ou pelo eixo vem através de rodas dentadas e engrenagens (Fig. 7.33a), as forças que agem nos dentes das engrenagens equivalem a sistemas de forças e conjugados aplicados ao centro da seção transversal do eixo (Fig. 7.33b). Desse modo, o eixo está submetido a carregamento transversal juntamente com o carregamento torcional.

As tensões de cisalhamento provocadas pelo carregamento transversal geralmente são bem menores do que aquelas provocadas pelo esforço e torção e serão desprezadas em nossa análise¹². Já as tensões normais provocadas pelo carregamento transversal podem ser bem maiores e, como veremos a seguir, sua contribuição para o valor da tensão de cisalhamento máxima $\tau_{m\acute{a}x}$ deve ser levada em conta.

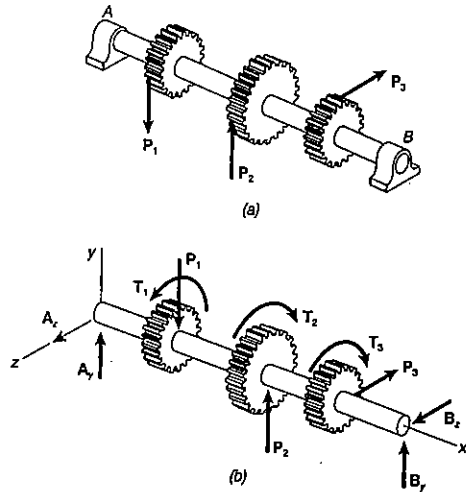


Fig. 7.33

Consideremos uma seção transversal do eixo pelo ponto C. Os vetores indicados apresentam o momento torçor T e os momentos fletores M_y e M_z que ageñ em um plano horizontal e em um plano vertical, respectivamente (Fig. 7.34a). Como qualquer diâmetro da seção transversal é um eixo principal de inércia da seção, vamos

¹² Os Probs. 7.165 e 7.167 são aplicações onde as tensões de cisalhamento provocadas pela carga transversal têm importância.

substituir M_y e M_z por sua resultante M (Fig. 7.34b), para calcularmos a tensão normal σ_x atuante na seção. Vemos que σ_x tem valor máximo na extremidade de diâmetro perpendicular ao vetor que representa M (Fig. 7.35). Os valores das tensões normais nesse ponto são, respectivamente, $\sigma_m = M \cdot c/I$ e zero, enquanto a tensão de cisalhamento é $\tau_m = T \cdot c/J$. Com esses valores marcamos os pontos correspondentes X e Y em um diagrama de círculo de Mohr (Fig. 7.36), encontrando o valor da tensão de cisalhamento máxima

$$\tau_{m\acute{a}x} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

ou

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

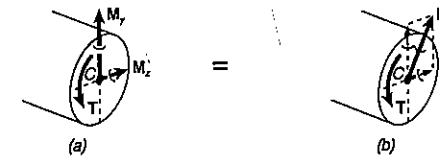


Fig. 7.34

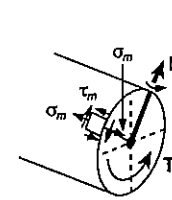


Fig. 7.35

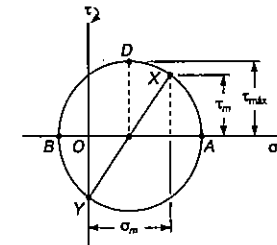


Fig. 7.36

Lembramos que, para seções transversais circulares ou anulares $2I = J$. Escrevemos então

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{c}{J} \sqrt{M^2 + T^2} \tag{7.30}$$

Da expressão acima calculamos o menor valor admissível da relação J/c para a seção transversal do eixo:

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\max}}{\tau_{\text{adm}}} \quad (7.31)$$

O numerador do segundo membro da fórmula representa o valor máximo de $\sqrt{M^2 + T^2}$ no eixo, e τ_{adm} é a tensão admissível de cisalhamento. Se expressarmos o momento M em termos de suas componentes em dois planos coordenados, podemos escrever também

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2})_{\max}}{\tau_{\text{adm}}} \quad (7.32)$$

As Eqs. 7.31 e 7.32 servem para o dimensionamento de eixos maciços ou de seção vazada. Elas apresentam forma semelhante à Eq. 3.22 da Sec. 3.7, que foi deduzida com a hipótese de só ocorrer carregamento torcional.

A determinação do valor máximo de $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ ficará facilitada se desenharmos os diagramas de momentos fletores para M_z e M_y , bem como um diagrama que representa os valores de T ao longo do eixo (ver Prob. Resolvido 7.12).

*7.10 TENSÕES SOB PONTOS DE APLICAÇÃO DE CARREGAMENTO

No Capítulo 5, quando estudamos as tensões em um elemento de material em uma viga submetida a carregamento transversal, fizemos a hipótese de que o elemento não estava situado diretamente sob uma força concentrada.

De fato, para podermos aplicar o princípio de Saint-Venant, tivemos de adotar o elemento localizado longe de pontos de concentração de cargas e dos apoios (Sec. 5.7). Com estas condições vimos que as tensões consistiam em tensões normais $\sigma_m = -M \cdot y/I$ que atuavam em planos perpendiculares ao eixo da viga, e em tensão de cisalhamento τ_{xy} de valor médio $\tau_{\text{méd}} = VQ/It$ (Fig. 7.37).

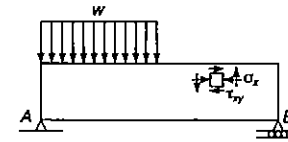


Fig. 7.37

Na Sec. 5.7 vimos que essas expressões podem ser adotadas no cálculo do valor das tensões σ_x e τ_{xy} de um elemento localizado sob carregamento distribuído, pois o erro cometido é pequeno para os valores da razão entre vão e altura encontradas na prática. De qualquer modo, é claro que o elemento sob carga distribuída fica submetido a tensões normais σ_x nas suas faces horizontais (Fig. 7.38).

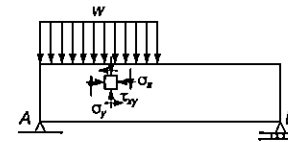


Fig. 7.38

No caso de uma viga de seção retangular de largura unitária e altura $2c$ submetida a carregamento distribuído $w(x)$, a tensão normal σ_y varia de $\sigma_y = -w$ na superfície superior da viga até $\sigma_y = 0$ na superfície inferior (Fig. 7.39). O valor de σ_y na superfície neutra pode ser determinado se considerarmos o equilíbrio da porção da viga situada acima da superfície neutra e limitada por dois planos transversais em C e C' (Fig. 7.40a). Consideremos apenas as forças verticais, notando que as forças cortantes que agem nas faces verticais do corpo livre são iguais à metade da força cortante em C e C' . Temos (Fig. 7.40b).

$$+\Sigma F_y = 0: \quad w \Delta x + \sigma_y \Delta x - \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} (V + \Delta V) = 0$$

$$\sigma_y = -w - \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

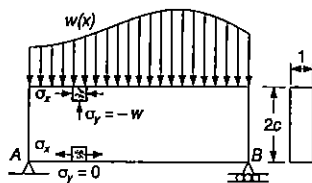


Fig. 7.39

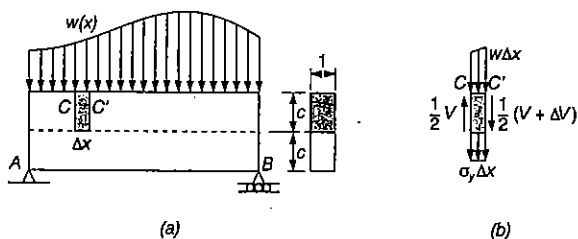


Fig. 7.40

Quando Δx tende a zero, o limite $\Delta V/\Delta x$ representa a derivada dV/dx da força cortante. Vimos na Sec. 7.4 que $dV/dx = -w$. Concluímos desse modo que, na superfície neutra, $\sigma_y = -1/2 \cdot 13$

Na maior parte das aplicações práticas, o valor da tensão vertical σ_y é pequeno em comparação à tensão longitudinal σ_x e contribui muito pouco para o valor $\sigma_{m\acute{a}x}$ da tensão máxima em qualquer ponto. No caso da viga AB de vão L , largura unitária e altura $2c$, que suporta carga distribuída w (Fig. 7.41), o valor máximo de σ_y é w , enquanto o valor máximo de σ_x a uma distância x da extremidade A é

13 A tensão normal σ não varia linearmente com a distância y da linha neutra até o ponto considerado. Estudando o equilíbrio da porção da viga situada entre os planos transversais que passam por C e C' e acima do plano horizontal de ordenada y , podemos mostrar (Prob. 7.177) que

$$\sigma_y = \frac{1}{4} w \left(\frac{y^3}{c^3} - 3 \frac{y}{c} - 2 \right) \tag{7.33}$$

$$(\sigma_x)_m = \frac{Mc}{I} = \frac{\frac{1}{2} wx(L-x)c}{\frac{2}{3} c^3} = \frac{3}{4} \frac{w}{c^2} x(L-x)$$

A relação entre os dois valores máximos das tensões normais é

$$\frac{(\sigma_y)_m}{(\sigma_x)_m} = \frac{4}{3} \frac{c^2}{x(L-x)} \tag{7.34}$$

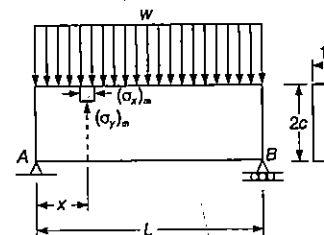


Fig. 7.41

Para uma razão vão-altura igual a 10, quer dizer, para $L/c = 20$, encontramos que $(\sigma_y)_m/(\sigma_x)_m$ é igual a 0,0370 para $x = 0,10L$, 0,0178 para $x = 0,25L$ e 0,0133 no meio do vão.

No caso de uma força concentrada P (Fig. 7.42), as fórmulas deduzidas no Capítulo 5 deixam de ter validade nas vizinhanças do ponto de aplicação de P . Por outro lado, é claro que um elemento situado diretamente sob carga concentrada ficará submetido a um valor alto da tensão normal σ_y . Na prática, entretanto, um carregamento sempre se distribui por uma pequena área, e para grandes cargas se utilizam placas de apoio para distribuir o carregamento em uma parte maior da viga (Fig. 7.43). Além disso, ocorre escoamento nos materiais dúteis em pontos de cargas concentradas, o que contribui para espalhar o carregamento em uma porção maior da superfície da viga reduzindo o valor de σ_y .

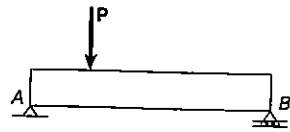


Fig. 7.42

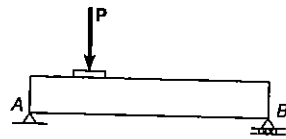


Fig. 7.43

A concentração de tensões provocada pela força **P** é grande próximo à superfície da viga, mas decresce rapidamente para o interior desta. No caso teórico e extremo de uma força **P** aplicada em uma porção infinitesimal da superfície de uma viga retangular de largura unitária e altura $2c$, a teoria matemática da elasticidade mostra que a tensão normal em um ponto da superfície neutra situado diretamente em baixo da carga é $\sigma_y = -0,456 P/c$. Esse valor é quase o mesmo que se obteria no caso da carga uniformemente distribuída $w = P/c$ (Fig. 7.44). Vemos também da Fig. 7.44 que a tensão normal longitudinal σ_x não é nula na superfície neutra ($y = 0$), o que nos leva a concluir que a fórmula $\sigma_x = -M \cdot y/I$ não se aplica aos pontos de aplicação de forças concentradas. Por último, podemos ver que a variação da tensão de cisalhamento ao longo da superfície neutra é representada por uma curva suave, embora o diagrama de força cortante seja descontínuo no ponto de aplicação da força. A tensão τ_{xy} é nula diretamente sob a força aplicada¹⁴.

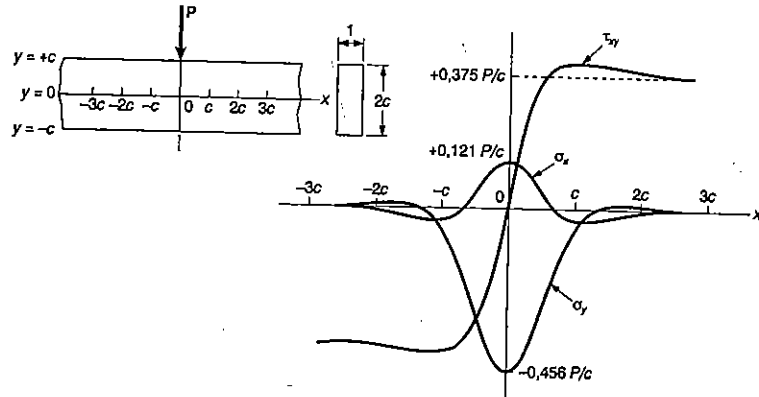
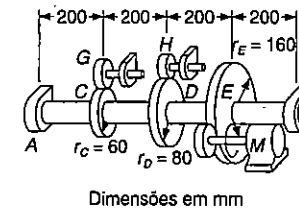


Fig. 7.44 Variação de tensões ao longo da superfície neutra de uma viga retangular estreita submetida a uma carga concentrada.

14 Ver S. P. Timoshenko e J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3. ed., McGrawHill Book Co., 1970, Sec. 40.

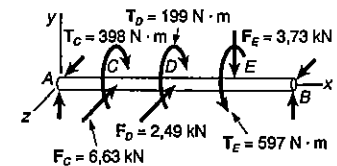
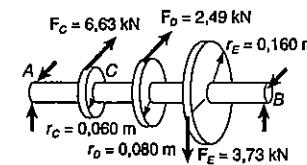
PROBLEMA RESOLVIDO 7.12

Um eixo maciço **AB** gira a 480 rpm, transmitindo 30 kW do motor **M** às máquinas conectadas por engrenagens em **G** e **H**. Em **G** são transmitidos 20 kW e em **H** 10 kW. Determinar o menor diâmetro permitido para o eixo **AB**, sendo $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$.



Solução. Com $f = 480 \text{ rpm} = 8 \text{ Hz}$, determinamos o torque atuante em **G**:

$$T_E = \frac{P}{2\pi f} = \frac{30 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 597 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Determinamos a força tangencial correspondente que atua na engrenagem:

$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,16 \text{ m}} = 3,73 \text{ kN}$$

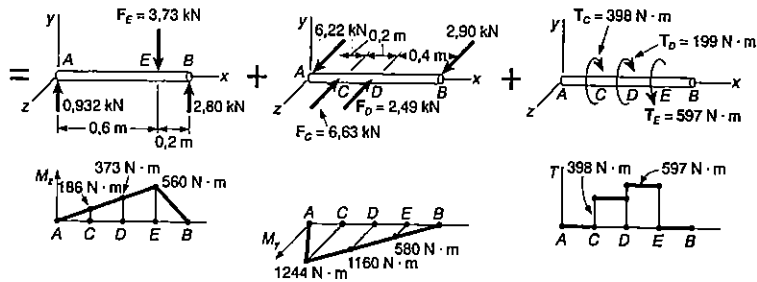
O mesmo procedimento para as engrenagens em **C** e **D** leva a

$$T_C = \frac{20 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 398 \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_C = 6,63 \text{ kN}$$

$$T_D = \frac{10 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 199 \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_D = 2,49 \text{ kN}$$

Substituímos as forças que atuam nas engrenagens por sistemas equivalentes de forças e conjugados.

Diagramas de momentos fletores e de momentos torçores



Seções transversais críticas. Calculando o valor $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ em todas as seções potencialmente críticas, vemos que o valor máximo da expressão acima ocorre à direita do ponto D:

$$\sqrt{(M_y^2 + M_z^2 + T^2)_{\text{máx}}} = \sqrt{(1160)^2 + (373)^2 + (597)^2} = 1357 \text{ N} \cdot \text{m}$$

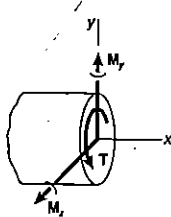
Diâmetro do eixo. Para $\tau_{\text{adm}} = 50 \text{ MPa}$, a Eq. 7.32 fornece

$$\frac{J}{c} = \frac{\sqrt{(M_y^2 + M_z^2 + T^2)_{\text{máx}}}}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{1357 \text{ N} \cdot \text{m}}{50 \text{ MPa}} = 27,14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Para um eixo maciço de raio c , vamos ter

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2} c^3 = 27,14 \times 10^{-6} \quad c = 0,02585 \text{ m} = 25,85 \text{ mm}$$

Diâmetro = $2c = 51,7 \text{ mm}$



PROBLEMAS

7.131 a 7.136 A viga AB tem uma seção transversal retangular de largura b constante e a altura h variável. Sabendo-se que a viga deve ser de resistência constante, expressar h , em termos de x , L e h_0 .

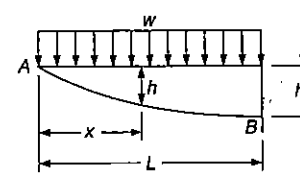


Fig. P7.131

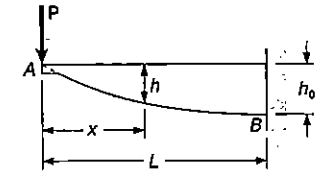


Fig. P7.132

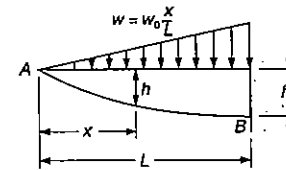


Fig. P7.133

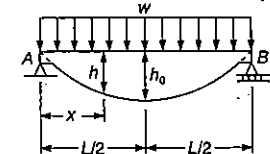


Fig. P7.134

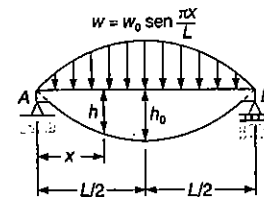


Fig. P7.135

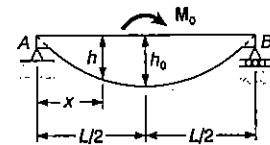


Fig. P7.136

7.137 Expressar o comprimento l de uma tira de madeira compensada do Exemplo 7.7, em termos de h , L e h_0 , considerando que a viga deve ser de igual resistência, quando estiver suportando um carregamento uniformemente distribuído.

7.138 Uma viga em balanço AB é de altura h constante e de largura b variável. Sabendo-se que a viga deve ser de resistência constante, expressar b em termos de b_0 , x e L , se o único carregamento é: (a) uma força vertical em A; (b) uma carga distribuída uniformemente ao longo da linha AB.

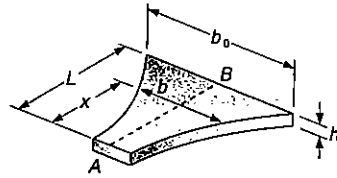


Fig. P7.138

7.139 e 7.140 Uma viga AB é um sólido de revolução de diâmetro variável d . Para a porção AC da viga, expressar d , em termos de d_0 , x e L , sabendo-se que a viga deve ser de igual resistência quando suporta o carregamento mostrado.

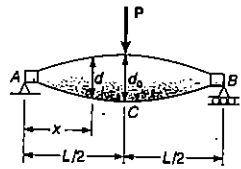


Fig. P7.139

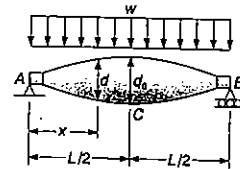


Fig. P7.140

7.141 Duas placas de cobertura, cada uma com 12,7 mm de espessura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W530 x 92, como mostrado. Sabendo-se que $l = 4,2$ m e $b = 250$ mm, determinar a máxima tensão normal em uma seção transversal: (a) no centro da viga; (b) imediatamente à esquerda de D.

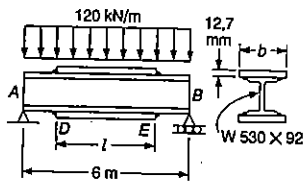


Fig. P7.141 e P7.144

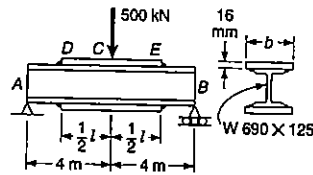


Fig. P7.142 e P7.143

7.142 Duas placas de cobertura, cada uma com 16 mm de espessura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W690 x 125, como mostrado. Sabendo-se que $l = 4,4$ m e $b = 300$ mm, determinar a máxima tensão normal em uma seção transversal (a) no centro C da viga; (b) imediatamente à direita de E.

7.143 Duas placas de cobertura, cada uma com 16 mm de espessura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W690 x 125, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 160$ MPa, determinar: (a) a largura necessária b das placas; (b) o comprimento necessário l das placas.

7.144 Duas placas de cobertura, cada uma com 12,7 mm de espessura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W530 x 92, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 140$ MPa, determinar: (a) a largura necessária b das placas; (b) o necessário comprimento l das placas.

7.145 Duas placas de cobertura, cada uma com 18 mm de espessura e 220 mm de largura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W410 x 85, como mostrado. Sabendo-se que $P = 185$ kN, determinar a máxima tensão normal em uma seção transversal: (a) imediatamente à esquerda de B; (b) em C; (c) imediatamente à direita de D.

7.146 Duas placas de cobertura, cada uma com 18 mm de espessura e 220 mm de largura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W410 x 85, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 150$ MPa e $\tau_{adm} = 90$ MPa, determinar a maior força vertical P, que pode ser aplicada no ponto A da viga mostrada.

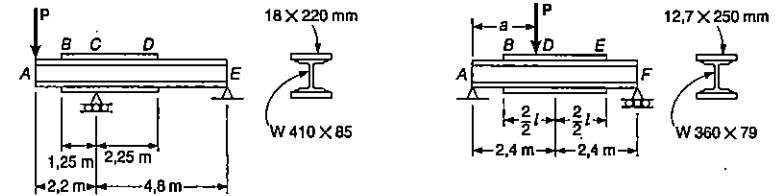


Fig. P7.145 e P7.146

Fig. P7.148 e P7.150

7.147 Resolver o Prob. 7.146, considerando que a porção CD das placas de cobertura tem 2,5 m de comprimento.

7.148 Duas placas de cobertura, cada uma com 12,7 mm de espessura e 250 mm de largura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W360 x 79. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 150$ MPa e $\tau_{adm} = 90$ MPa, determinar a maior força vertical P que pode ser aplicada no ponto D, quando $a = 1,8$ m e $l = 3$ m.

7.149 Resolver o Prob. 7.148, considerando $a = 1,5$ m e $l = 3$ m.

7.150 Duas placas de cobertura, cada uma com 12,7 mm de espessura e 250 mm de largura, são soldadas a uma viga de perfil laminado W360 x 79, como mostrado. Sabendo-se que uma força vertical P pode ser aplicada em qualquer ponto ao longo da viga e que $\sigma_{adm} = 150$ MPa e $\tau_{adm} = 90$ MPa, determinar: (a) a maior força P que pode ser aplicada, se as placas de cobertura são estendidas por todo o comprimento AF da viga; (b) o menor comprimento l das placas de cobertura, para que a intensidade da força P, encontrada na parte a, não seja diminuída.

7.151 e 7.152 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a seção transversal onde ocorre a máxima tensão normal; (b) a correspondente tensão normal máxima. (No Prob. 7.151, assumir $h_1 > 2h_0$.)

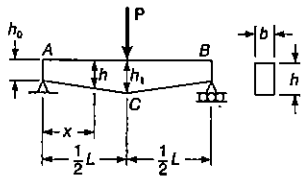


Fig. P7.151 e P7.153

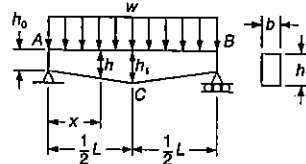


Fig. P7.152 e P7.154

7.153 Para a viga com o carregamento mostrado e usando os dados abaixo, determinar: (a) a seção transversal onde ocorre a máxima tensão normal; (b) a maior força P que pode ser aplicada. Dados: $\sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}$; $L = 1,5 \text{ m}$; $h_0 = 40 \text{ mm}$; $h_1 = 100 \text{ mm}$ e $b = 20 \text{ mm}$.

7.154 Para a viga com o carregamento mostrado e usando os dados abaixo, determinar: (a) a seção transversal onde ocorre a máxima tensão normal; (b) a maior carga distribuída w que pode ser aplicada. Dados: $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$; $L = 1,2 \text{ m}$; $h_0 = 50 \text{ mm}$; $h_1 = 80 \text{ mm}$ e $b = 40 \text{ mm}$.

7.155 A força de 5 kN é vertical, a força Q é horizontal, e ambas as forças atuam em planos perpendiculares ao eixo maciço AD . Sabendo-se que $\tau_{adm} = 45 \text{ MPa}$, determinar o menor diâmetro permissível para o eixo AD .

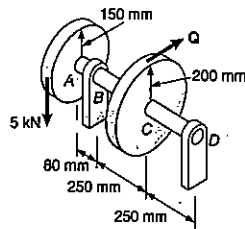


Fig. P7.155

7.156 O sistema eixo-engrenagem mostrado está sujeito a um torque T_A de $340 \text{ N} \cdot \text{m}$, enquanto que a polia D é mantida fixa. Sabendo-se que $\tau_{adm} = 70 \text{ MPa}$, determinar o menor diâmetro permissível para o eixo AB .

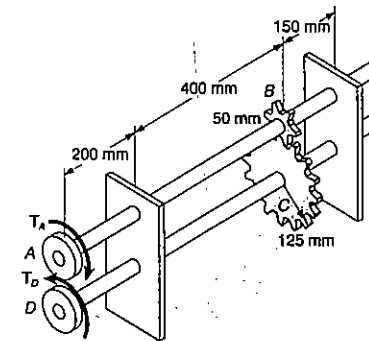


Fig. P7.156

7.157 Para o sistema eixo-engrenagem e carregamento do Prob. 7.156, determinar o menor diâmetro permissível para o eixo maciço CD .

7.158 A força de 4 kN é paralela ao eixo x e a força Q é paralela ao eixo z . Sabendo-se que $\tau_{adm} = 60 \text{ MPa}$, determinar o menor diâmetro permissível para o eixo AD .

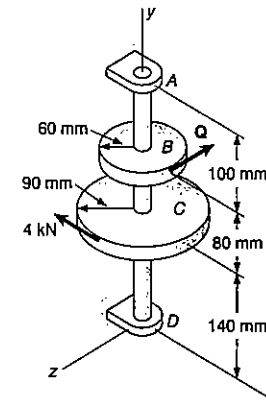


Fig. P7.158

7.159 Assumindo que o eixo do Prob. 7.158 é vazado e que o diâmetro interno é metade do diâmetro externo, determinar o menor diâmetro externo permissível para o eixo.

7.160 O eixo maciço *AB* e as engrenagens mostradas são usadas para transmitir 15 hp, do motor *M*, para uma máquina conectada a um eixo maciço *CDE*. Sabendo-se que o motor gira a 360 rpm e que $\tau_{adm} = 50$ MPa, determinar o menor diâmetro permitido para: (a) o eixo *AB*; (b) o eixo *CDE*.

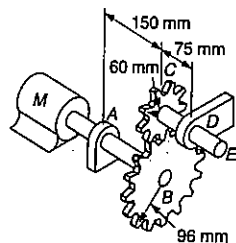


Fig. P7.160

7.161 O eixo maciço *AB* gira a 450 rpm e transmite 25 hp do motor *M* para a máquina-ferramenta conectada pelas engrenagens *F* e *G*. Sabendo-se que $\tau_{adm} = 55$ MPa, e assumindo que 10 hp são absorvidos pela engrenagem *F* e 15 hp pela engrenagem *G*, determinar o menor diâmetro permitido para o eixo *AB*.

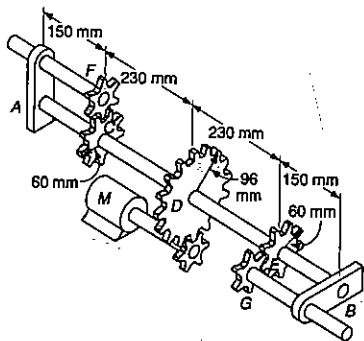


Fig. P7.161

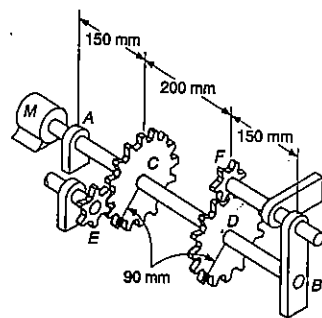


Fig. P7.162

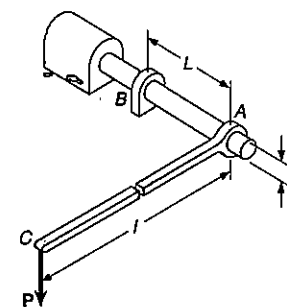


Fig. P7.165, P7.166 e P7.167

7.162 O eixo maciço *AB* gira a 720 rpm e transmite 50 kW do motor *M* para a máquina-ferramenta conectada pelas engrenagens *E* e *F*. Sabendo-se que $\tau_{adm} = 50$ MPa, e assumindo que 20 kW são absorvidos pela engrenagem *E* e 30 kW pela engrenagem *F*, determinar o menor diâmetro permitido para o eixo *AB*.

7.163 Resolver o Prob. 7.162, assumindo que 25 kW é absorvido em cada engrenagem.

7.164 Resolver o Prob. 7.161, assumindo que toda a potência de 25 hp é absorvida pela engrenagem *G*.

7.165 Para o eixo *AB* e a alavanca *AC*, mostrar que o efeito das tensões de cisalhamento, causadas pela carga transversal, devem ser incluídas para que se obtenha o valor exato da máxima tensão de cisalhamento quando

$$\frac{L}{d} < \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{6l}{d}}$$

7.166 Sabendo-se que $\tau_{adm} = 50$ MPa, determinar o menor diâmetro permitido para o eixo maciço *AB*, quando $P = 670$ N, $l = 460$ mm e $L = 75$ mm. Incluir o efeito das tensões de cisalhamento, causadas pela carga transversal.

7.167 Sabendo-se que $\tau_{adm} = 50$ MPa, determinar o menor diâmetro permitido para o eixo maciço *AB*, quando $P = 2$ N, $l = 300$ mm e $L = 75$ mm. Incluir o efeito das tensões de cisalhamento, causadas pela carga transversal.

7.168 Desprezando-se o efeito da concentração de tensões no escalonamento, determinar os menores diâmetros permitidos para as barras maciças *BC* e *CD*. Usar $\tau_{adm} = 60$ MPa.

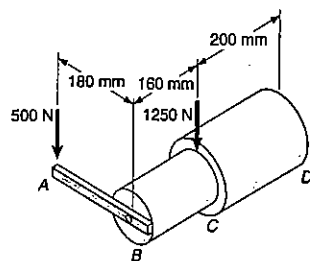


Fig. P7.168 e P7.169

7.169 Sabendo-se que as barras BC e CD têm diâmetros de 24 mm e 36 mm, respectivamente, determinar a máxima tensão de cisalhamento em cada uma barra. Desprezar o efeito da concentração de tensões no escalonamento.

7.170 Sabendo-se que o diâmetro do tronco de cone mostrado é de 38 mm em A e 58 mm em B, determinar a máxima tensão de cisalhamento: (a) em A; (b) em B.

7.171 Usando $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$, dimensionar um tronco de cone para o carregamento mostrado, determinando o diâmetro necessário: (a) em A; (b) em B.

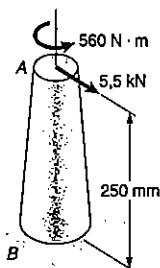


Fig. P7.170 e P7.171

7.172 Usando a notação da Sec. 7.9 e desprezando o efeito das tensões de cisalhamento, causadas por cargas transversais, mostrar que a máxima tensão normal, em um eixo circular, pode ser expresso como segue:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{c}{J} [(M_y^2 + M_z^2)^{1/2} + (M_y^2 + M_z^2 + T^2)^{1/2}]_{m\acute{a}x}$$

7.173 Usando a expressão dada no Prob. 7.172, determinar: (a) a seção transversal do eixo do Prob. Resolvido 7.12, para que a máxima tensão normal ocorra; (b) o valor da $\sigma_{m\acute{a}x}$ sabendo-se que o diâmetro do eixo é 51,7 mm.

7.174 Para as barras e carregamento do Prob. 7.169 e usando a expressão dada no Prob. 7.172, determinar a máxima tensão normal na: (a) barra BC; (b) barra CD.

7.175 Uma barra de 18 mm de diâmetro deve ser encurvada devido às cargas aplicadas, como mostrado. Sabendo-se que $P = 200 \text{ N}$ e $Q = 0$, determinar a máxima tensão de cisalhamento e a máxima tensão normal, na extremidade A. Desprezar o efeito das tensões de cisalhamento, causadas por cargas transversais.

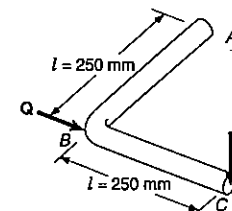


Fig. P7.175

7.176 Resolver o Prob. 7.175, considerando que $P = Q = 200 \text{ N}$.

*7.177 Derivar a Eq. (7.33), a qual define a tensão vertical σ_y , em uma viga retangular de largura unitária e altura 2c, sujeita a uma carga distribuída $w(x)$.

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado para o projeto de vigas e eixos de transmissão. Nós aprendemos a selecionar o material e a dimensionar a seção transversal de uma viga ou eixo, com certo comprimento, de maneira que não falhasse sob um dado carregamento.

Considerações para o projeto de vigas prismáticas

Inicialmente discutimos o critério básico que deve ser satisfeito, no projeto de vigas prismáticas (Sec. 7.2). Por um lado, a máxima tensão normal σ_m na viga, não deve exceder a tensão admissível σ_{adm} do material, e por outro, a máxima tensão de cisalhamento τ_m , também não deve exceder τ_{adm} . Notamos que σ_m é obtida pela substituição de M , da Eq. (4.15), pelo máximo valor do momento fletor na viga, e τ_m pela substituição de V , na Eq. (5.10), pelo máximo valor da força cortante:

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\max} c}{I} \quad \tau_m = \frac{|V|_{\max} Q}{It} \quad (7.1, 7.2)$$

Portanto, a máxima tensão normal ocorre na seção onde $|M|$ é maior, no ponto mais afastado da linha neutra; enquanto que a máxima tensão de cisalhamento ocorre sobre a linha neutra, na seção onde $|V|$ é maior (Figs. 7.1 e 7.2).

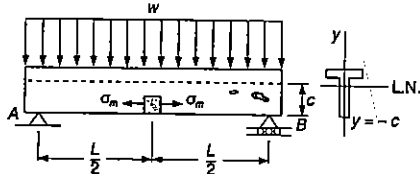


Fig. 7.1

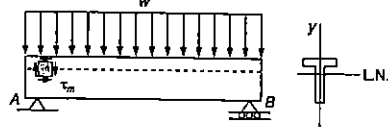


Fig. 7.2

A determinação dos valores absolutos máximos de força cortante e de momento fletor e as seções críticas da viga onde eles ocorrem é enormemente simplificada se desenharmos um *diagrama de força cortante* e um *diagrama de momento fletor*. Estes diagramas representam, respectivamente, a variação da força cortante e do momento fletor ao longo da viga e são obtidos pela determinação dos valores de V e M , em pontos selecionados da viga (Sec. 7.3).

Estes valores são encontrados "cortando-se" a seção no ponto onde se deseja determinar estes esforços e desenhando o diagrama de corpo livre de ambas as porções da viga obtida por este corte. Para evitar qualquer confusão, considera-se o sentido oposto sobre duas porções da viga), nós adotamos a convenção de sinal já anteriormente usada no texto, e é ilustrada na Fig. 7.7a (Exemplo 7.1 e 7.2, Prob. Resolvido 7.1 e 7.2).

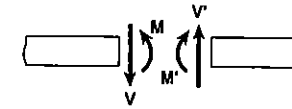


Fig. 7.7a Força cortante e momento fletor positivos.

Relações entre carga, força cortante e momento fletor

A construção dos diagramas de força cortante e de momento fletor é facilitada, se as relações seguintes são levadas em conta (Sec. 7.4). Denotando por w a carga distribuída por unidade de comprimento (assumindo positivo se direcionada para baixo) escrevemos

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (7.3, 7.5)$$

ou, na forma integrada,

$$V_D - V_C = -(\text{área sob a curva de carga, entre } C \text{ e } D) \quad (7.4')$$

$$M_D - M_C = \text{área sob a curva de força cortante, entre } C \text{ e } D \quad (7.6')$$

A Eq. (7.4') faz com que seja possível desenhar a curva do diagrama de força cortante de uma viga, representando a carga distribuída sobre essa viga e o valor de V em uma extremidade da viga. Similarmente, a Eq. (7.6') torna possível desenhar a curva do diagrama de momento fletor através do diagrama de força cortante e do valor de M em uma extremidade da viga. Portanto, cargas concentradas introduzem descontinuidade no diagrama de força cortante e momentos concentrados no diagrama de momento fletor. Nenhum deles é considerado nestas equações (Probs. Resolvidos 7.3 e 7.6). Finalmente, notamos da Eq. (7.5) que os pontos da viga onde o momento fletor é máximo ou mínimo são também os pontos onde a força cortante é nula (Prob. Resolvido 7.4).

Funções singulares

Na Sec. 7.5, discutimos outro método para a determinação dos máximos valores da força cortante e do momento fletor, baseado no uso das *funções singulares* $(x - a)^n$. Por definição, e para $n \geq 0$, nós temos:

$$(x - a)^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \quad (7.10)$$

Observamos que, se a quantidade entre chaves é positiva ou nula, as chaves poderão ser substituídas por parênteses usuais, e se esta quantidade é negativa, a chave se anulará.

Ainda notamos que as funções singulares podem ser integradas e diferenciadas como as ordinárias binomiais. Finalmente, observamos que a função singular correspondente para $n = 0$ é descontínua para $x = a$ (Fig. 7.17a). Esta função é chamada *função degrau*. Nós escrevemos

$$(x - a)^n = \begin{cases} 1 & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \quad (7.11)$$

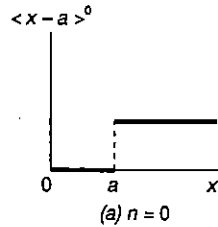


Fig. 7.17a

Usando funções singulares para expressar força cortante e momento flexor

O uso das funções singulares torna possível representar a força cortante e o momento fletor de uma viga por uma única expressão, válida em qualquer ponto da viga. Por exemplo, a contribuição da carga concentrada P aplicada no ponto médio C de uma viga bi-apoiada (Fig. 7.8), para a força cortante, pode ser representada por $-P(x - \frac{1}{2}L)^0$, desde que esta expressão seja igual a zero à esquerda de C , e igual a $-P$, à direita de C . Somando a contribuição da reação $R_A = \frac{1}{2}P$ em A , expressamos a força cortante em qualquer ponto da viga como:

$$V(x) = \frac{1}{2}P - P(x - \frac{1}{2}L)^0$$

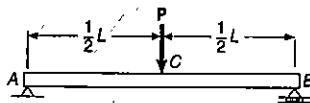


Fig. 7.8

O momento fletor é obtido pela integração dessa expressão:

$$M(x) = \frac{1}{2}Px - P(x - \frac{3}{2}L)^1$$

As funções singulares que representam, respectivamente, a carga, a força cortante e o momento fletor correspondente a vários carregamentos básicos são dados na Fig. 7.18. Notamos que um carregamento distribuído, que não se estende até a extremidade direita da viga, ou que é descontínuo, deverá ser substituído por um carregamento combinado equivalente. Por exemplo, um carregamento uniformemente distribuído, que se estende desde $x = a$ até $x = b$ (Fig. 7.19), deverá ser expresso como

$$w(x) = w_0(x - a)^0 - w_0(x - b)^0$$

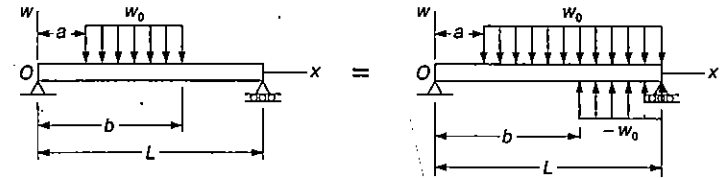


Fig. 7.19

A contribuição desta carga para a força cortante e para o momento fletor pode ser obtida por duas sucessivas integrações. Um cuidado especial deve ser tomado em incluir também na expressão $V(x)$ a contribuição das cargas concentradas e das reações; e em incluir na expressão $M(x)$ a contribuição dos momentos concentrados (Exemplos 7.4 e 7.5, Probs. Resolvidos 7.7 e 7.8). Também observamos que as funções singulares são particularmente bem aceitas para o uso de computadores.

Distribuição das tensões principais na seção da viga

Na Sec. 7.6, analisamos a distribuição de *tensões principais* através da seção de uma viga prismática e questionamos se a tensão normal máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$ em algum ponto da seção pode ser maior que o valor $\sigma_m = Mc/I$, calculado na superfície da viga. Concluimos que no caso de uma viga retangular, e para qualquer condição prática de carregamento, a máxima tensão normal era σ_m . Quando projeta-se uma viga, com perfil laminado I ou de abas largas, sempre devemos calcular a tensão principal $\sigma_{m\acute{a}x}$ na junção da alma com as abas da viga (Fig. 7.5), na seção onde $|M|$ é máximo e compará-lo com σ_m da mesma seção.

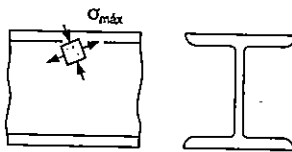


Fig. 7.5

Projeto de vigas prismáticas

Um procedimento proposto para o projeto de uma viga prismática foi descrito na Sec. 7.7 e está resumido abaixo. Este procedimento leva em conta os vários pontos discutidos nas seções precedentes e conduz ao projeto mais econômico, isto é, sob mesmas condições, à seleção da viga com o menor peso por unidade de comprimento, visto que esta viga é mais barata.

Tendo-se determinado σ_{adm} e τ_{adm} para o material usado, e assumindo o projeto da viga como sendo baseado na σ_m na seção onde o momento fletor é máximo, nós calculamos o mínimo valor admissível do módulo resistente à flexão $W = I/c$:

$$W_{min} = \frac{|M|_{max}}{\sigma_{adm}} \quad (7.18)$$

Para o grupo de seções com um módulo resistente $W > W_{min}$, nós selecionamos a seção com o menor peso por unidade de comprimento. Então calculamos τ_m para esta seção e verificamos se este valor não excede τ_{adm} ; se isto ocorre, uma viga mais robusta deve ser selecionada. Finalmente, no caso de vigas de perfil laminado I, ou de abas largas, devemos verificar se a σ_{max} na junção da alma com as abas não excede a σ_{adm} (Exemplo 7.6, Prob. Resolvido 7.9).

Vigas de seção transversal variável e vigas de igual resistência

Até aqui apenas discutimos as vigas prismáticas, isto é, vigas com seção transversal uniforme. Considerando na Sec. 7.8 o projeto de vigas não prismáticas, isto é, vigas com seção transversal variável, nós vimos que, pela seleção da forma e tamanho da seção transversal, de maneira que seu módulo resistente $W = I/c$ varie ao longo da viga da mesma forma, como o momento fletor M , nós somos capazes de projetar vigas para o qual a σ_m em cada seção, seja igual a σ_{adm} . Tais vigas são chamadas *vigas de igual resistência*, que evidentemente fornecem um aproveitamento mais efetivo do material do que as vigas prismáticas. Seus módulos resistentes em qualquer seção ao longo da viga foi definida pela relação

$$W = \frac{M}{\sigma_{adm}} \quad (7.22)$$

Projeto de eixos de transmissão

Na Sec. 7.9, nós consideramos o projeto de eixos de transmissão sujeitos a cargas transversais e torques. Levando em conta as tensões normais, devido ao momento fletor M , e as tensões de cisalhamento, devido ao torque T , encontramos que o mínimo valor admissível da relação J/c para um eixo de seção circular (maciço ou vazado) era

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{max}}{\tau_{adm}} \quad (7.31)$$

Tensões sob cargas aplicadas

Finalmente, na Sec. 7.10, analisamos o estado de tensão na viga em um ponto localizado sob uma carga concentrada ou distribuída. No caso de uma viga retangular sujeita a uma *carga distribuída*, nós notamos a presença de uma tensão normal σ_y , sob as cargas, juntamente com a tensão normal longitudinal σ_x e a tensão de cisalhamento τ_{xy} (Fig. 7.38). A tensão normal σ_y varia de uma forma não-linear desde $-w$, na superfície superior da viga, até zero na superfície mais inferior. Na maioria das aplicações de engenharia, esta tensão é pequena, comparada com a tensão longitudinal σ_x e contribui muito pouco para o valor de σ_{max} em qualquer ponto dado. No caso de uma *carga concentrada*, as fórmulas obtidas no Capítulo 5 para σ_x e τ_{xy} não são válidas, nas vizinhanças do ponto de aplicação da carga, e um elemento do material localizado logo abaixo da carga está sujeito a uma tensão normal muito grande τ_{xy} . Portanto, na prática, uma carga é sempre distribuída numa pequena área, e as concentrações de tensão são grandes próximo à superfície da viga, decrescendo rapidamente, conforme se afasta da superfície da viga.

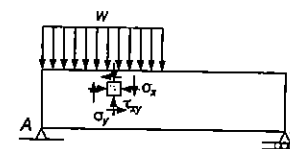


Fig. 7.38

PROBLEMAS DE REVISÃO

7.178 Uma barra maciça de aço tem uma seção transversal trapezoidal e suporta uma carga uniformemente distribuída w como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = +75 \text{ MPa}$ na tração e $\sigma_{adm} = -100 \text{ MPa}$ na compressão, determinar a carga admissível w que pode ser suportada.

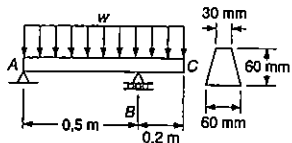


Fig. P7.178

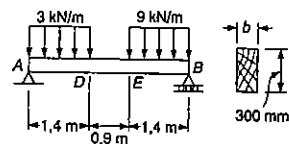


Fig. P7.180

7.179 Resolver o Prob. 7.178, considerando que a barra é invertida.

7.180 Para a viga com o carregamento mostrado, projetar a seção transversal da viga, sabendo-se que a qualidade de madeira usada tem $\sigma = 12,5 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 930 \text{ kPa}$.

7.181 Pede-se: (a) Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a distância a , se o máximo valor absoluto do momento fletor na viga deve ser tão pequeno quanto possível; (b) Desenhar o diagrama de momento fletor correspondente.

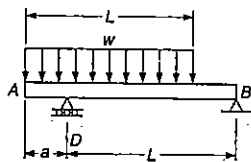


Fig. P7.181

7.182 Duas barras de latão, AB, de 50 mm de diâmetro e BC, de 75 mm de diâmetro, serão soldadas juntas em B, para formar uma barra escalonada de comprimento total 200 mm que irá ser engastada em C. Sabendo-se que a massa específica do latão é de 8740 kg/m^3 , determinar: (a) o comprimento da barra AB para que a tensão normal máxima em ABC seja mínima; (b) o correspondente valor da tensão normal máxima.

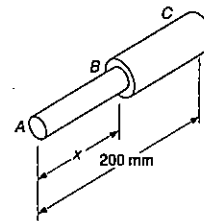


Fig. P7.182

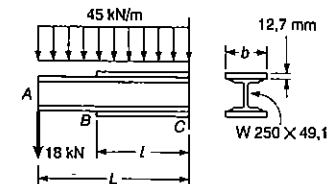


Fig. P7.183

7.183 Duas placas de cobertura de 12,7 mm de espessura são soldadas, como mostrado, ao perfil laminado W250 x 49,1 da viga de comprimento $L = 200 \text{ mm}$. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 80 \text{ MPa}$, determinar: (a) a largura b necessária das placas de cobertura; (b) o menor comprimento l permissível das correspondentes placas.

7.184 A força transversal P é aplicada, como mostrado, na extremidade A de um tronco de cone AB. Denotando por d_0 o diâmetro do tronco em A, mostrar que a máxima tensão normal ocorre no ponto H, que está contido em uma seção transversal de diâmetro $d = \frac{3}{2} d_0$.

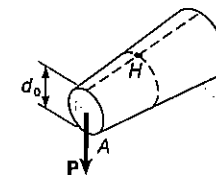


Fig. P7.184

7.185 Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 160 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$, selecionar o perfil de abas largas que poderá ser usado para suportar o carregamento mostrado.

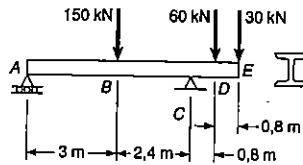


Fig. P7.185

7.186 Duas barras maciças de aço são soldadas juntas para formar o suporte mostrado. Sabendo-se que $\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$, determinar o menor diâmetro permissível para a barra BD.

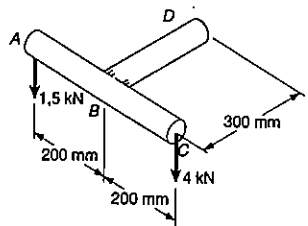


Fig. P7.186

7.187 Para a viga com o carregamento mostrado, desenhar os diagramas de força cortante e de momento fletor, e dimensionar a seção transversal da viga, sabendo-se que $\sigma_{adm} = 8,6 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 0,62 \text{ MPa}$.

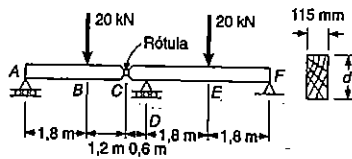


Fig. P7.187

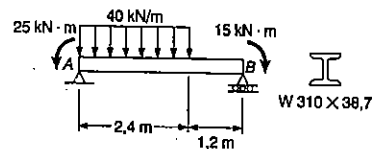


Fig. P7.189

7.188 Resolver o Prob. 7.187, se cada uma das cargas de 20 kN for aplicado separadamente na viga.

7.189 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a maior tensão normal devido a flexão; (b) a maior tensão de cisalhamento sobre uma seção transversal.

Os problemas que se seguem são para serem resolvidos com auxílio de um computador.

7.C1 A viga AB tem 4,6 m de comprimento e seção transversal retangular de 90 mm de largura por 290 mm de altura. Para o carregamento mostrado, escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a força cortante e o momento fletor, desde a extremidade A até a extremidade B, em intervalos de 0,15 m; a máxima tensão normal devido a flexão; a maior tensão de cisalhamento sobre uma seção transversal, e as seções onde cada uma dessas tensões máximas ocorrem, quando: (a) $a_1 = 0,6 \text{ m}$ e $a_2 = 1,2 \text{ m}$; (b) $a_1 = 1,5 \text{ m}$ e $a_2 = 2,7 \text{ m}$.

7.C2 Um carregamento uniformemente distribuído e duas cargas concentradas são aplicadas a viga bi-apoiada, com balanço ADB. Escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a força cortante e o momento fletor desde a extremidade quando: (a) $a = 5 \text{ m}$; (b) $a = 4 \text{ m}$; (c) $a = 3,5 \text{ m}$.

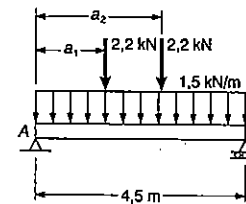


Fig. P7.C1

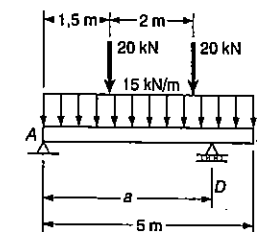


Fig. P7.C2

7.C3 Diversas cargas concentradas podem ser aplicadas à viga simplesmente apoiada AB. Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular a força cortante entre as cargas e o momento fletor em cada uma das cargas. Usar este programa para a viga e carregamento do: (a) Prob. 7.15; (b) Prob. 7.59.

7.C4 Duas cargas de 130 kN são mantidas afastadas a 2,4 m e podem ser movidas lentamente ao longo da viga AB. Escrever um programa de computador e usá-lo para calcular o momento fletor em cada um dos pontos de aplicação das cargas e no ponto médio C, para os valores de x, variando desde 0 até 9,6 m, em intervalos $\Delta x = 0,6 \text{ m}$.

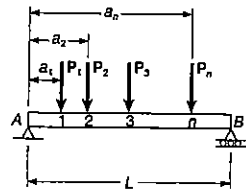


Fig. P7.C3

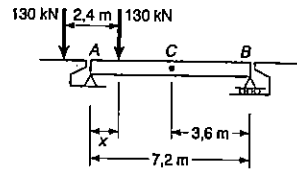


Fig. P7.C4

*7.C5 a 7.C8 Escrever um programa de computador que possa ser usado para plotar os pontos dos diagramas de força cortante e de momento fletor, para a viga com o carregamento indicado. Usando este programa e intervalos de plotação $\Delta L \leq L/100$, plotar os valores dos diagramas de V e de M , para a viga com o carregamento indicado.

*7.C5 A viga e carregamento do: (a) Prob. 7.17; (b) Prob. 7.63.

*7.C6 A viga e carregamento do: (a) Prob. 7.64; (b) Prob. 7.189.

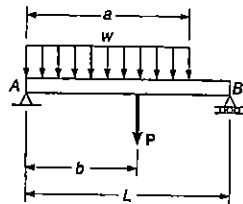


Fig. P7.C5

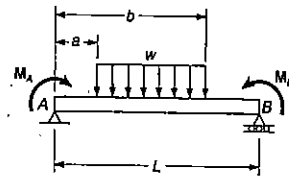


Fig. P7.C6

*7.C7 A viga e carregamento do: (a) Prob. 7.16; (b) Prob. 7.185.

*7.C8 A viga e carregamento do: (a) Prob. 7.66; (b) Prob. 7.180.

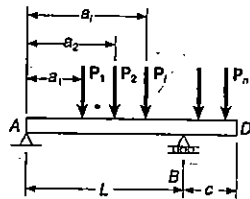


Fig. P7.C7

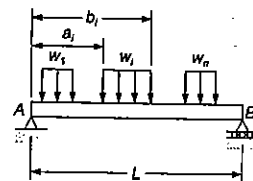


Fig. P7.C8

Capítulo 8

DEFLEXÃO DAS VIGAS POR INTEGRAÇÃO

8.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior aprendemos a projetar vigas, em função da sua resistência. Neste, e no próximo capítulo, nós iremos nos preocupar com um outro aspecto do projeto de vigas, ou seja, com a determinação da *deflexão de vigas prismáticas* submetidas a um dado carregamento. O interesse particular da determinação da *máxima deflexão*, em uma viga sujeita a um determinado carregamento, está no fato de que, geralmente, as especificações do projeto de uma viga incluem um valor máximo admissível para esta deflexão.

Vimos na Sec. 4.5 que uma viga prismática, sujeita à flexão pura, se encurva tomando a forma de um arco de circunferência e que, dentro do regime elástico, a curvatura da superfície neutra pode ser expressa por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.21)$$

onde M é o momento fletor, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da seção transversal, em relação à linha neutra.

Quando uma viga está sujeita a um carregamento transversal, a Eq. (4.21) ainda permanece válida para qualquer seção transversal, dentro das condições de aplicação do princípio de Saint-Venant. No entanto, o momento fletor e a curvatura da superfície neutra variam de seção para seção. Denotando por x a distância da extremidade esquerda da viga, até a seção considerada, escrevemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.1)$$

O conhecimento da curvatura da viga em vários pontos irá nos permitir delinear algumas conclusões gerais, a respeito da deformação da viga submetida a um certo carregamento (Sec. 8.2).

Para determinar a declividade e a deflexão de vigas em um determinado ponto, inicialmente deduzimos a equação diferencial da linha elástica, que se segue, a qual rege a curva ou linha elástica, que caracteriza a forma da viga deformada (Sec. 8.3)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Se o momento fletor pode ser representado, para todos os valores de x , por uma simples função $M(x)$, como nos casos das vigas com os carregamentos mostrados na Fig. 8.1, a declividade $\theta = dy/dx$ e a deflexão y , em qualquer ponto da viga, podem ser obtidos através de duas integrações sucessivas. As duas constantes de integração introduzidas no processo podem ser determinadas pelas condições de contorno indicadas na figura.

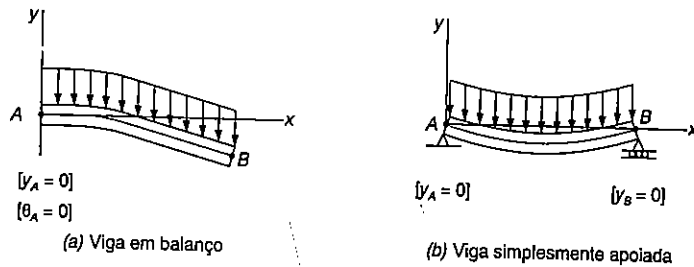


Fig. 8.1

No entanto, se diferentes funções analíticas são necessárias para representar o momento fletor nas várias porções da viga, então diferentes equações diferenciais também serão necessárias, que conduzem a funções distintas, definindo, assim, a linha elástica nas várias porções da viga. No caso da viga e carregamento da Fig. 8.2, por exemplo, duas equações diferenciais são necessárias, uma para a porção AD da viga e outra para a porção DB. A primeira equação produz as funções θ_1 e y_1 , e a segunda as funções θ_2 e y_2 . No total, as quatro constantes de integração devem ser determinadas; duas serão obtidas escrevendo-se que a deflexão é zero em A e B, e as outras duas, expressando que as porções da viga AD e DB têm a mesma declividade e a mesma deflexão em D.

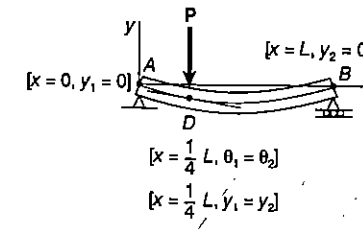


Fig. 8.2

Nós iremos observar na Sec. 8.4 que, no caso de uma viga suportar uma carga distribuída $w(x)$, linha elástica pode ser obtida diretamente de $w(x)$, através de quatro integrações sucessivas. As constantes introduzidas neste processo serão determinadas a partir dos valores de contorno de V, M, θ e y .

Na Sec. 8.5, iremos discutir as vigas estaticamente indeterminadas, isto é, vigas apoiadas de tal maneira que as reações nos apoios irão envolver quatro ou mais incógnitas. Como somente três equações de equilíbrio da estática são disponíveis para determinar estas incógnitas, temos que suplementar as equações de equilíbrio por equações obtidas das condições de contorno, impostas pelos apoios.

O método descrito anteriormente para determinar a linha elástica, quando várias funções são necessárias para representar o momento fletor M , pode ser muito trabalhoso, visto que requer igualar as declividades e as deflexões em todos os pontos de transição. Veremos na Sec. 8.6 que o uso das funções singulares (previamente discutido na Sec. 7.5) simplifica consideravelmente a determinação de θ e y , em qualquer ponto da viga.

Um método alternativo para a determinação de θ e y , baseado em certas propriedades geométricas da linha elástica e envolvendo o cálculo de áreas e momentos das áreas do diagrama de momento fletor, será discutido no Capítulo 9.

A última parte do capítulo (Sec. 8.7 e 8.8) será voltado para o método da superposição, que consiste na determinação separada, e depois adicionada, da declividade e deflexão, devidas a aplicação de várias cargas numa viga. Este procedimento pode ser facilitado com o uso da tabela do Apêndice D, que fornece as declividades e as deflexões nas vigas, para vários tipos de carregamentos e de apoios.

8.2 DEFORMAÇÃO DE UMA VIGA SUJEITA A CARREGAMENTO TRANSVERSAL

No início deste capítulo, vimos que a Eq. (4.21) da Sec. 4.5 fornece a curvatura da superfície neutra e o momento fletor em uma viga sob flexão pura.

Quando uma viga fica submetida ao carregamento transversal, a Eq. 4.21 permanece válida para qualquer seção transversal, dentro das condições de aplicação do princípio de Saint-Venant. No entanto, tanto o momento fletor como a curvatura variam de seção para seção. Se x for a distância da extremidade esquerda da viga até a seção, podemos escrever

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{8.1}$$

Consideremos, por exemplo, uma viga AB em balanço, de vão L , submetida à força P aplicada na sua extremidade livre A (Fig. 8.3a). Temos: $M = -P \cdot x$ e, substituindo em (8.3a):

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{Px}{EI}$$

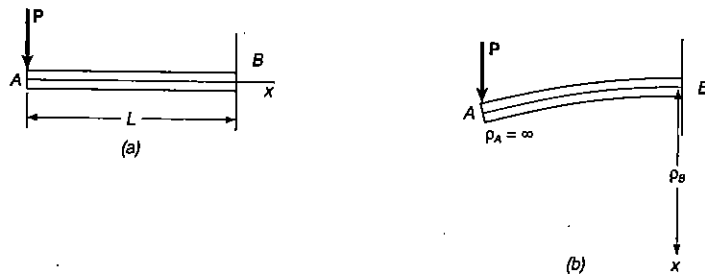


Fig. 8.3

A equação obtida mostra que a curvatura da superfície neutra varia linearmente, de zero no ponto A , onde o próprio ρ_A é infinito, até $-PL/EI$ no ponto B , onde $|\rho_B| = EI/PL$ (Fig. 8.3b).

Consideremos agora a viga biapoiada com balanço AD da Fig. 8.4a, que suporta duas cargas concentradas. Do diagrama de corpo livre da viga (Fig. 8.4b), vemos que as reações dos apoios são $R_A = 1 \text{ kN}$ e $R_C = 5 \text{ kN}$, respectivamente. Dese-

nhamos então o diagrama de momentos fletores da viga (Fig. 8.5a), que mostra que $M = 0$ e, portanto, a curvatura da viga são iguais a zero nas extremidades A e D e no ponto E , situado em $x = 4 \text{ m}$. Entre A e E o momento fletor é positivo e a viga tem concavidade voltada para cima; entre E e D o momento fletor é negativo e a viga tem concavidade voltada para baixo (Fig. 8.5b). Vemos que o maior valor de curvatura (isto é, o menor valor do raio de curvatura) ocorre no ponto C , onde $|M|$ é máximo.

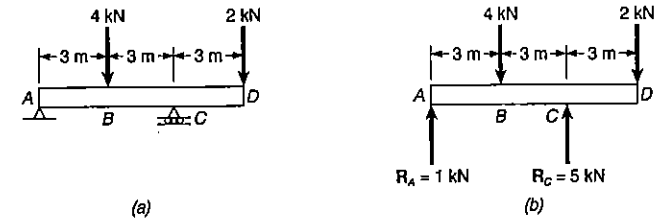


Fig. 8.4

Podemos ter uma idéia bem aproximada da forma da viga deformada, por informações obtidas da sua curvatura. No entanto, o projeto de uma viga usualmente exige informações mais precisas sobre a deformação e a declividade da viga em vários pontos. A deformação transversal da viga em um ponto é chamada de *flecha*. O conhecimento da deformação máxima da viga é de muita importância no dimensionamento. Neste capítulo vamos utilizar a Eq. 8.1 para obtermos uma relação entre a deformação e medida em um certo ponto Q do eixo da viga e a distância x desse ponto a alguma origem prefixada (Fig. 8.6). A relação obtida é a equação da linha elástica, quer dizer, a equação da curva em que se transforma o eixo da viga ao se deformar pela ação do carregamento (Fig. 8.6b).¹

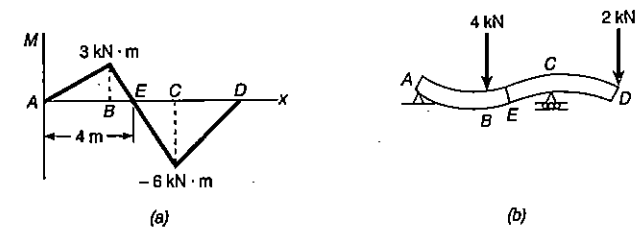


Fig. 8.5

¹ Devemos observar que, neste capítulo e no próximo, y representa um deslocamento vertical, enquanto nos capítulos anteriores e representou a distância de uma certa fibra da seção até a linha neutra.

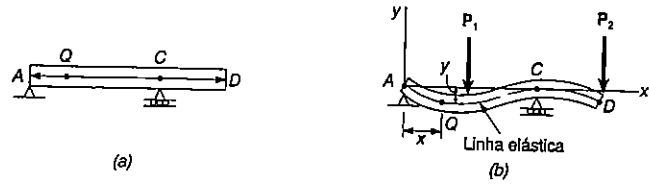


Fig. 8.6

8.3 EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA

Recordemos inicialmente do cálculo elementar a expressão que fornece a curvatura de uma curva plana em um ponto $Q(x, y)$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (8.2)$$

Nessa fórmula, dy/dx e d^2y/dx^2 são a primeira e a segunda derivadas da função $y(x)$ que a curva representa. No entanto, para a linha elástica de uma viga, a declividade dy/dx é muito pequena, de modo que o seu quadrado pode ser desprezado em face da unidade. Podemos escrever, então,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (8.3)$$

Substituindo o valor de $1/\rho$ dado em (8.3) na Eq. 8.1, encontramos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.4)$$

A equação encontrada é uma equação diferencial linear de segunda ordem; é a equação diferencial que rege o comportamento da linha elástica.

O produto $E.I$ é chamado de *rigidez flexional*. Se a rigidez flexional varia ao longo da viga, como é o caso de vigas de seção variável, devemos exprimi-la como uma função de x antes de proceder à integração da Eq. 8.4. No caso de vigas prismáticas, que é o caso considerado aqui, a rigidez flexional é constante. Podemos então multiplicar os dois membros da Eq. 8.4 por $E.I$ e integrar na variável x . Vamos ter

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (8.5)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Vamos chamar de $\theta(x)$ o ângulo, medido em radianos, que a tangente à curva elástica no ponto Q forma com a horizontal (Fig. 8.7). Lembrando que este ângulo nas vigas é muito pequeno, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \theta \approx \theta(x)$$

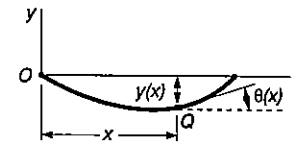


Fig. 8.7

Assim, podemos escrever a Eq. 8.5 na forma

$$EI \theta(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (8.5')$$

Integrando os dois membros da Eq. 8.5, temos

$$EI y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (8.6)$$

onde C_2 é uma segunda constante de integração, e onde o primeiro termo do segundo membro representa a função de x obtida ao se integrar duas vezes a equação $M(x)$ do momento fletor. A menos que as constantes de integração C_1 e C_2 , ainda sejam indeterminadas, a Eq. 8.6 define a flecha da viga em qualquer ponto Q , e as Eqs. 8.5 ou 8.5' definem a declividade da viga em Q .

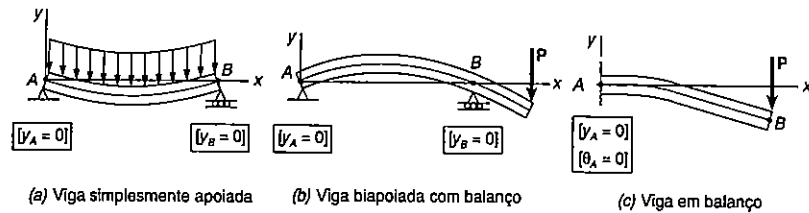


Fig. 8.8 Condições de contorno para vigas estaticamente determinadas.

As constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir de condições de contorno ou, mais precisamente, de condições impostas à viga pelos seus apoios. Se limitarmos nossa análise apenas às vigas estaticamente determinadas (isto é, às vigas apoiadas de tal forma que as reações de apoio possam ser determinadas pelas equações da estática), só serão consideradas, nesta seção, as vigas simplesmente apoiadas, as vigas simplesmente apoiadas com balanços e as vigas em balanço (Fig. 8.8).

Nos dois primeiros casos, os apoios são articulados. Em A, um pino fornece um apoio articulado fixo e em B um rolete fornece um apoio articulado móvel. Nos dois pontos, os apoios impedem o afundamento da viga, e a flecha é nula. Fazendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ e também $x = x_B$, $y = y_B = 0$ na Eq. 8.6, obtemos duas equações que levam aos valores de C_1 e C_2 . No caso da viga em balanço (Fig. 8.8c), vemos que tanto a flecha como a declividade devem ser nulas no ponto A. Fazendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ na Equação 8.6 e $x = x_A$, $\theta = \theta_A = 0$ na Eq. 8.5', vamos obter também duas equações que levam aos valores de C_1 e C_2 .

EXEMPLO 8.1

A viga em balanço AB tem seção transversal uniforme e suporta a força P na sua extremidade livre A (Fig. 8.9). Determinar a equação da linha elástica, a flecha e a declividade no ponto A.

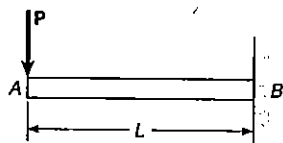


Fig. ex.8.9

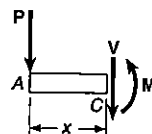


Fig. ex.8.10

Usando o diagrama de corpo livre de porção AC da viga, de comprimento x (Fig. 8.10), encontramos

$$M = -Px \tag{8.7}$$

Substituindo o valor de M na Eq. 8.4 e multiplicando os dois membros da equação pela constante EI, escrevemos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

Integrando, obtemos

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}Px^2 + C_1 \tag{8.8}$$

Observamos então que na extremidade fixa B temos $x = L$ e $\theta = dy/dx = 0$ (Fig. 8.11). Substituindo esses valores na Equação 8.8, calculamos o valor de C_1

$$C_1 = \frac{1}{2}PL^2$$

que, levado novamente à Eq. 8.8, dá

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{2}PL^2 \tag{8.9}$$

Integrando os dois membros da Eq. 8.9, vamos ter

$$EI y = -\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}PL^2x + C_2 \tag{8.10}$$

Mas, em B, temos $x = L$ e $y = 0$. Levando esses valores à Eq. 8.10, encontramos

$$0 = -\frac{1}{6}PL^3 + \frac{1}{2}PL^3 + C_2$$

$$C_2 = -\frac{1}{3}PL^3$$

O valor calculado de C_2 é levado novamente à Eq. 8.10, para completar a equação da linha elástica, que é:

$$EI y = -\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}PL^2x - \frac{1}{3}PL^3$$

$$y = \frac{P}{6EI} (-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \tag{8.11}$$

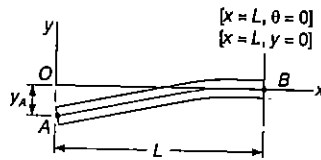


Fig. ex.8.11

A flecha e a declividade no ponto A são obtidas fazendo-se $x = 0$ nas Eqs. 8.11 e 8.9. Temos

$$y_A = -\frac{PL^3}{3EI} \quad \text{e} \quad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

EXEMPLO 8.2

A viga prismática simplesmente apoiada AB suporta uma carga uniformemente distribuída w por unidade de comprimento (Fig. 8.12). Determinar a equação da linha elástica e a flecha máxima da viga.

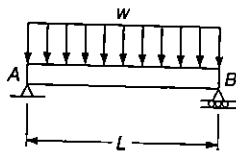


Fig. ex.8.12

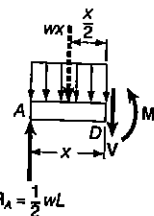


Fig. ex.8.13

Desenhamos o diagrama de corpo livre da parte AD da viga (Fig. 8.13) e calculamos os momentos das forças em relação ao ponto D, encontrando

$$M = \frac{1}{2} wLx - \frac{1}{2} wx^2 \tag{8.12}$$

Substituindo M na Eq. 8.4 e multiplicando os dois membros da equação pela constante EI , escrevemos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} wx^2 + \frac{1}{2} wLx \tag{8.13}$$

Integrando duas vezes a expressão, encontramos

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} wx^3 + \frac{1}{4} wLx^2 + C_1 \tag{8.14}$$

$$EI y = -\frac{1}{24} wx^4 + \frac{1}{12} wLx^3 + C_1x + C_2 \tag{8.15}$$

Como $y = 0$ nos dois apoios da viga (Fig. 8.14), fazemos $x = 0$ e $y = 0$ na Eq. 8.15, encontrando $C_2 = 0$. Fazendo então $x = L$ e $y = 0$ na mesma equação, vamos ter

$$0 = -\frac{1}{24} wL^4 + \frac{1}{12} wL^4 + C_1L$$

$$C_1 = -\frac{1}{24} wL^3$$

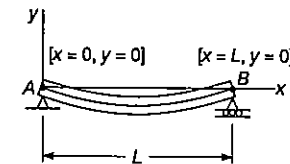


Fig. ex.8.14

Levamos os valores de C_1 e C_2 novamente à Eq. 8.15, obtendo a equação da linha elástica

$$EI y = -\frac{1}{24} wx^4 + \frac{1}{12} wLx^3 - \frac{1}{24} wL^3x$$

$$y = \frac{w}{24EI} (-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \tag{8.16}$$

Substituindo o valor obtido para C_1 na Eq. 8.14, verificamos que a declividade da viga é igual à zero para $x = L/2$ e que a linha elástica tem um ponto de mínimo no ponto médio C da viga (Fig. 8.15). Fazendo $x = L/2$ na Eq. 8.16, temos

$$y_C = \frac{w}{24EI} \left(-\frac{L^4}{16} + 2L \frac{L^3}{8} - L^3 \frac{L}{2} \right) = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

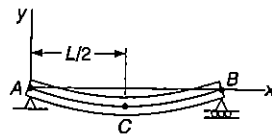


Fig. ex.8.15

A flecha máxima ou, mais precisamente, o máximo valor absoluto da deformação é, desse modo:

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5\omega L^4}{384EI}$$

Em cada um dos exemplos vistos até agora, foi necessário apenas um diagrama de corpo livre para determinarmos a expressão do momento fletor da viga. Conseqüentemente, o momento fletor M , ao longo de toda a viga, foi representado por uma única função de x . Este não é, contudo, o caso comum. A ocorrência de cargas concentradas, cargas distribuídas descontínuas e reações de apoios exigem que a viga seja dividida em várias partes para que se represente o momento fletor como uma função $M(x)$ diferente para cada parte da viga. Cada uma das funções $M(x)$ vai levar a expressões diferentes para a declividade $\theta(x)$ e para a flecha $y(x)$. Cada expressão obtida para o cálculo da deformação vai ter duas constantes de modo que um grande número de constantes de integração terá de ser determinado. Como veremos no próximo exemplo, podemos obter as condições de contorno necessárias à determinação das várias constantes lembrando que, mesmo em pontos onde o momento fletor e a força cortante seriam descontínuos, a flecha e a declividade da viga permanecem contínuas.

EXEMPLO 8.3

Determinar, para a viga prismática com o carregamento (Fig. 8.16), a flecha e a declividade no ponto D .

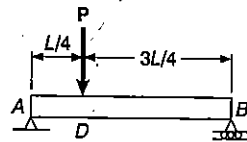


Fig. ex.8.16

Devemos dividir a viga em duas partes, AD e DB , e determinar as funções $y(x)$ que definem a linha elástica em cada uma dessas partes.

1. Trecho de A a D ($x < L/4$)

Desenhamos o diagrama de corpo livre da porção AE , de comprimento x (Fig. 8.17). Calculando momentos das forças em relação ao ponto E , vamos obter

$$M_1 = \frac{3P}{4}x \tag{8.17}$$

ou, pela Equação 8.4,

$$EI \frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{3}{4}Px \tag{8.18}$$

onde $y_1(x)$ é a função que descreve a linha elástica da parte AD da viga. Integrando, encontramos

$$EI \theta_1 = EI \frac{dy_1}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 + C_1 \tag{8.19}$$

$$EI y_1 = \frac{1}{8}Px^3 + C_1x + C_2 \tag{8.20}$$

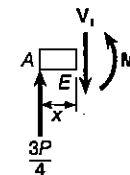


Fig. ex.8.17

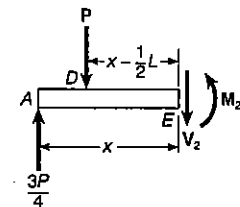


Fig. ex.8.18

2. Trecho de D e B ($x > L/4$)

Desenhamos agora o diagrama de corpo livre da parte AE da viga, de comprimento ($x > L/4$) (Fig. 8.18), calculando

$$M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) \tag{8.21}$$

ou, pela Eq. (8.4), reagrupando os termos,

$$EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{1}{4} Px + \frac{1}{4} PL \quad (8.22)$$

onde $y_2(x)$ é a função que descreve a curva elástica da parte DB da viga. Integrando, encontramos

$$EI \theta_2 = EI \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{8} Px^2 + \frac{1}{4} PLx + C_3 \quad (8.23)$$

$$EI y_2 = -\frac{1}{24} Px^3 + \frac{1}{8} PLx^2 + C_3 x + C_4 \quad (8.24)$$

Determinação das constantes de integração. As condições que devem ser satisfeitas pelas constantes de integração estão resumidas na Fig. 8.19. No apoio A , onde a flecha é definida pela Eq. 8.20, devemos ter $x = 0$ e $y_1 = 0$.

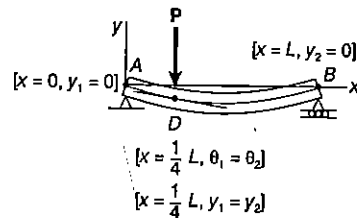


Fig. ex.8.19

No apoio B , onde a flecha é definida pela Eq. 8.24, devemos ter $x=L$ e $y_2=0$. Além disso, pelo fato de não poder ocorrer nenhuma mudança brusca na flecha e na declividade, no ponto D teremos $\theta_1 = \theta_2$ e $y_1 = y_2$ para $x=L/4$. Encontramos então

$$[x = 0, y_1 = 0], \quad \text{Eq. (8.20):} \quad 0 = C_2 \quad (8.25)$$

$$[x = L, y_2 = 0], \quad \text{Eq. (8.24):} \quad 0 = \frac{1}{12} PL^3 + C_3 L + C_4 \quad (8.26)$$

$$[x = L/4, \theta_1 = \theta_2], \quad \text{Eqs. (8.19) e (8.23):} \quad \frac{3}{128} PL^2 + C_1 = \frac{7}{128} PL^2 + C_3 \quad (8.27)$$

$$[x = L/4, y_1 = y_2], \quad \text{Eqs. (8.20) e (8.24):} \quad \frac{PL^3}{512} + C_1 \frac{L}{4} = \frac{11PL^3}{1536} + C_3 \frac{L}{4} + C_4 \quad (8.28)$$

Resolvendo essas equações simultaneamente obtemos

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{11PL^2}{128}, \quad C_4 = \frac{PL^3}{384}$$

Levando os valores de C_1 e C_2 nas Eqs. 8.19 e 8.20, escrevemos que, para $x < L/4$,

$$EI \theta_1 = \frac{3}{8} Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \quad (8.29)$$

$$EI y_1 = \frac{1}{8} Px^3 - \frac{7PL^2}{128} x \quad (8.30)$$

Fazendo $x = L/4$ em cada uma dessas equações, encontramos para a flecha e a declividade da viga em D as expressões:

$$\theta_D = -\frac{PL^2}{32EI} \quad \text{e} \quad y_D = -\frac{3PL^3}{256EI}$$

Uma vez que $\theta_D \neq 0$, a flecha no ponto D não é a máxima deformação da viga.

*8.4 DETERMINAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA DIRETAMENTE A PARTIR DO CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO

A Sec. 8.2 mostrou que a equação da linha elástica é obtida resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.4)$$

onde $M(x)$ é o momento fletor na viga. Lembramos da Sec. 7.4 que quando uma viga está submetida a carregamento distribuído $w(x)$, temos $dM/dx = V$ e $dV/dx = -w$ em qualquer ponto da viga. Se derivarmos os dois membros da Eq. 8.4 em relação a x e adotarmos EI constante, vamos ter

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \tag{8.31}$$

e, derivando novamente,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI} \frac{dV}{dx} = -\frac{w(x)}{EI}$$

Concluimos então que a linha elástica de uma viga prismática com carga distribuída $W(x)$ é descrita pela equação diferencial de 4ª ordem

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \tag{8.32}$$

Multiplicando os dois membros da Eq. 8.32 pela constante EI e integrando quatro vezes seguidas, escrevemos

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -\int w(x) dx + C_1$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\int dx \int w(x) dx + C_1x + C_2 \tag{8.33}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta(x) = -\int dx \int dx \int w(x) dx + \frac{1}{2} C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EI y(x) = -\int dx \int dx \int dx \int w(x) dx + \frac{1}{6} C_1x^3 + \frac{1}{2} C_2x^2 + C_3x + C_4$$

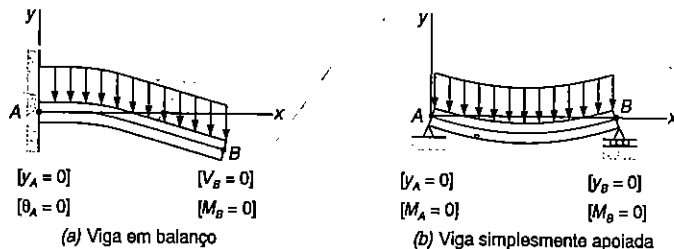


Fig. 8.20 Condições de contorno para vigas com carregamento distribuído.

As condições de contorno permitem calcular as quatro constantes de integração. Essas condições incluem: (a) as restrições impostas às deformações da viga pelos apoios (cf. Sec. 8.3) e (b) a condição de que V e M devem ser nulos na extremidade livre de uma viga em balanço, ou de que M deve ser nulo nos dois apoios de uma viga simplesmente apoiada (cf. Sec. 7.4). Essas condições estão ilustradas na Fig. 8.20.

O método apresentado aqui se aplica diretamente a uma viga em balanço ou a uma viga simplesmente apoiada. Já para o caso de vigas apoiadas com balanço, as reações dos apoios provocam descontinuidades na força cortante, quer dizer, na terceira derivada de y , o que pode ser levado em conta através do uso de funções singulares.

O método se estende ainda às vigas que apresentam carregamento distribuído descontínuo, se expressarmos a carga $w(x)$ em termos de funções singulares (ver Prob. Resolvido 8.7).

EXEMPLO 8.4

A viga prismática AB , simplesmente apoiada, está submetida a uma carga uniformemente distribuída w por unidade de comprimento (Fig. 8.21). Determinar a equação da linha elástica e a flecha máxima da viga. (Esta é a mesma viga do Ex. 8.2.)

Como w é constante, as três primeiras das Eqs. 8.33 levam a

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4y}{dx^4} &= -w \\ EI \frac{d^3y}{dx^3} &= V(x) = -wx + C_1 \\ EI \frac{d^2y}{dx^2} &= M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \end{aligned} \tag{8.34}$$

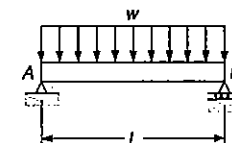


Fig. ex.8.21

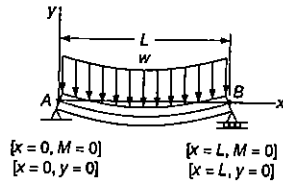


Fig. ex.8.22

As condições de contorno requerem que o momento fletor seja nulo nas duas extremidades da viga (Fig. 8.22). Fazendo $x = 0$ e $M = 0$ na Eq. 8.34, encontramos $C_2 = 0$. Fazendo $x = L$ e $M = 0$ nessa mesma equação, obtemos $C_1 = \frac{1}{2} wL$.

Levando os valores de C_1 e C_2 novamente à Eq. 8.34 e integrando duas vezes, escrevemos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} wx^2 + \frac{1}{2} wLx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} wx^3 + \frac{1}{4} wLx^2 + C_3$$

$$EI y = -\frac{1}{24} wx^4 + \frac{1}{12} wLx^3 + C_3x + C_4 \quad (8.35)$$

As condições de contorno exigem ainda que $y = 0$ nos dois apoios da viga. Fazendo então $x = 0$ e $y = 0$ na Eq. 8.35, obtendo $C_4 = 0$. Fazemos também $x = L$ e $y = 0$ nessa equação, obtendo

$$0 = \frac{1}{24} wL^4 + \frac{1}{12} wL^4 + C_3L$$

$$C_3 = -\frac{1}{24} wL^3$$

Levando os valores obtidos para C_3 e C_4 novamente a Eq. 8.35 e dividindo os dois membros da equação por EI , obtemos a equação da linha elástica:

$$y = \frac{-w}{24EI} (-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad (8.36)$$

O valor da flecha máxima se encontra fazendo-se $x = L/2$ na Eq. 8.36. Encontramos

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

8.5 VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Na seção anterior, nossa análise se limitou às vigas estaticamente determinadas. Consideremos agora a viga prismática AB (Fig. 8.23a) que tem uma extremidade engastada em A e é apoiada em um rolete no ponto B (apoio articulado móvel). Desenhando o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 8.23b), vemos que as reações dos apoios envolvem quatro incógnitas, enquanto são disponíveis apenas três equações de equilíbrio, que são

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (8.37)$$



Fig. 8.23

Dessas equações, somente o valor A_x pode ser determinado, e concluímos dessa forma que a viga é *estaticamente indeterminada*.

Lembramos, no entanto, dos Capítulos 2 e 3, que as reações em um problema estaticamente indeterminado podem ser obtidas, se considerarmos as *deformações* da estrutura. Devemos então proceder à determinação das flechas e declividades ao longo da viga. Com o procedimento usado na Sec. 8.3, exprimimos o momento fletor $M(x)$ em qualquer ponto AB em função da distância x até o ponto A , do carregamento da viga e das reações desconhecidas. Integrando em x , obtemos expressões para θ e y que contêm duas incógnitas adicionais, C_1 e C_2 . Devemos usar seis equações para a determinação das reações e das constantes C_1 e C_2 . Dispomos dessas seis equações, que são as três equações de equilíbrio (8.37) e as três equações que descrevem as condições de contorno, isto é, que satisfazem às condições de que a declividade e a flecha são nulas em A , e que a flecha é nula em B (Fig. 8.24). Assim, as reações dos apoios podem ser determinadas, ao mesmo tempo que se obtém a equação da linha elástica.

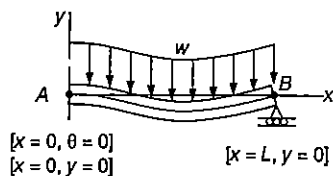


Fig. ex.8.24

EXEMPLO 8.5

Determinar as reações de apoio da viga prismática da Fig. 8.23a.

Equações de equilíbrio. Do diagrama de corpo livre da Fig. 8.23b, temos

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad A_x = 0 \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad A_y + B - wL = 0 \\
 + \curvearrowright \Sigma M_A = 0: & \quad M_A + BL - \frac{1}{2}wL^2 = 0
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

Equação da linha elástica. Desenhando o diagrama de corpo livre da porção AC da viga (Fig. 8.20), podemos escrever

$$+ \curvearrowright \Sigma M_C = 0: \quad M + \frac{1}{2}wx^2 + M_A - A_yx = 0 \tag{8.39}$$

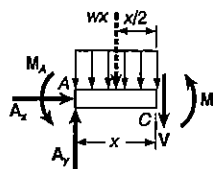


Fig. ex.8.25

Determinando o valor de M na Eq. 8.39 e levando esse valor à Eq. 8.4, escrevemos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + A_yx - M_A$$

Integrando, temos

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}A_yx^2 - M_Ax + C_1 \tag{8.40}$$

$$EI y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}A_yx^3 - \frac{1}{2}M_Ax^2 + C_1x + C_2 \tag{8.41}$$

Recorrendo às condições de contorno indicadas na Fig. 8.24, fazemos $x = 0, \theta = 0$ na Eq. 8.40 e $x = 0, y = 0$ na Eq. 8.41, concluindo que $C_1 = C_2 = 0$. Podemos então escrever a Eq. 8.41 da seguinte maneira:

$$EI y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}A_yx^3 - \frac{1}{2}M_Ax^2 \tag{8.42}$$

A terceira condição de contorno requer que $y = 0$ para $x = L$. Levando esses valores à Eq. 8.42, temos

$$0 = -\frac{1}{24}wL^4 + \frac{1}{6}A_yL^3 - \frac{1}{2}M_AL^2$$

ou

$$3M_A - A_yL + \frac{1}{4}wL^2 = 0 \tag{8.43}$$

Obtemos os valores das reações nos apoios resolvendo simultaneamente a Eq. 8.38 e as três equações de equilíbrio:

$$A_x = 0 \quad A_y = \frac{5}{8}wL \quad M_A = \frac{1}{8}wL^2 \quad B = \frac{3}{8}wL$$

No exemplo acima, havia uma reação redundante, quer dizer, havia uma reação a mais além do número de reações que poderiam ser determinados pelas equações de equilíbrio. A viga então é chamada de *estaticamente indeterminada com um grau de indeterminação* ou *um grau de hiperestaticidade*. O Probl. Resolvido 8.3 fornece outro exemplo de viga com um grau de indeterminação. Se os apoios são de tal forma que apareçam duas reações redundantes (Fig. 8.26a), a viga é *estaticamente indeterminada com dois graus de indeterminação*. Nesse caso existem *cinco reações desconhecidas* (Fig. 8.26b), mas encontramos quatro equações provenientes das condições de contorno (Fig. 8.26c). Assim, temos ao todo sete equações para a determinação das cinco reações e das duas constantes de integração.

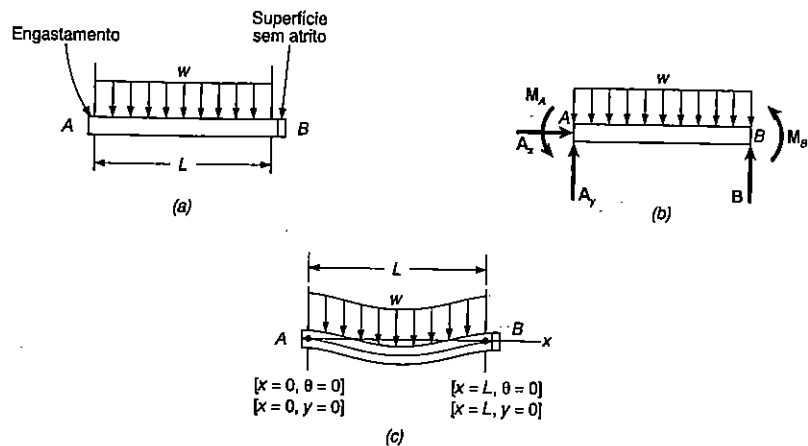
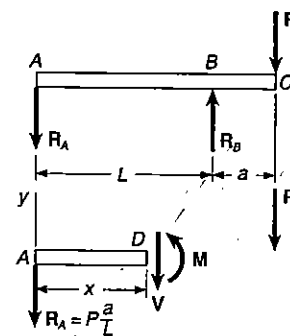
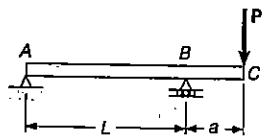


Fig. ex.8.26

PROBLEMA RESOLVIDO 8.1

A viga ABC suporta uma carga concentrada P na extremidade do balanço, ponto C. Para a parte AB da viga, pede-se: (a) deduzir a equação da linha elástica; (b) determinar a flexão máxima; (c) calcular $y_{m\acute{a}x}$ para os seguintes dados:

- | | |
|-----------------------|------------------------------------|
| $W = 360 \times 101$ | $I = 301 \times 10^6 \text{ mm}^4$ |
| $E = 200 \text{ GPa}$ | $P = 220 \text{ kN}$ |
| $L = 4,5 \text{ m}$ | $a = 1,2 \text{ m}$ |



Diagramas de corpo livre. Reações: $R_A = Pa/L$, $R_B = P(1 + a/L)$. Usando o diagrama de corpo livre da parte AD da viga, de comprimento x, temos

$$M = -P \frac{a}{L} x \quad (0 < x < L)$$

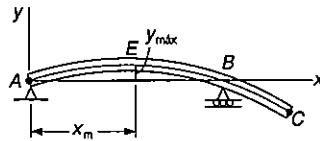
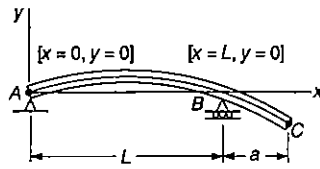
Equação diferencial da linha elástica. Usando a Eq. 8.4, escrevemos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P \frac{a}{L} x$$

Com a rigidez flexional, integramos duas vezes, encontrando

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} P \frac{a}{L} x^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EI y = -\frac{1}{6} P \frac{a}{L} x^3 + C_1 x + C_2 \quad (2)$$



Determinação das constantes. Das condições de contorno indicadas, temos

$[x = 0, y = 0]:$ Da Eq. 2 obtemos $C_2 = 0$

$[x = L, y = 0]:$ Da Eq. 2 obtemos

$$EI(0) = -\frac{1}{6} P \frac{a}{L} L^3 + C_1 L \quad C_1 = +\frac{1}{6} PaL$$

(a) **Equação da linha elástica.** Substituindo os valores obtidos para C_1 e C_2 nas Eqs. 1 e 2, temos

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} P \frac{a}{L} x^2 + \frac{1}{6} PaL \quad \frac{dy}{dx} = \frac{PaL}{6EI} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (3)$$

$$EI y = -\frac{1}{6} P \frac{a}{L} x^3 + \frac{1}{6} PaLx \quad y = \frac{PaL^2}{6EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad (4) \blacktriangleleft$$

(b) **Flecha máxima no trecho AB.** A deformação $y_{m\acute{a}x}$ ocorre no ponto E onde a declividade da curva é nula. Fazendo $dy/dx = 0$ na Eq. 3, encontramos

$$0 = \frac{PaL}{6EI} \left[1 - 3 \left(\frac{x_m}{L} \right)^2 \right] \quad x_m = L/\sqrt{3} = 0,577L$$

Substituindo $x_m/L = 0,577$ na Eq. 4, determinamos

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{PaL^2}{6EI} [(0,577) - (0,577)^3] \quad y_{m\acute{a}x} = 0,0642 \frac{PaL^2}{EI} \blacktriangleleft$$

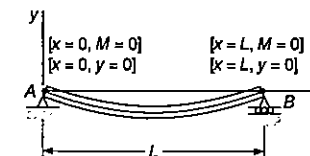
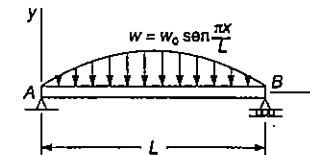
c) **Cálculo de $y_{m\acute{a}x}$** Dos dados do problema, $y_{m\acute{a}x}$ é

$$y_{m\acute{a}x} = 0,0642 \frac{(220 \times 10^3 \text{ N}) (1,2 \text{ m}) (4,5)^2}{(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(301 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}$$

$$y_{m\acute{a}x} = 5,7 \times 10^{-3} \text{ m} \quad y_{m\acute{a}x} = 5,7 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.2

Determinar, para a viga e o carregamento indicado: (a) a equação da linha elástica; (b) a declividade de viga no apoio A; (c) a flecha máxima.



Equação diferencial da linha elástica. Da Eq. 8.32,

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (1)$$

Integrando (1) duas vezes:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V = +w_0 \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1 \quad (2)$$

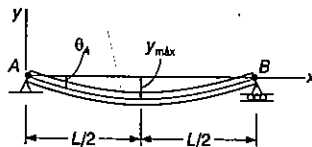
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = +w_0 \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

Condições de Contorno

$|x = 0, M = 0|$: Da Eq. 3, determinamos $C_2 = 0$

$|x = L, M = 0|$: Novamente da Eq. 3, temos

$$0 = w_0 \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \pi + C_1 L \quad C_1 = 0$$



Desse modo:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = +w_0 \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Integrando a Eq. 4 duas vezes:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = -w_0 \frac{L^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{L} + C_3 \quad (5)$$

$$EI y = -w_0 \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + C_3 x + C_4 \quad (6)$$

Condições de Contorno

$|x = 0, y = 0|$: Da Equação 6, determinamos $C_4 = 0$

$|x = L, y = 0|$: Novamente da Equação 6, temos $C_3 = 0$

(a) **Equação da linha elástica.**

$$EI y = -w_0 \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

(b) **Declividade da linha elástica no apoio A.** Para $x = 0$, temos

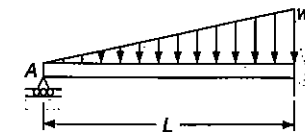
$$EI \theta_A = -w_0 \frac{L^3}{\pi^3} \cos(0) \quad \theta_A = \frac{w_0 L^3}{\pi^3 EI}$$

(c) **Flecha máxima.** Para $x = \frac{1}{2} L$

$$EI y_{\text{máx}} = -w_0 \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \quad y_{\text{máx}} = \frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI} \downarrow$$

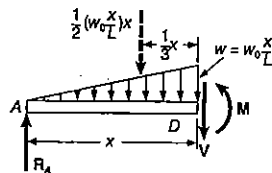
PROBLEMA RESOLVIDO 8.3

Para viga AB de seção uniforme: (a) determinar a reação A; (b) deduzir a equação da linha elástica; (c) determinar a rotação do eixo no apoio A. (Notar que a viga tem um grau de indeterminação.)



Momento fletor. Usando o diagrama de corpo livre da figura, escrevemos

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0: \quad R_A x - \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 x^2}{L} \right) \frac{x}{3} - M = 0 \quad M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$



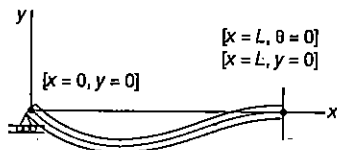
Equação diferencial da linha elástica. Usando a Eq. 8.4, escrevemos

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

Integrando duas vezes, com a rigidez flexional EI constante, encontramos

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \quad (1)$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \quad (2)$$



Condições de contorno. As três condições de contorno a serem satisfeitas são indicadas no desenho. Temos

$$[x = 0, y = 0]: \quad C_2 = 0 \quad (3)$$

$$[x = L, \theta = 0]: \quad \frac{1}{2} R_A L^2 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \quad (4)$$

$$[x = L, y = 0]: \quad \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0 \quad (5)$$

(a) **Reação em A.** Multiplicamos a Eq. 4 por L e subtraímos a Eq. 5, membro a membro. Sendo $C_2 = 0$, vamos ter

$$\frac{1}{3} R_A L^3 - \frac{1}{30} w_0 L^4 = 0 \quad R_A = \frac{1}{10} w_0 L \uparrow$$

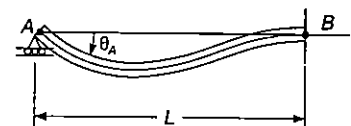
Podemos notar que a reação independe de E e I . Substituindo $R_A = \frac{1}{10} w_0 L$ na Eq. 4, obtemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} w_0 L \right) L^2 - \frac{1}{24} w_0 L^3 + C_1 = 0 \quad C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3$$

(b) **Equação da linha elástica.** Substituindo na Eq. 2 os valores de R_A , C_1 e C_2 , obtemos:

$$EI y = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} w_0 L \right) x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120} w_0 L^3 \right) \cdot x$$

$$y = \frac{w_0}{120EIL} (-x^5 + 2L^2 x^3 - L^4 x)$$



(c) **Rotação em A.** Derivando a equação anterior em relação a x , escrevemos

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EIL} (-5x^4 + 6L^2 x^2 - L^4)$$

Fazendo $x = 0$, temos

$$\theta_A = -\frac{w_0 L^3}{120EI} \quad \theta_A = \frac{w_0 L^3}{120EI}$$

PROBLEMAS

Nos problemas que se seguem, assumir que a rigidez flexional EI em cada viga, é constante.

8.1 a 8.6 Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da curva elástica para a viga AB ; (b) a deflexão da extremidade livre; (c) a declividade da extremidade livre.

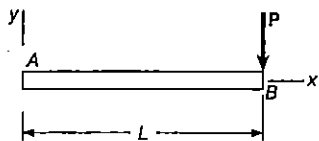


Fig. P8.1

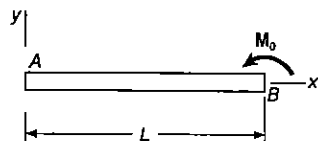


Fig. P8.2

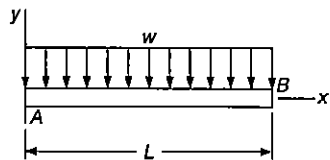


Fig. P8.3

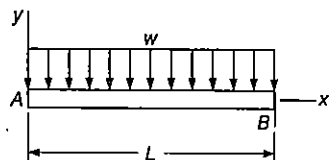


Fig. P8.4

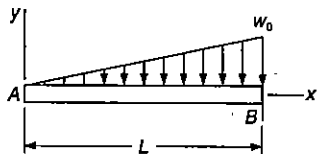


Fig. P8.5

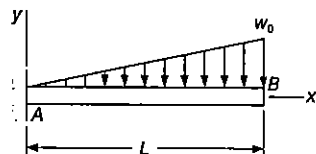


Fig. P8.6

8.7 Resolver as partes b e c do Probl. 8.5, considerando que a viga AB é um perfil laminado de aço $W310 \times 52$ e que $w_0 = 40 \text{ kN/m}$, $L = 3,65 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$.

8.8 Resolver as partes b e c do Probl. 8.4, considerando que a viga AB é um perfil laminado $W150 \times 24$ e que $w = 8760 \text{ N/m}$, $L = 1,8 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$.

8.9 e 8.10 A viga simplesmente apoiada AB é carregada com uma carga distribuída que varia linearmente como mostrado. Determinar: (a) equação da linha elástica; (b) a deflexão no ponto médio do vão; (c) a declividade na extremidade A ; (d) resolver as partes b e c, assumindo que a viga AB é um perfil laminado de aço $W360 \times 79$ e que $w_0 = 75 \text{ kN/m}$, $L = 5 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$.

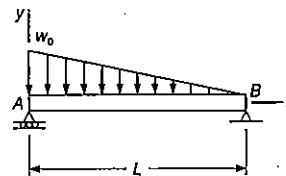


Fig. P8.9

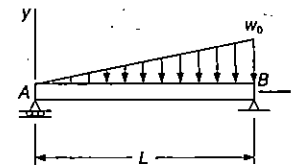


Fig. P8.10

8.11 a 8.14 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a declividade em A ; (c) a declividade em B .

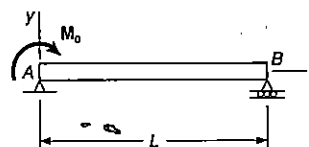


Fig. P8.11

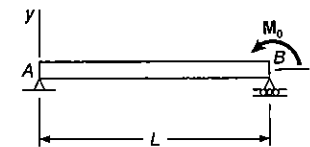


Fig. P8.12

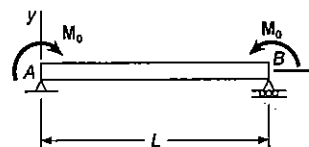


Fig. P8.13

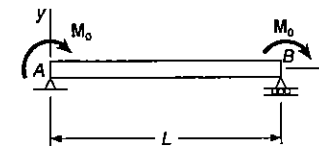


Fig. P8.14

8.15 e 8.16 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica para a porção AB da viga; (b) a declividade em A ; (c) a declividade em B .

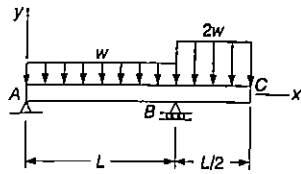


Fig. P8.15

8.17 e 8.18 Para a viga em balanço como o carregamento indicado, determinar: (a) a equação da linha elástica para a porção AB da viga; (b) a declividade em A; (c) a declividade em B.

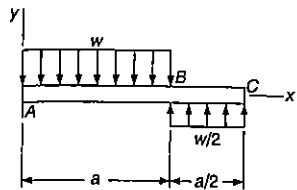


Fig. P8.17

8.19 Sabendo-se que a viga AB é um perfil laminado de aço W150 x 13,5 e que $P = 33,5 \text{ kN}$, $L = 1,5 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade em A; (b) a deflexão em C.

8.20 Sabendo-se que a viga AB é um perfil laminado de aço W130 x 23,8 e que $P = 50 \text{ kN}$, $L = 1,25 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade em A; (b) a deflexão em C.

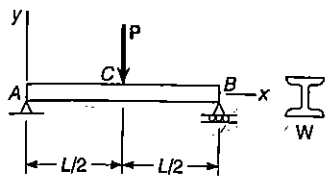


Fig. P8.19 e P8.20

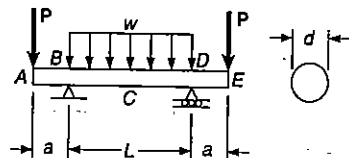


Fig. P8.21 e P8.22

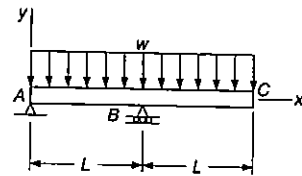


Fig. P8.16

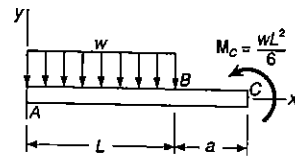


Fig. P8.18

8.21 A viga AE suporta uma carga distribuída $w = 4 \text{ kN/m}$ e duas cargas concentradas, cada uma com intensidade $P = 250 \text{ N}$. Sabendo-se que a viga é feita de uma barra de alumínio de diâmetro $d = 36 \text{ mm}$ e que $L = 800 \text{ mm}$, $a = 250 \text{ mm}$ e $E = 72 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade em B; (b) a deflexão no centro C da viga.

8.22 A viga AE suporta uma carga distribuída $w = 4,4 \text{ kN/m}$ e duas cargas concentradas, cada uma com intensidade $P = 670 \text{ N}$. Sabendo-se que a viga é feita de uma barra de alumínio de diâmetro $d = 19 \text{ mm}$ e que $L = 510 \text{ mm}$, $a = 150 \text{ mm}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade em B; (b) a deflexão no centro C da viga.

8.23 Sabendo-se que a viga AE é um perfil laminado de aço S310 x 47,3 e que $w = 50 \text{ kN/m}$, e $a = 1,5 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade em B; (b) a deflexão no centro C da viga.

8.24 Sabendo-se que a viga AE é um perfil laminado de aço S380 x 64 e que $P = 66,7 \text{ kN}$, $a = 1,8 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade em B; (b) a deflexão no centro C da viga.

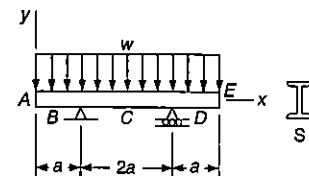


Fig. P8.23

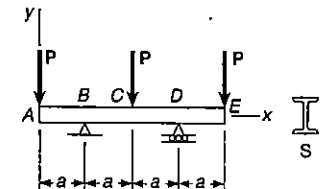


Fig. P8.24

8.25 e 8.26 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica para a porção BD; (b) a declividade em B; (c) a deflexão no centro C da viga.

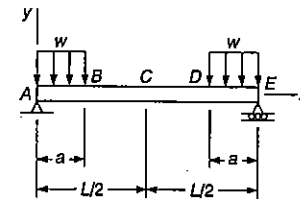


Fig. P8.25

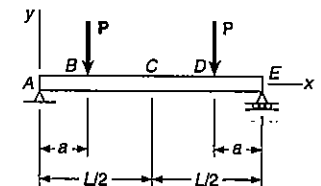


Fig. P8.26

8.27 Para a viga com o carregamento mostrado, e sabendo-se que $a = 2$ m e $w = 50$ kN/m, determinar: (a) a declividade no apoio A; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200$ GPa.

8.28 Para a viga com o carregamento mostrado, e sabendo-se que $a = 1,5$ m e $P = 155$ kN/m, determinar: (a) a declividade no apoio A; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200$ GPa.

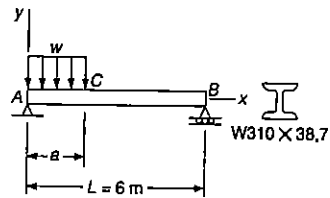


Fig. P8.27

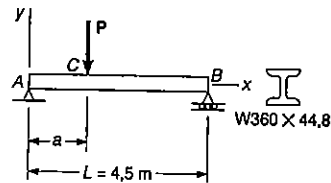


Fig. P8.28

8.29 Pedir-se: (a) Determinar a equação da linha elástica para a porção AB da viga mostrada; (b) Sabendo-se que a viga é um perfil laminado de aço W150 x 29,8 e que $w = 60$ kN/m, $L = 1$ m e $E = 200$ GPa, determinar a deflexão no ponto A.

8.30 Pedir-se: (a) Determinar a equação da linha elástica para a porção AB da viga mostrada; (b) Sabendo-se que a viga é um perfil laminado de aço W200 x 46,1 e que $P = 30$ kN/m, $L = 1,2$ m e $E = 200$ GPa, determinar a deflexão no ponto A.

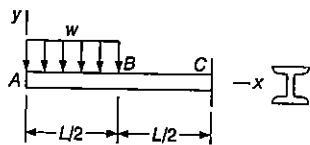


Fig. P8.29

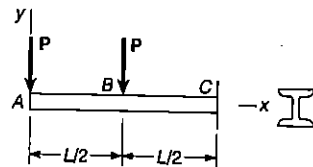


Fig. P8.30

8.31 Para a viga com o carregamento do Exemplo 8.3, determinar a intensidade e a localização da máxima deflexão.

8.32 Determinar a intensidade e a localização da máxima deflexão na viga AB.

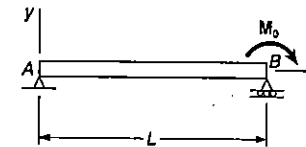


Fig. P8.32

8.33 Para a viga com o carregamento indicado no Prob. 8.9, pedir-se: (a) expressar em termos de w_0 , L , E e I , a intensidade e a localização da máxima deflexão; (b) calcular o valor da máxima deflexão, usando os dados numéricos.

8.34 Resolver o Prob. 8.33, considerando a viga e o carregamento indicado no Prob. 8.10.

8.35 Para a viga com o carregamento do Prob. 8.15, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão ascendente do vão AB.

8.36 Para a viga com o carregamento do Prob. 8.16, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão ascendente do vão AB.

*8.37 e 8.38 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio do vão.

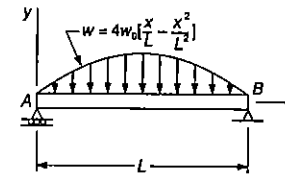


Fig. P8.37

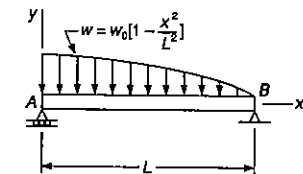


Fig. P8.38

*8.39 e 8.40 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a deflexão na extremidade livre.

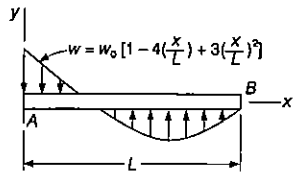


Fig. P8.39

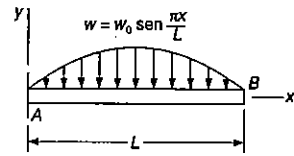


Fig. P8.40

8.41 a 8.44 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a reação no apoio móvel.

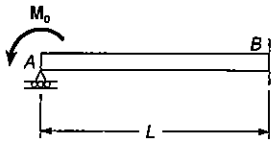


Fig. P8.41

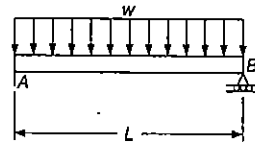


Fig. P8.42

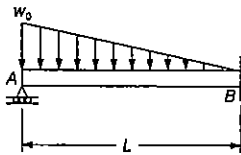


Fig. P8.43

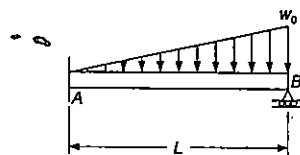


Fig. P8.44

8.45 a 8.48 Determinar a reação no apoio móvel e desenhar o diagrama de momento fletor para a viga com o carregamento indicado.

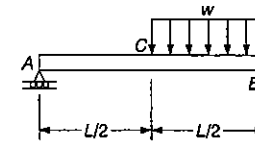


Fig. P8.45

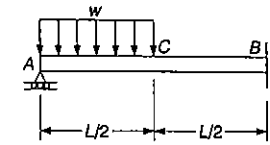


Fig. P8.46

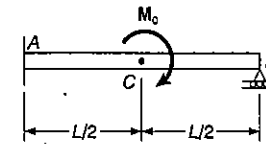


Fig. P8.47

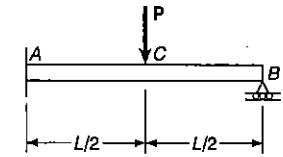


Fig. P8.48

8.49 e 8.50 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a reação no apoio móvel.

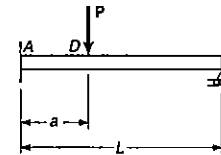


Fig. P8.49

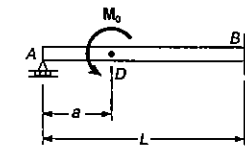


Fig. P8.50

8.51 Para a viga e o carregamento indicado no Prob. 8.45, determinar a flexão no ponto C.

8.52 Para a viga e o carregamento indicado no Prob. 8.46, determinar a flexão no ponto C.

8.53 Para a viga e o carregamento indicado no Prob. 8.47, determinar a flexão no ponto C.

8.54 Para a viga e o carregamento indicado no Prob. 8.48, determinar a flexão no ponto C.

8.55 e 8.56 Determinar a reação em A e desenhar o diagrama de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado.

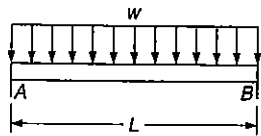


Fig. P8.55

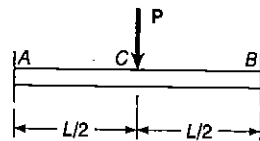


Fig. P8.56

8.57 e 8.58 Determinar a reação em A e desenhar o diagrama de momento fletor, para a viga com o carregamento mostrado.

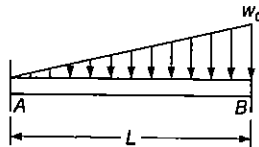


Fig. P8.57

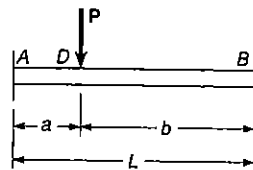


Fig. P8.58

*8.6 UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES SINGULARES

Revolvendo a análise das três primeiras seções deste capítulo, observamos que o método de integração é um meio prático para a determinação da flecha e da declividade de qualquer ponto de uma viga prismática, desde que o momento fletor possa ser representado por uma única função $M(x)$. No entanto, se o carregamento da viga é tal que exige duas funções para representar o momento fletor ao longo do vão, (ver Ex. 8.3), é necessário encontrar-se quatro constantes de integração, o que requer o uso de um número igual de equações expressando continuidade de flechas e declividade, bem como condições de contorno de apoios. Se forem necessárias três funções para descrever a variação do momento fletor ao longo do vão, aparecerão constantes adicionais que exigem, para sua determinação, a montagem de novas equações. Isso aumenta muito a extensão dos cálculos a serem feitos. Nesta seção vamos mostrar como o uso das funções singulares pode simplificar esses cálculos.

Considere novamente a viga e o carregamento do Ex. 8.3 (Fig. 8.16) e desenhe o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 8.27).

Usando a função de singularidade apropriada, como exposto na Sec. 7.5 para representar a contribuição da força cortante devido à carga concentrada P , escrevemos

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P \langle x - \frac{1}{4}L \rangle^0$$

Integrando em x e lembrando da Sec. 7.5 que, na ausência de um momento concentrado, a expressão obtida para o momento fletor não irá conter qualquer termo constante, temos

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P \langle x - \frac{1}{4}L \rangle \tag{8.44}$$

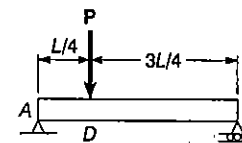


Fig. ex.8.16 (repetida)

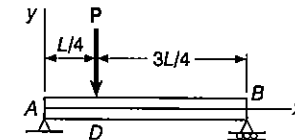


Fig. ex.8.27

se especificarmos que o segundo termo da expressão deve ser incluído nos cálculos quando $x \geq L/4$, e retirado dela quando $x < L/4$. Em outras palavras, os colchetes () devem ser substituídos por parênteses () quando $x \geq L/4$, e devem ser substituídos por zero quando $x < L/4$.

Substituindo a expressão de $M(x)$ dada por (8.44) na Eq.8.4 temos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P \langle x - \frac{L}{4} \rangle \tag{8.45}$$

Integrando,

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P \langle x - \frac{L}{4} \rangle^2 + C_1 \tag{8.46}$$

$$EI y = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P \langle x - \frac{L}{4} \rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{8.47}$$

onde, da mesma forma, os colchetes devem ser substituídos por parênteses quando $x \geq L/4$, e por zero quando $x < L/4$.

As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser determinadas pelas condições de contorno indicadas na Fig. 8.28.

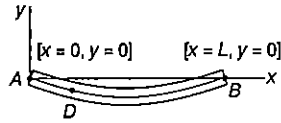


Fig. ex.8.28

Fazemos $x = 0, y = 0$ na Eq. 8.47, e como estudamos um ponto ($x = 0$) onde $x < L/4$, os colchetes são tomados iguais a zero. Concluímos então que $C_2 = 0$.² Fazemos $x = L, y = 0$ na Eq. 8.47, e como estudamos um ponto ($x = L$) onde $x > L/4$, os colchetes são substituídos por parênteses. Temos então

$$0 = \frac{1}{8} PL^3 - \frac{1}{6} P \left(\frac{3L}{4} \right)^3 + C_1 L$$

e calculando o valor de C_1 ,

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

Podemos ver que as expressões obtidas para as constantes C_1 e C_2 são as mesmas que encontramos na Sec. 8.3. Somente que, desta vez, não necessitamos das constantes adicionais C_3 e C_4 , e não precisamos deduzir expressões adicionais relativas à continuidade da flecha e a declividade no ponto D .³

2 Podemos notar também que os colchetes devem ser adotados iguais a zero toda vez que o valor entre eles for negativo.

3 As condições de continuidade da flecha e da declividade estão implícitas nas Eqs. 8.46 e 8.47. Realmente, a diferença entre as expressões da declividade θ_1 em AD e da declividade θ_2 em DB é igual a $-\frac{1}{2} p \left(x - \frac{1}{4} L \right)^2$ na Eq. 8.46, e este termo é nulo em D . Do mesmo modo, a diferença entre as expressões da flecha y_1 em AD e a deflexão y_2 em DB é igual a $-\frac{1}{6} p \left(x - \frac{1}{4} L \right)^3$ na Eq. 8.47, e esse termo é nulo em D .

EXEMPLO 8.6

Para a viga e carregamento mostrado (Fig. 8.29) e usando funções singulares, (a) expressar a declividade e a deflexão como funções da distância x da extremidade A , (b) determine a deflexão no ponto médio D . Usar $E = 200\text{ GPa}$ e $I = 1,024 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.

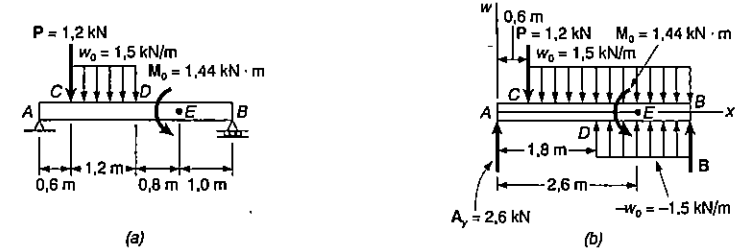


Fig. ex.8.29

Desenhamos o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 8.29), e calculamos a reação do apoio A somando os momentos das forças em relação ao ponto B .

$$\begin{aligned} + \sum M_B = 0: & \quad A_y(3,6 \text{ m}) + (1,2 \text{ kN})(3 \text{ m}) \\ & \quad + (1,8 \text{ kN})(2,4 \text{ m}) + 1,44 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \\ & \quad A_y = 2,60 \text{ kN} \end{aligned}$$

Em seguida, substituímos o carregamento distribuído dado por dois carregamentos equivalentes que se estendem até a extremidade da viga (Fig. 8.29). O carregamento da viga fica reduzido então a uma combinação de carregamentos, de alguma maneira, semelhante ao Exemplo 7.4.

(a) As expressões que se seguem foram obtidas para a força cortante e para o momento fletor:

$$\begin{aligned} V(x) &= -1,5 \langle x - 0,6 \rangle^1 + 1,5 \langle x - 1,8 \rangle^1 + 2,6 - 1,2 \langle x - 0,6 \rangle^0 \\ M(x) &= -0,75 \langle x - 0,6 \rangle^2 + 0,75 \langle x - 1,8 \rangle^2 \\ & \quad + 2,6x - 1,2 \langle x - 0,6 \rangle^1 - 1,44 \langle x - 2,6 \rangle^0 \end{aligned}$$

4 W. H. Macaulay, "Note on the Deflection of Beams", *Messenger of Mathematics*, 1919, vol. 48, p. 129-130.

Integrando esta última expressão duas vezes, obtemos:

$$EI\theta = -0,25(x - 0,6)^3 + 0,25(x - 1,8)^3 + 1,3x^2 - 0,6(x - 0,6)^2 - 1,44(x - 2,6)^1 + C_1 \quad (8.49)$$

$$EIy = -0,0625(x - 0,6)^4 + 0,0625(x - 1,8)^4 + 0,4333x^3 - 0,2(x - 0,6)^3 - 0,72(x - 2,6)^2 + C_1x + C_2 \quad (8.50)$$

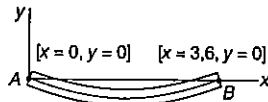


Fig. ex.8.30

As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas das condições de contorno mostradas na Fig. 8.30. Para $x = 0, y = 0$ na Eq. (8.50), concluímos que $C_2 = 0$. Para $x = 3,6, y = 0$ e $C_2 = 0$ na Eq. (8.50), escrevemos:

$$0 = -0,0625(3,0)^4 + 0,0625(1,8)^4 + 0,4333(3,6)^3 - 0,2(3,0)^3 - 0,72(1,0)^2 + C_1(3,6) + 0$$

Como toda quantidade entre chaves são positivas, substituímos as chaves por parênteses. Resolvendo para C_1 , encontramos que $C_1 = -2,692$.

(b) Substituindo C_1 e C_2 na Eq. (8.50) e fazendo $x = x_D = 1,8$ m, encontramos que a deflexão no ponto D é definida pela relação

$$EIy_D = -0,0625(1,2)^4 + 0,0625(0)^4 + 0,4333(1,8)^3 - 0,2(1,2)^3 - 0,72(-0,8)^2 - 2,692(1,8)$$

A última chave contém uma quantidade negativa e, portanto, é igual a zero. Todas as outras chaves têm quantidades positivas e podem ser substituídas por simples parênteses. Temos:

$$EIy_D = -0,0625(1,2)^4 + 0,0625(0)^4 + 0,4333(1,8)^3 - 0,2(1,2)^3 - 0 - 2,692(1,8) = -2,794$$

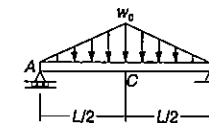
Lembrando os valores numéricos dados para E e I , escrevemos:

$$(200 \text{ GPa})(1,024 \times 10^{-6} \text{ m}^4)y_D = -2,794 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$y_D = -13,64 \times 10^{-3} \text{ m} = -13,64 \text{ mm}$$

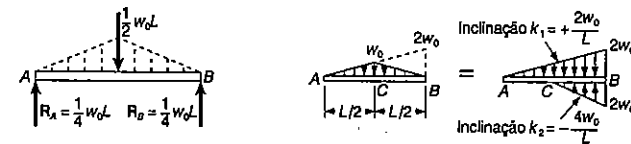
PROBLEMA RESOLVIDO 8.4

Determinar, para a viga prismática com o carregamento indicado: (a) a equação da linha elástica; (b) a rotação do eixo da viga em A ; (c) a flecha máxima.



Reações:

Diagrama de carga modificado. O carregamento dado é equivalente às duas cargas distribuídas que se estendem até o final do vão. Cada carga distribuída e cada reação corresponde a um dos carregamentos básicos da Fig. 7.18.



Momento fletor. O momento fletor $M(x)$ se obtém da soma dos momentos fletores na Fig. 7.18, para cada reação e carregamento.

$$M(x) = R_A x - \frac{1}{6} k_1 x^3 - \frac{1}{6} k_2 (x - \frac{1}{2} L)^3$$

$$M(x) = +\frac{1}{4}w_0Lx - \frac{1}{6}\left(\frac{2w_0}{L}\right)x^3 - \frac{1}{6}\left(-\frac{4w_0}{L}\right)\left(x - \frac{1}{2}L\right)^3$$

(a) Equação da linha elástica. Usando a Eq. 8.4, temos

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}w_0Lx - \frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\left(x - \frac{1}{2}L\right)^3 \quad (1)$$

Integrando duas vezes,

$$EI \theta = \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\left(x - \frac{1}{2}L\right)^4 + C_1 \quad (2)$$

$$EI y = \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\left(x - \frac{1}{2}L\right)^5 + C_1x + C_2 \quad (3)$$

Condições de Contorno

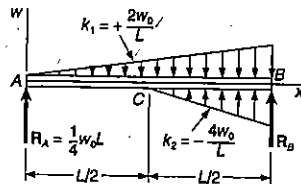
$[x = 0, y = 0]$: Substituindo $x = 0$ na Eq. 3, vemos que a expressão entre colchetes fica negativa; desse modo, o colchete é nulo e $C_2 = 0$.

$[x = L, y = 0]$: Usando outra vez a Eq. 3, escrevemos

$$0 = +\frac{w_0L^4}{24} - \frac{w_0L^4}{60} + \frac{w_0}{30L}\left(\frac{L}{2}\right)^5 + C_1L \quad C_1 = -\frac{5}{192}w_0L^3$$

$$EI \theta = \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\left(x - \frac{1}{2}L\right)^4 - \frac{5}{192}w_0L^3 \quad (4)$$

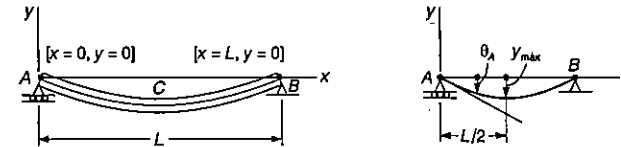
$$EI y = \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\left(x - \frac{1}{2}L\right)^5 - \frac{5}{192}w_0L^3x$$



(b) Rotação da viga no apoio A. Na Eq. 4 fazemos $x = 0$, encontrando

$$EI \theta_A = -\frac{5}{192}w_0L^3 \quad \theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}$$

(c) Flecha máxima. No ponto C, onde $x = \frac{1}{2}L$, temos

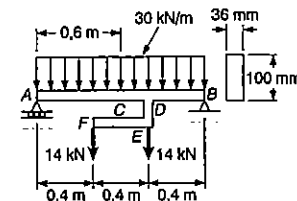


$$EI y_{m\acute{a}x} = w_0L^4 \left[\frac{1}{24(8)} - \frac{1}{60(32)} + 0 - \frac{5}{192(2)} \right] = -\frac{w_0L^4}{120EI}$$

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{w_0L^4}{120EI}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.5

A barra rígida DEF é soldada ao ponto D de uma viga de aço AB, de seção constante. Determinar, para o carregamento indicado: (a) a equação da linha elástica da viga; (b) a flecha no meio do vão. Adotar $E = 200$ GPa.



Reações. Considerando toda a viga como um corpo livre, encontramos

$$R_A = 32 \text{ kN } \uparrow \qquad R_B = 32 \text{ kN } \uparrow$$

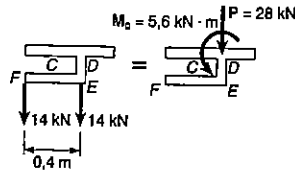
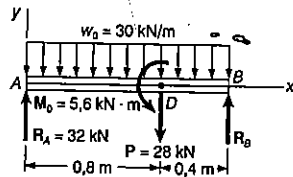


Diagrama de carga modificada. Substituímos as duas cargas concentradas por uma força e um conjugado aplicados no ponto D. Cada elemento do diagrama de carga fica igual a um dos carregamentos básicos dados na Fig. 7.18.

Momento fletor. Somamos os momentos fletores dados na Fig. 7.18, para cada seção e carregamento da viga estudada, obtendo

$$M(x) = R_A x - \frac{1}{2} w_0 x^2 - M_0 (x - 0,8)^0 - P (x - 0,8)^1$$

$$M(x) = [32x - \frac{1}{2}(30)x^2 - 5,6(x - 0,8)^0 - 28(x - 0,8)^1]10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$



a) **Equação da linha elástica.** Usando a Eq. 8.4, temos

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = [32x - 15x^2 - 5,6(x - 0,8)^0 - 28(x - 0,8)^1]10^3 \quad (1)$$

Integrando duas vezes,

$$EI \theta = [16x^2 - 5x^3 - 5,6(x - 0,8)^1 - 14(x - 0,8)^2]10^3 + C_1 \quad (2)$$

$$EI y = [5,33x^3 - 1,25x^4 - 2,8(x - 0,8)^2 - 4,67(x - 0,8)^3]10^3 + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

Condições de contorno

$[x = 0, y = 0]$: Usando a Eq. 3, e verificando que cada expressão em colchetes é nula, encontramos $C_2 = 0$.

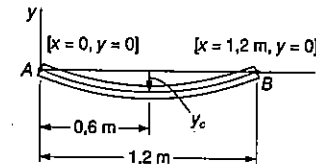
$[x = 1,2 \text{ m}, y = 0]$: Usando a Eq. 3, escrevemos

$$0 = [5,33(1,2)^3 - 1,25(1,2)^4 - 2,8(0,4)^2 - 4,67(0,4)^3]10^3 + C_1(1,2)$$

$$C_1 = -4,89 \times 10^3$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na Eq. 3, temos

$$EI y = [5,33x^3 - 1,25x^4 - 2,8(x - 0,8)^2 - 4,67(x - 0,8)^3 - 4,89x]10^3 \quad \blacktriangleleft$$



b) **Flecha no ponto médio C.** Para $x = 0,6 \text{ m}$, calculamos

$$EI y_c = [5,33(0,6)^3 - 1,25(0,6)^4 - 0 - 0 - 4,89(0,6)]10^3 = -1,945 \times 10^3$$

O módulo de elasticidade é $E = 200 \text{ GPa}$ e o momento de inércia da seção é

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0,036 \text{ m})(0,100 \text{ m})^3}{12} = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

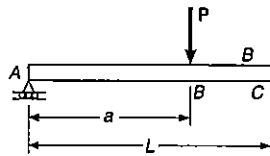
Escrevemos então

$$(200 \times 10^9)(3 \times 10^{-6})y_c = -1,945 \times 10^3$$

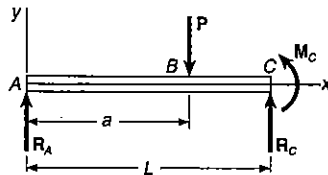
$$y_c = 3,24 \text{ mm } \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.6

Para a viga ABC: (a) expressar a reação do apoio A em função de P, L, a, e I; (b) determinar a reação em A e a flecha no ponto de força concentrada, para $a = L/2$.



Reações. Para a carga P, as reações são da forma indicada na figura. Podemos ver que elas são estaticamente indeterminadas.



Momento fletor. Recorrendo à Fig. 7.18, obtemos os momentos fletores devidos à reação R_A e à carga P. O momento fletor $M(x)$ se obtém pela soma das parcelas acima. Temos

$$M(x) = R_A x - P(x - a)^1$$

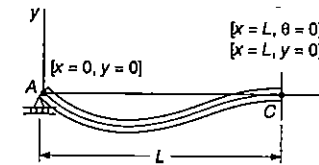
Equação da linha elástica. Usando a Eq. 8.4,

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - P(x - a)^1$$

Integrando duas vezes,

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{2} P(x - a)^2 + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{6} P(x - a)^3 + C_1 x + C_2$$



Condições de Contorno

$$[x = 0, y = 0]: \quad C_2 = 0 \tag{1}$$

$$[x = L, \theta = 0]: \quad \frac{1}{2} R_A L^2 - \frac{1}{2} P(L - a)^2 + C_1 = 0 \tag{2}$$

$$[x = L, y = 0]: \quad \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{1}{6} P(L - a)^3 + C_1 L + C_2 = 0 \tag{3}$$

(a) **Reação do Apoio A.** Multiplicamos a Eq. 2 por L, subtraímos membro a membro da Eq. 3, lembrando que $C_2 = 0$. Temos

$$\frac{1}{3} R_A L^3 - \frac{1}{6} P(L - a)^2 [3L - (L - a)] = 0$$

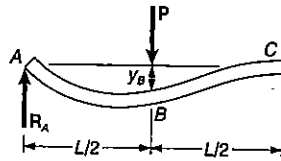
$$R_A = P \left(1 - \frac{a}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{a}{2L} \right) \uparrow \blacktriangleleft$$

Essa reação, como podemos ver, não depende de E e de I.

(b) **Reação do apoio A e flecha no ponto B quando $a = 1/2L$.** Fazendo $a = 1/2L$ na expressão encontrada para R_A , temos

$$R_A = P \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 5P/16$$

$$R_A = \frac{5}{16} P \uparrow \blacktriangleleft$$



Na Eq. 2, substituímos $\alpha = L/2$ e $R_A = 5P/16$, encontrando $C_1 = \frac{-PL^2}{32}$. Levando esse valor na expressão de y , juntamente com $x = L/2$ e $C_2 = 0$, obtemos

$$y_B = -\frac{7PL^3}{768EI} \quad y_B = \frac{7PL^3}{768EI} \downarrow$$

Devemos observar que a expressão obtida **não** é a flecha máxima.

PROBLEMAS

Usar as funções singulares para resolver os problemas que se seguem e assumir que a rigidez flexional EI em cada viga é constante.

8.59 a 8.62 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a declividade na extremidade A; (c) a deflexão no ponto C.

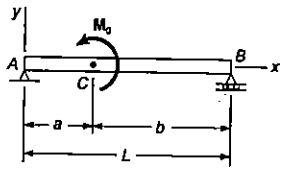


Fig. P8.59

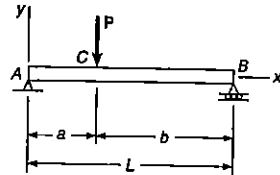


Fig. P8.60

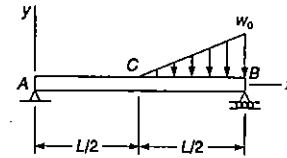


Fig. P8.61

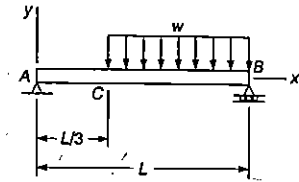


Fig. P8.62

8.63 a 8.66 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a deflexão na extremidade livre.

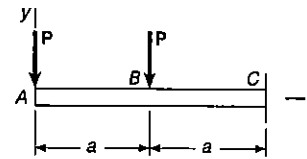


Fig. P8.63

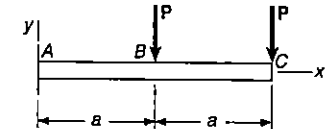


Fig. P8.64

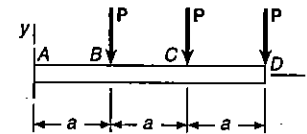


Fig. P8.65

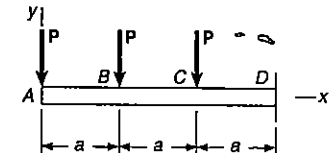


Fig. P8.66

8.67 e 8.68 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a deflexão no: (a) ponto B; (b) ponto C.

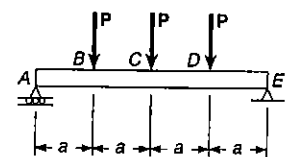


Fig. P8.67

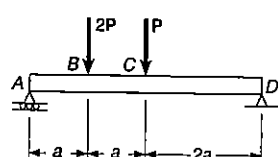


Fig. P8.68

8.69 e 8.70 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a deflexão na extremidade livre.

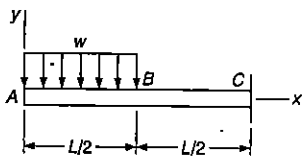


Fig. P8.69

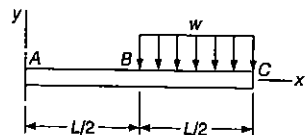


Fig. P8.70

8.71 a 8.74 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a deflexão no ponto médio C.

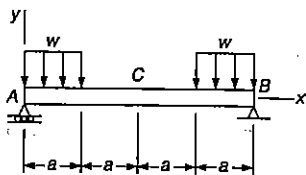


Fig. P8.71

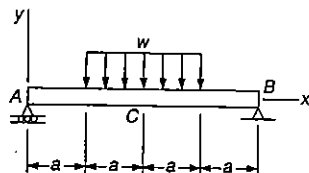


Fig. P8.72

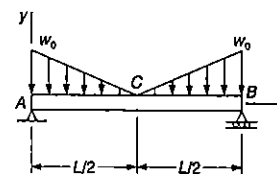


Fig. P8.73

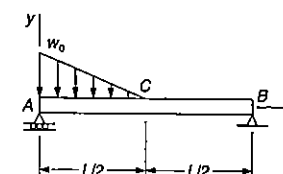


Fig. P8.74

8.75 e 8.76 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a equação da linha elástica; (b) a deflexão do ponto B; (c) a deflexão do ponto D.

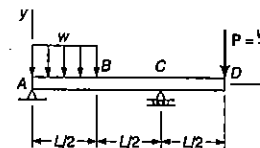


Fig. P8.75

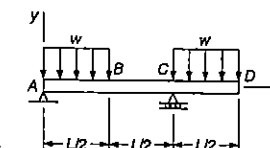


Fig. P8.76

8.77 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em B; (b) a deflexão em A. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

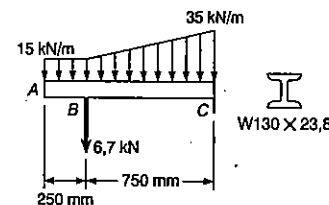


Fig. P8.77

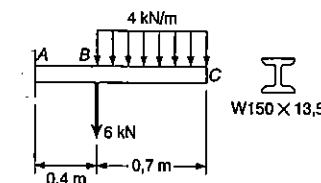


Fig. P8.78

8.78 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em B; (b) a deflexão em C. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.79 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão em B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

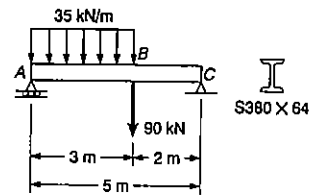


Fig. P8.79

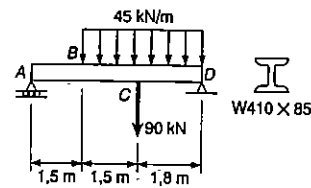


Fig. P8.80

8.80 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão em C. Usar $E = 200$ GPa.

8.81 Sabendo-se que a viga AD é feita de uma barra maciça de aço, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200$ GPa.

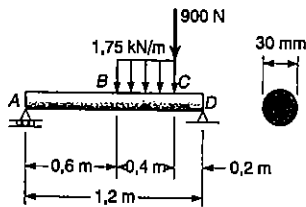


Fig. P8.81

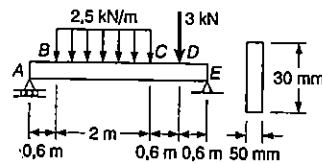


Fig. P8.82

8.82 Para a viga de madeira com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 12$ GPa.

8.83 Três barras rígidas são soldadas à barra de aço AD, como mostrado. Para o carregamento indicado, determinar a deflexão: (a) no ponto B; (b) no ponto C. Usar $E = 200$ GPa.

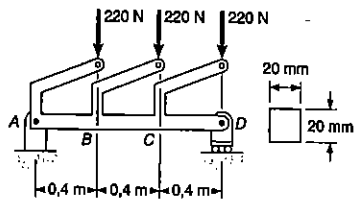


Fig. P8.83

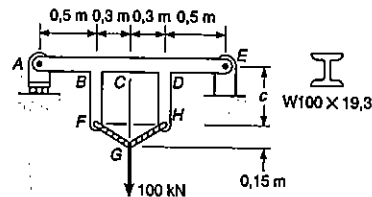


Fig. P8.84 e P8.85

8.84 As barras rígidas BF e DH são soldadas ao perfil laminado de aço AE, como mostrado. Sabendo-se que $c = 150$ mm, determinar para o carregamento indicado: (a) a deflexão no ponto B; (b) a deflexão no ponto médio C do vão. Usar $E = 200$ GPa.

8.85 As barras rígidas BF e DH são soldadas ao perfil laminado de aço AE, como mostrado. Para o carregamento indicado, determinar: (a) o comprimento c das barras, para que a deflexão em B seja zero; (b) a correspondente deflexão no ponto médio C do vão. Usar $E = 200$ GPa.

8.86 A barra rígida BDE é soldada ao ponto B da viga constituída do perfil laminado de aço AC. Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto B; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200$ GPa.

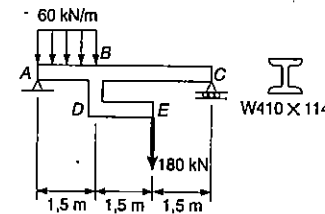


Fig. P8.86

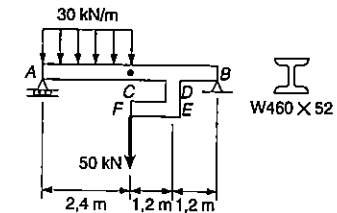


Fig. P8.87

8.87 A barra rígida DEF é soldada ao ponto D da viga constituída de um perfil laminado de aço AB. Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em A; (b) a deflexão do ponto médio C da viga. Usar $E = 200$ GPa.

8.88 a 8.91⁵ Para a viga com o carregamento indicado, escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a declividade e a deflexão da viga em intervalos ΔL , começando pelo ponto A e terminando no apoio da extremidade direita.

8.88 Viga e o carregamento do Prob. 8.80, com $\Delta L = 0,3$ m.

8.89 Viga e o carregamento do Prob. 8.79, com $\Delta L = 0,5$ m.

8.90 Viga e o carregamento do Prob. 8.82, com $\Delta L = 0,2$ m.

8.91 Viga e o carregamento do Prob. 8.81, com $\Delta L = 0,1$ m.

8.92 a 8.95 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação no apoio móvel; (b) a deflexão no ponto B.

5 Os problemas 8.88 até 8.91 requerem o uso de um computador.

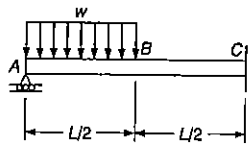


Fig. P8.92

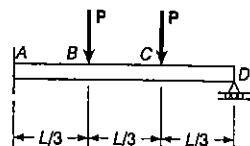


Fig. P8.93

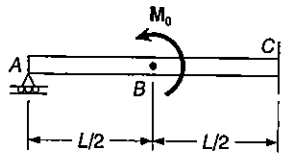


Fig. P8.94

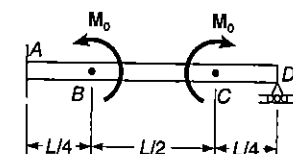


Fig. P8.95

8.96 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em A; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

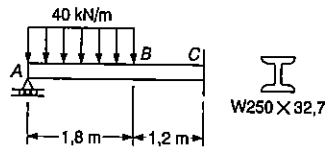


Fig. P8.96

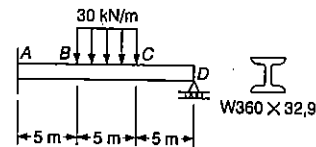


Fig. P8.97

8.97 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em D; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.98 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em A; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

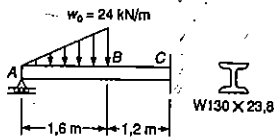


Fig. P8.98

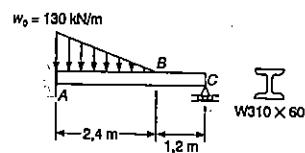


Fig. P8.99

8.99 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em C; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.100 e 8.101 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em A; (b) a deflexão no meio do vão.

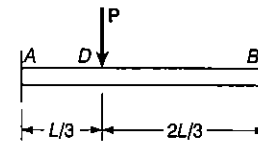


Fig. P8.100

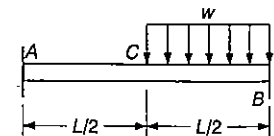


Fig. P8.101

8.102 e 8.103 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em A; (b) o momento fletor em D.

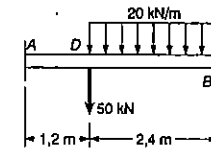


Fig. P8.102

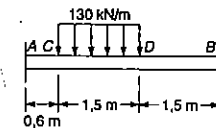


Fig. P8.103

8.104 a 8.107 Para a viga com o carregamento indicado, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão descendente.

8.104 Viga e o carregamento do Prob. 8.79.

8.105 Viga e o carregamento do Prob. 8.80.

8.106 Viga e o carregamento do Prob. 8.81.

8.107 Viga e o carregamento do Prob. 8.82.

8.7 MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO

Para uma viga submetida a vários carregamentos distribuídos ou concentrados, torna-se conveniente calcular separadamente as flechas e declividades provocadas graças a cada um dos carregamentos e aplicar o princípio da superposição (Sec. 2.12). A flecha e a declividade provocadas pelo carregamento total é então determinada pela soma dos valores encontrados para cada carregamento isoladamente.

EXEMPLO 8.7

Determinar a flecha e a declividade da viga com carregamento indicado, para o ponto D (Fig. 8.31). Sabe-se que a rigidez flexional da viga é $EI = 100 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$.

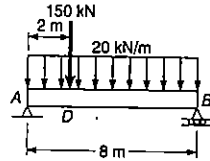


Fig. ex.8.31

A declividade e a flecha em qualquer ponto da viga podem ser determinadas superpondo-se a declividade e a flecha calculadas para as cargas concentradas e a carga distribuída separadamente (Fig. 8.32).

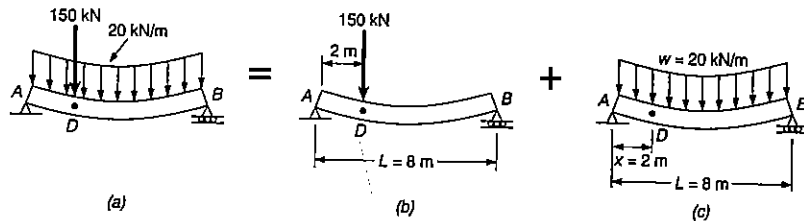


Fig. ex.8.32

A carga concentrada é aplicada no ponto a um quarto do vão (Fig. 8.32b), de modo que podem ser aproveitados os resultados do Ex. 8.3. Temos

$$(\theta_D)_P = -\frac{PL^2}{32EI} = -\frac{(150 \times 10^3)(8)^2}{32(100 \times 10^6)} = -3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(\gamma_D)_P = \frac{3PL^3}{256EI} = -\frac{3(150 \times 10^3)(8)^3}{256(100 \times 10^6)} = -9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= -9 \text{ mm}$$

Por outro lado, recorrendo à equação da linha elástica deduzida para carregamento uniformemente distribuído no Ex. 8.2, exprimimos a flecha na Fig. 8.32c por

$$y = \frac{w}{24EI} (-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad (8.51)$$

e, derivando em relação a x ,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI} (-4x^3 + 6Lx^2 - L^3) \quad (8.52)$$

Fazendo $w = 20 \text{ kN/m}$, $x = 2 \text{ m}$ e $L = 8 \text{ m}$ nas Equações 8.51 e 8.52, obtemos

$$(\theta_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)} (-352) = -2,93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(\gamma_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)} (-912) = -7,60 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= -7,60 \text{ mm}$$

Combinando as declividades e deformações provocadas pela carga concentrada e pela carga distribuída, encontramos

$$\theta_D = (\theta_D)_P + (\theta_D)_w = -3 \times 10^{-3} - 2,93 \times 10^{-3}$$

$$= -5,93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\gamma_D = (\gamma_D)_P + (\gamma_D)_w = -9 \text{ mm} - 7,60 \text{ mm} = -16,60 \text{ mm}$$

Muitos manuais de engenharia mecânica e estrutural trazem tabelas com as expressões de flechas e declividades de vigas para vários tipos de carregamento e apoios, com a finalidade de simplificar os cálculos práticos. O Apêndice D traz uma tabela desse tipo. Vemos que os dados de deformação da viga da Fig. 8.31 poderiam ter sido determinados com o uso dessa tabela. Realmente, usando as expressões dos casos 5 e 6, podemos exprimir a flecha da viga para qualquer $x \leq L/4$. A expressão obtida desse modo é então derivada levando à fórmula da declividade da viga nesse intervalo. Vemos ainda que a declividade da viga nos dois apoios pode ser obtida pela soma dos valores correspondentes dados na tabela. No entanto, a flecha máxima da viga da Fig. 8.31 não pode ser determinada pela soma das deformações máximas dos casos 5 e 6, pois as deformações ocorrem em pontos diferentes da viga⁶.

⁶ Podemos obter um valor aproximado da flecha máxima da viga desenhando a curva dos valores de y correspondentes a vários valores de x . A determinação do valor exato da flecha máxima, bem como de sua localização, se consegue quando se iguala a zero a expressão da declividade da viga, encontrando-se o valor de x que satisfaz a equação.

8.8 APLICAÇÃO DA SUPERPOSIÇÃO ÀS VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Freqüentemente, o método da superposição se mostra um meio conveniente para a determinação das reações de apoio de viga estaticamente indeterminadas. Considerando inicialmente o caso de uma viga com um grau de hiperestaticidade (cf. Sec. 8.5), seguimos o procedimento descrito na Sec. 2.9. Escolhemos uma das reações como superabundante, modificando convenientemente o apoio correspondente. A reação superabundante é tratada como um carregamento desconhecido que, juntamente com outras cargas, deve provocar deformações compatíveis com o apoio original. Calculamos separadamente as deformações provocadas pelo carregamento dado e pela reação superabundante no apoio modificado. Superpondo-se então esses valores de deformação, encontramos a declividade e a flecha no ponto em que modificamos ou eliminamos o apoio. Uma vez determinadas as reações dos apoios, podemos encontrar, pelo processo usual, as deformações em qualquer outro ponto da viga.

EXEMPLO 8.8

Determinar as reações dos apoios da viga da Fig. 8.33 (é a mesma viga do Ex. 8.5 da Sec. 8.5).

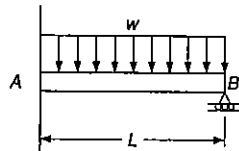


Fig. ex.8.33

Considerando a reação em B como superabundante, eliminamos esse apoio. A reação R_B passa a ser considerada como um carregamento desconhecido (Fig. 8.34a) que será determinado com a medição de que a flecha da viga em B deve ser nula.

Calculamos separadamente a flecha $(y_B)_w$ provocada pela carga distribuída w (Fig. 8.34b) e a flecha $(y_B)_R$ causada pela reação superabundante R_B (Fig. 8.34c).

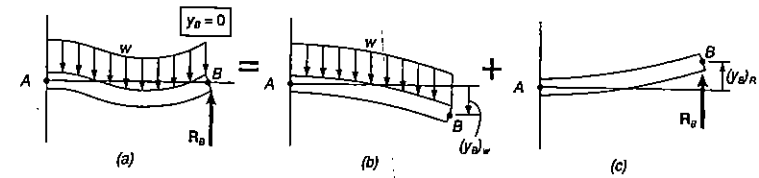


Fig. ex.8.34

Encontramos na tabela do Apêndice D (casos 2 e 1) as expressões

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \quad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

Como a flecha em B, que é a soma dos valores acima, deve ser nula, escrevemos

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R = 0$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

Temos, então,

$$R_B = \frac{3}{8} wL \quad R_B = \frac{3}{8} wL \uparrow$$

Desenhando o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 8.35) e escrevendo as equações de equilíbrio correspondentes, temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A + R_B - wL = 0 \tag{8.53}$$

$$R_A = wL - R_B = wL - \frac{3}{8} wL = \frac{5}{8} wL$$

$$R_A = \frac{5}{8} wL \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A + R_B L - (wL)(\frac{1}{2}L) = 0 \tag{8.54}$$

$$M_A = \frac{1}{2} wL^2 - R_B L = \frac{1}{2} wL^2 - \frac{3}{8} wL^2 = \frac{1}{8} wL^2$$

$$M_A = \frac{1}{8} wL^2 \circlearrowleft$$

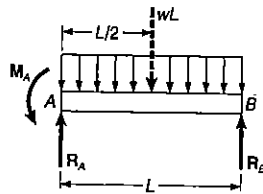


Fig. ex.8.35

Solução Alternativa. Podemos considerar como reação superabundante o momento fletor que atua no apoio engastado, e substituir esse apoio engastado por um apoio articulado fixo. O momento M_A é agora considerado como um conjugado de valor desconhecido à viga em A (Fig. 8.36a), que será determinado pela condição de que a declividade da viga no ponto A é zero. Calculamos separadamente a rotação do eixo da viga $(\theta_A)_w$ provocada em A pelo carregamento distribuído W (Fig. 8.36b) e a rotação $(\theta_A)_M$ causada nesse ponto pelo conjugado M_A (Fig. 8.36c).

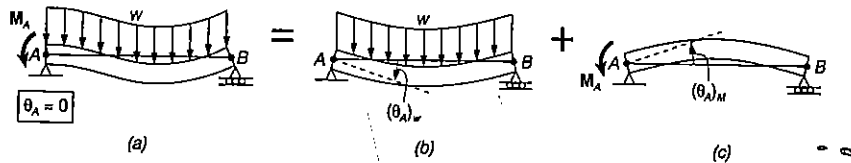


Fig. ex.8.36

Usamos a tabela do Apêndice D (casos 6 e 7), notando que, no caso 7, A e B devem ser trocados. Temos então

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} \quad (\theta_A)_M = \frac{M_A L}{3EI}$$

A rotação final em A, que é a soma das quantidades acima, deve ser nula. Escrevemos

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_M = 0$$

$$\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0$$

e, calculando o valor de M_A ,

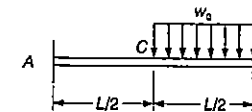
$$M_A = \frac{1}{8} wL^2 \quad M_A = \frac{1}{8} wL^2$$

Os valores de R_A e R_B podem agora ser obtidos das equações de equilíbrio (8.53) e (8.54).

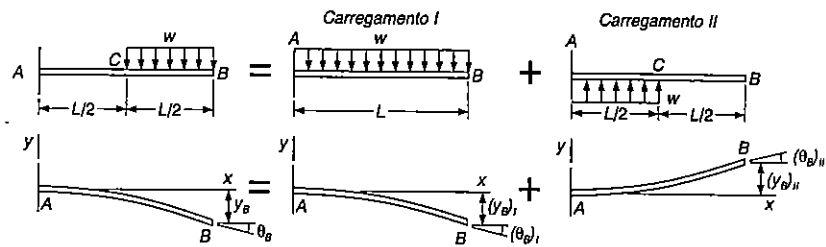
A viga considerada no exemplo anterior tinha um grau de indeterminação. No caso de uma viga com dois graus de indeterminação (cf. Sec. 8.5), devemos escolher duas reações como superabundantes, modificando ou eliminando os apoios convenientemente. As reações superabundantes são, então, consideradas como carregamentos desconhecidos que, juntamente com outros carregamentos, devem provocar deformações compatíveis com os apoios originais (ver Prob. Resolvido 8.9).

PROBLEMA RESOLVIDO 8.7

Determinar, para a viga e o carregamento indicados, a declividade e a flecha em B.



Princípio da Superposição. Podemos obter o carregamento dado superpondo os carregamentos indicados na equação figurada abaixo. A viga, como é claro, é a mesma em cada parte da figura.

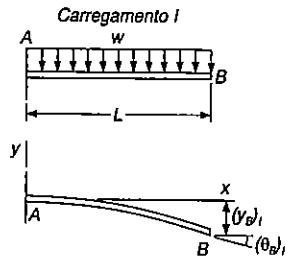


Para cada um dos carregamentos, I e II, determinamos a flecha e a declividade em B, usando a tabela do Apêndice D.

Carregamento I

$$(\theta_B)_I = -\frac{wL^3}{6EI}$$

$$(y_B)_I = -\frac{wL^4}{8EI}$$



Carregamento II

$$(\theta_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^3}{6EI} = +\frac{wL^3}{48EI}$$

$$(y_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^4}{8EI} = +\frac{wL^4}{128EI}$$

No trecho CB o carregamento II não provoca momentos fletores e a linha elástica é uma linha reta.

$$(\theta_B)_{II} = (\theta_C)_{II} = +\frac{wL^3}{48EI} \quad (y_B)_{II} = (y_C)_{II} + (\theta_C)_{II} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI} \left(\frac{L}{2}\right) = +\frac{7wL^4}{384EI}$$

Declividade no ponto B

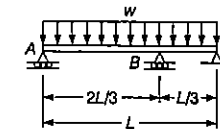
$$\theta_B = (\theta_B)_I + (\theta_B)_{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI} \quad \theta_B = \frac{7wL^3}{48EI} \leftarrow$$

Flecha no ponto B

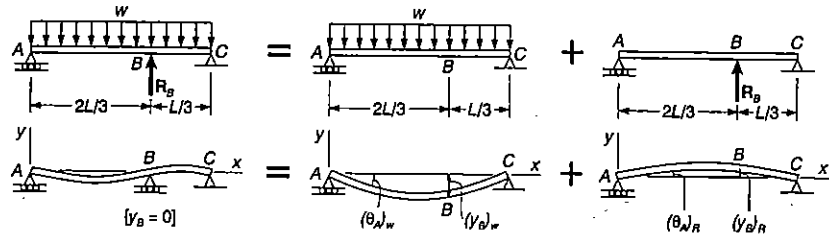
$$y_B = (y_B)_I + (y_B)_{II} = -\frac{wL^4}{6EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{41wL^4}{384EI} \quad y_B = \frac{41wL^4}{384EI} \leftarrow$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.8

Determinar, para a viga de seção constante com carregamento dado: (a) a reação em cada apoio; (b) a declividade da linha elástica na extremidade A.



Princípio da Superposição. Escolhemos a reação R_B como superabundante, considerando-a como uma carga de valor desconhecido. Calculamos separadamente as flechas devidas ao carregamento distribuído e à reação R_B como se indica abaixo.



Usando a tabela do Apêndice D para determinarmos as flechas no ponto D provocadas através de cada carregamento.

Carregamento distribuído. Usando o caso 6 do Apêndice D encontramos

$$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

No ponto B, para $x = \frac{2}{3}L$

$$(\gamma_B)_w = -\frac{w}{24EI} \left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right) \right] = -0,01132 \frac{wL^4}{EI}$$

Carregamento da reação superabundante. Para o caso 5 do Apêndice D, com $a = \frac{2}{3}L$ e $b = \frac{1}{3}L$, temos:

$$(\gamma_B)_R = -\frac{P a^2 b^2}{3EIL} = +\frac{R_B}{3EIL} \left(\frac{2}{3}L\right)^2 \left(\frac{L}{3}\right)^2 = 0,01646 \frac{R_B L^3}{EI}$$

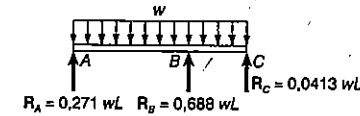
(a) **Reações de apoio.** Como $y_B = 0$, escrevemos

$$y_B = (\gamma_B)_w + (\gamma_B)_R$$

$$0 = -0,01132 \frac{wL^4}{EI} + 0,01646 \frac{R_B L^3}{EI} \quad R_B = 0,688wL \uparrow$$

Uma vez conhecido o valor de R_B obtemos as outras reações pelas equações da estática:

$$R_A = 0,271wL \uparrow \quad R_C = 0,0413wL \uparrow$$



(b) **Declividade da linha elástica no apoio A.** Recorrendo novamente ao Apêndice D, encontramos:

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} = -0,04167 \frac{wL^3}{EI}$$

Reação superabundante

$$P = -R_B = -0,688wL \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{3}L$$

$$(\theta_A)_R = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} = +\frac{0,688wL}{6EIL} \left(\frac{L}{3}\right) \left[L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2 \right]$$

$$(\theta_A)_R = 0,03398 \frac{wL^3}{EI}$$

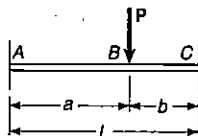
Finalmente,

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R$$

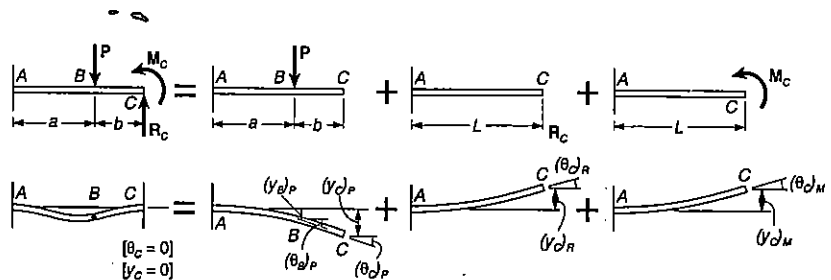
$$\theta_A = -0,04167 \frac{wL^3}{EI} + 0,03398 \frac{wL^3}{EI} = -0,00769 \frac{wL^3}{EI}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.9

Determinar, para a viga com o carregamento indicado, a reação do apoio C.



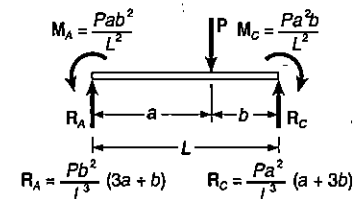
Princípio da Superposição. Adotando como sendo nula a força axial na viga ABC, ela torna-se uma viga com dois graus de indeterminação. Escolhemos duas componentes de reação como sendo superabundantes, o conjugado M_C e a força vertical R_C . As deformações provocadas pela carga P, a força R_C e o conjugado M_C serão considerados separadamente, como está indicado a seguir:



Encontramos a flecha e a declividade da linha elástica no ponto C, para cada carregamento, através da tabela do Apêndice D.

Carga P. Para este carregamento, a parte BC da viga se mantém reta.

$$\begin{aligned}
 (\theta_C)_P &= (\theta_B)_P = -\frac{Pa^2}{2EI} & (y_C)_P &= (y_B)_P + (\theta_B)_P b \\
 & & &= -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI} b = -\frac{Pa^2}{6EI} (2a + 3b)
 \end{aligned}$$



Força R_C

$$(\theta_C)_R = +\frac{R_C L^2}{2EI} \qquad (y_C)_R = +\frac{R_C L^3}{3EI}$$

Conjugado M_C

$$(\theta_C)_M = +\frac{M_C L}{EI} \qquad (y_C)_M = +\frac{M_C L^2}{2EI}$$

Condições de contorno. No ponto C, são nulas a flecha e a declividade.

$$\begin{aligned}
 [x = L, \theta_C = 0]: \quad \theta_C &= (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M \\
 0 &= -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI} \qquad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [x = L, y_C = 0]: \quad y_C &= (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M \\
 0 &= -\frac{Pa^2}{6EI} (2a + 3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI} \qquad (2)
 \end{aligned}$$

Componente de reação em C. Resolvendo simultaneamente as Equações 1 e 2, encontramos

$$R_C = + \frac{Pa^2}{L^3} (a + 3b)$$

$$R_C = \frac{Pa^2}{L^3} (a + 3b) \uparrow$$

$$M_C = - \frac{Pa^2b}{L^2}$$

$$M_C = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

Determinamos a reação em A pelas equações da estática.

PROBLEMAS

Usar o método da superposição para resolver os problemas que se seguem e assumir que a rigidez flexional EI em cada viga é constante.

8.108 e 8.109 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a deflexão no ponto C; (b) a declividade na extremidade A.

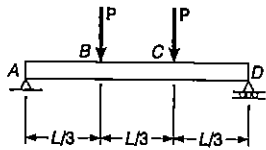


Fig. P8.108

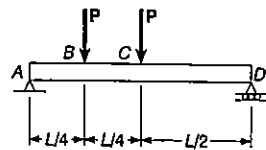


Fig. P8.109

8.110 e 8.111 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a deflexão no ponto médio em C; (b) a declividade na extremidade A.

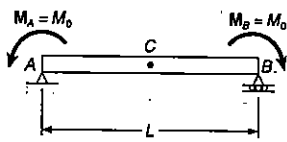


Fig. P8.110

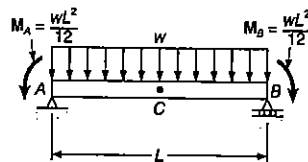


Fig. P8.111

8.112 a 8.115 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão na extremidade livre.

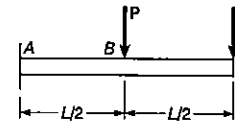


Fig. P8.112 e P8.116

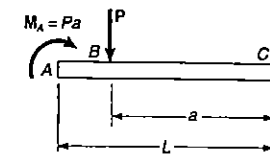


Fig. P8.113 e P8.117

8.116 a 8.119 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão no ponto B.

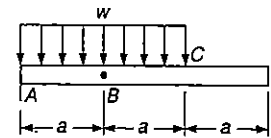


Fig. P8.114 e P8.118

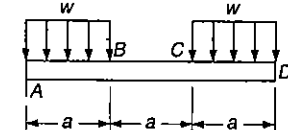


Fig. P8.115 e P8.119

8.120 Para a viga constituída de um perfil laminado de aço W610 x 101 e o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio C. Usar E = 200 GPa.

8.121 Para a viga constituída de um perfil laminado de aço W530 x 66 e o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio C. Usar E = 200 GPa.

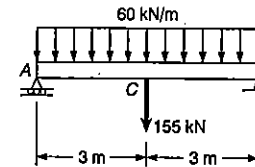


Fig. P8.120

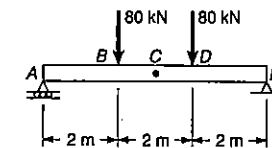


Fig. P8.121

8.122 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão na extremidade A. Usar E = 200 GPa.

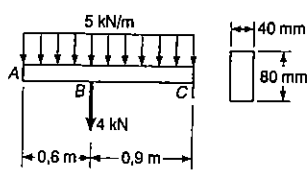


Fig. P8.122 e P8.123

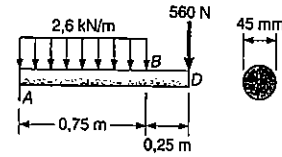


Fig. P8.124 e P8.125

8.123 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão no ponto *B*. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.124 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão na extremidade *C*. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.125 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade no ponto *B*. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.126 e 8.127 Para a viga uniforme mostrada, determinar: (a) a reação em *A*; (b) a reação em *B*.

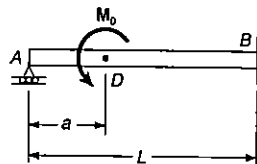


Fig. P8.126

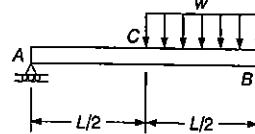


Fig. P8.127

8.128 e 8.129 Para a viga uniforme mostrada, determinar a reação em cada um dos três apoios.

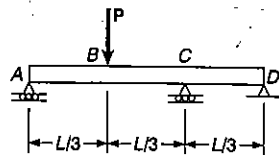


Fig. P8.128

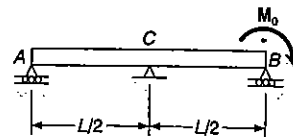


Fig. P8.129

8.130 e 8.131 Para a viga uniforme mostrada, determinar a reação em *B*.

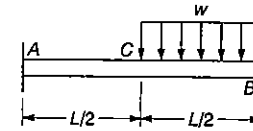


Fig. P8.130

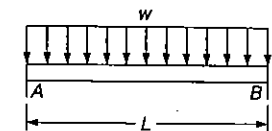


Fig. P8.131

8.132 A viga *AC* repousa sobre a viga *DE*, como mostrado. Sabendo-se que um perfil laminado de aço $W200 \times 19,3$ é usado para cada uma das vigas, determinar, para o carregamento indicado, a deflexão no ponto *B*. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.133 A viga *BD* repousa sobre a viga em balanço *AE*, como mostrado. Sabendo-se que uma barra quadrada de lado 20 mm é usada para cada uma das vigas, determinar a deflexão, para o carregamento indicado, no: (a) ponto *C*; (b) ponto *E*. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

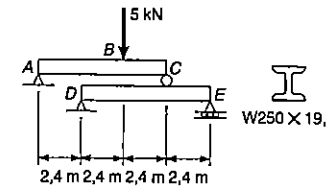


Fig. P8.132

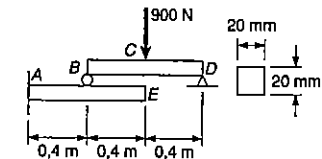


Fig. P8.133

8.134 A viga *CE* repousa sobre a viga *AB*, como mostrado. Sabendo-se que um perfil laminado de aço $W250 \times 49,1$ é usado em cada uma das vigas, determinar a deflexão no ponto *D*, para o carregamento mostrado. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.135 A viga *DE* repousa sobre a viga em balanço *AC*, como mostrado. Sabendo-se que uma barra quadrada de lado 10 mm é usada em cada uma das vigas, determinar a deflexão na extremidade *C*, se um momento de $25 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado na: (a) extremidade *E* da viga *DE*; (b) extremidade *C* da viga *AC*. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

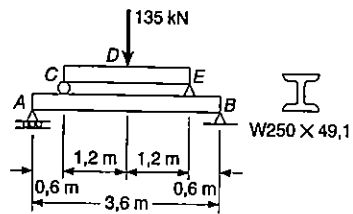


Fig. P8.134

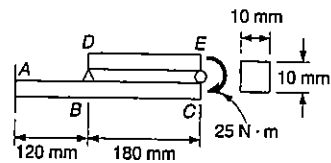


Fig. P8.135

8.136 Para o carregamento mostrado, sabendo-se que as vigas AB e DE tem a mesma rigidez flexional, determinar a reação: (a) em A; (b) em D.

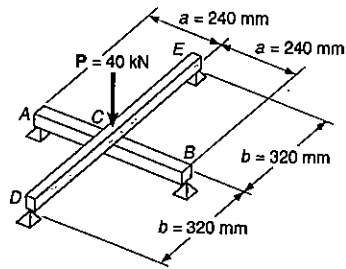


Fig. P8.136

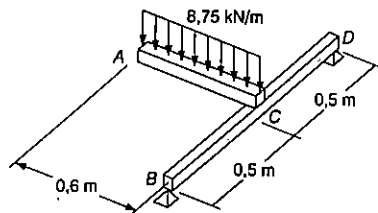


Fig. P8.137

8.137 Para o carregamento mostrado, sabendo-se que as vigas AC e BD têm a mesma rigidez flexional, determinar a reação em B.

8.138 Antes de qualquer carregamento ser aplicado, existe uma abertura $\delta_0 = 20$ mm entre a viga de perfil laminado de aço W410 x 60 e o apoio C. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar a reação em cada um dos apoios, devido a uma carga uniformemente distribuída de 24 kN/m.

8.139 Antes do carregamento uniformemente distribuído ser aplicado, uma abertura δ_0 existe entre a viga de perfil laminado de aço W410 x 60 e apoio C. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar o tamanho da abertura, para que cada uma das reações seja igual a um terço da carga total aplicada.

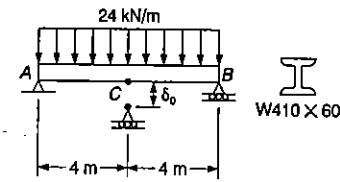


Fig. P8.138 e P8.139

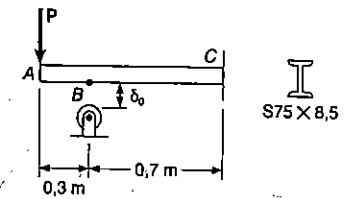


Fig. P8.140 e P8.141

8.140 Antes da carga P ser aplicada, uma abertura $\delta_0 = 6,35$ mm existe entre a viga de perfil laminado de aço S75 x 8,5 e o apoio B. Sabendo-se que $E = 200$ GPa e $P = 11120$ N, determinar: (a) a reação em B; (b) a deflexão em A.

8.141 Antes da carga P ser aplicada, uma abertura $\delta_0 = 6,35$ mm existe entre a viga de perfil laminado de aço S75 x 8,5 e o apoio B. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar a intensidade de P para que a deflexão em A seja de 20 mm.

8.142 Uma barra de diâmetro 16 mm foi encurvada da forma como mostrado. Determinar a deflexão da extremidade C, devida a aplicação de uma força P de 200 N. Usar $E = 200$ GPa e $G = 80$ GPa.

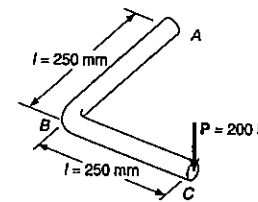


Fig. P8.142

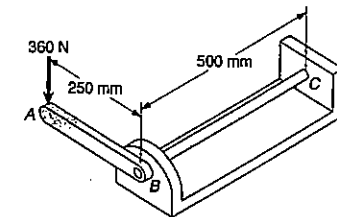


Fig. P8.143

8.143 Uma barra BC de diâmetro 20 mm é firmemente fixada à alavanca AB e ao apoio C. A alavanca AB tem uma seção transversal uniforme de 9,5 mm de espessura por 25 mm de largura. Para o carregamento mostrado, determinar a deflexão no ponto A. Usar $E = 200$ GPa e $G = 80$ GPa.

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado para a determinação, por integração, de declividade e deflexões em vigas prismáticas submetidas a carregamentos transversais. Especial atenção foi dada para o cálculo da *máxima deflexão* em uma viga sujeita a um determinado carregamento.

Deformação em uma viga sujeita a carregamento transversal

Notamos na Sec. 8.2 que a Eq. (4.21), da Sec. 4.5, que relaciona a curvatura $1/\rho$ da superfície neutra com o momento flexor M , em uma viga prismática em flexão pura, pode ser aplicada para uma viga submetida a um carregamento transversal. No entanto, M , assim como $1/\rho$, variam de seção para seção. Denotando por x a distância da extremidade esquerda da viga, escrevemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.1)$$

Esta equação nos habilita a determinar o raio de curvatura da superfície neutra, para qualquer valor de x e, a observar algumas conclusões gerais relativamente à forma da viga deformada.

Linha elástica

Na Sec. 8.3, discutimos como obter uma relação entre deflexão y de uma viga, medida em um dado ponto Q , e a distância x desse ponto a alguma origem fixa (Fig. 8.6b). Tal relação define a *linha elástica* de uma viga. Expressando a curvatura $1/\rho$ em termos das derivadas da função $y(x)$, e substituindo em (8.1), obtemos a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.4)$$

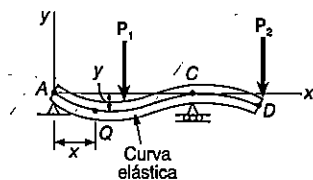


Fig. 8.6b

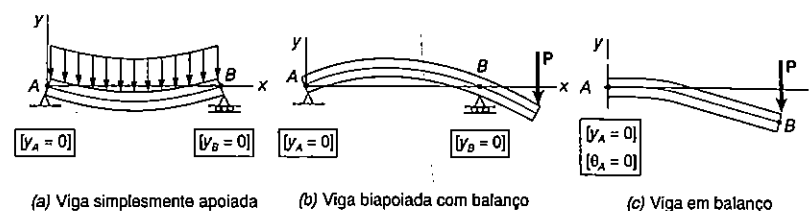


Fig. 8.8 Condições de contorno para vigas estaticamente determinadas.

Integrando esta equação duas vezes, obtemos as seguintes expressões que definem a declividade de $\theta(x) = dy/dx$ e a deflexão $y(x)$, respectivamente:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (8.5)$$

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2 \quad (8.6)$$

Condições de contorno

O produto EI é conhecido como a *rigidez flexional* da viga; C_1 e C_2 são duas constantes de integração, que podem ser determinadas pelas *condições de contorno* impostas à viga pelos apoios (Fig. 8.8) [Exemplo 8.1]. O correspondente valor de y para que a deflexão seja *máxima*, pode ser obtido pela determinação do valor de x , que corresponde a declividade nula [Exemplo 8.2; Prob. Resolvido 8.1].

Linha elástica definida por diferentes funções

Quando o carregamento é tal que diferentes funções analíticas são necessárias para representar o momento fletor nas várias porções da viga, então diferentes equações diferenciais também são necessárias, conduzindo a diferentes funções representativas da declividade $\theta(x)$ nas várias porções da viga. No caso da viga e o carregamento considerado no Exemplo 8.3 (Fig. 8.19), duas equações diferenciais são necessárias, uma para a porção da viga AD e a outra para a porção DB . A primeira equação produziu as funções θ_1 e y_1 , e a segunda as funções θ_2 e y_2 . Ao todo, quatro constantes de integração tiveram de ser determinadas; duas foram obtidas escrevendo que as deflexões em A e B eram nulas, e as outras duas, por expressar que ambas as porções da viga AD e DB tinham a mesma declividade e a mesma deflexão, em D .

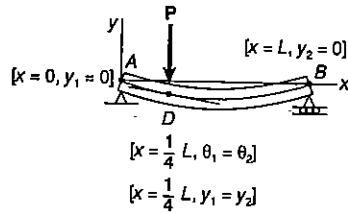


Fig. 8.19

Determinação direta de y por w

Observamos na Sec. 8.4 que no caso de uma viga suportando uma carga distribuída $w(x)$, a linha elástica pode ser determinada diretamente de $w(x)$, através de quatro integrações sucessivas, produzindo V, M, θ e y , nesta ordem. Para a viga em balanço da Fig. 8.20a e a viga simplesmente apoiada da Fig. 8.20b, as quatro constantes de integração resultantes podem ser determinadas das quatro condições de contorno indicadas em cada uma das partes da figura (Exemplo 8.4; Prob. Resolvido 8.2).

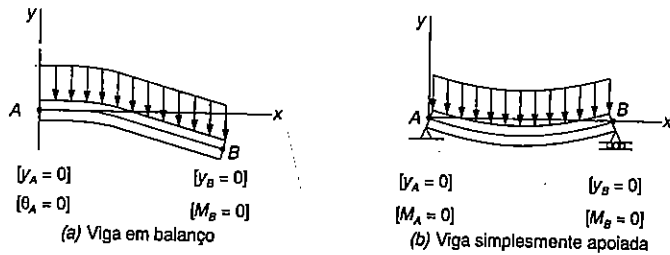


Fig. 8.20 Condições de contorno para vigas carregadas com uma carga distribuída.

Vigas estaticamente indeterminadas

Na Sec. 8.5, discutimos as vigas *estaticamente indeterminadas*, isto é, vigas apoiadas de maneira que as reações nos apoios envolvem quatro ou mais incógnitas. Como somente três equações de equilíbrio são disponíveis para determinar essas incógnitas, as equações de equilíbrio tiveram que ser suplementadas por equações obtidas das condições de contorno impostas pelos apoios. No caso da viga da Fig. 8.23, notamos que as reações nos apoios envolvem quatro incógnitas, ou seja, M_A, A_x, A_y e B . A viga então é dita *estaticamente indeterminada, com um grau de indeterminação* (ou com um grau de hiperestaticidade). Se existem cinco incógnitas, a viga é *estaticamente indeterminada, com dois graus de indeterminação* e assim por diante.

Expressando o momento fletor $M(x)$, em termos de quatro incógnitas, e integrando duas vezes [Exemplo 8.5], nós determinamos a declividade $\theta(x)$ e a deflexão $y(x)$, em termos das mesmas incógnitas e das constantes de integração C_1 e C_2 . As seis incógnitas envolvidas neste cálculo são obtidas pela solução simultânea de três equações de equilíbrio, para o diagrama de corpo livre da Fig. 8.23b, e mais as três equações expressando que: $\theta = 0, y = 0$ para $x = 0$ e $y = 0$ para $x = L$ (Fig. 8.24 [ver também Prob. Resolvido 8.3]).

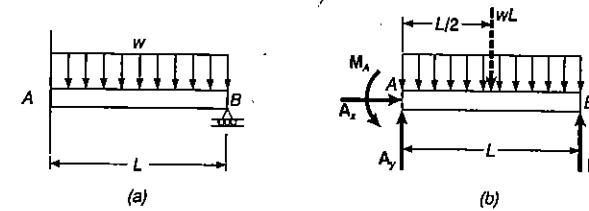


Fig. 8.23

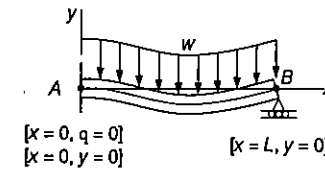


Fig. 8.24

Uso das funções singulares

O método da integração fornece um meio eficaz para a determinação da declividade e da deflexão, em qualquer ponto de uma viga prismática, contanto que o momento fletor M possa ser representado por uma função analítica simples. Entretanto, quando várias funções são necessárias para representar M ao longo do comprimento total da viga, este método pode tornar-se muito trabalhoso, pois requer que sejam igualadas as declividades e as deflexões em todos os pontos de transição. Vimos na Sec. 8.6 que o uso das *funções singulares* (previamente introduzido na Sec. 7.5) simplifica consideravelmente a determinação de θ e y , em qualquer ponto da viga. Considerando novamente a viga do Exemplo 8.3 (Fig. 8.16) e desenhando seu diagrama de corpo livre (Fig. 8.27), nós expressamos a força cortante em qualquer ponto da viga como

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P(x - \frac{1}{4})^0$$

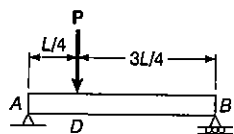


Fig. 8.16

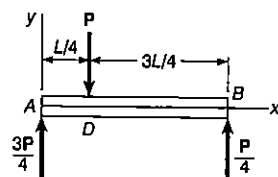


Fig. 8.27

onde a função degrau $\langle x - \frac{1}{4}L \rangle^0$ é igual a zero, quando a quantidade inserida dentro das chaves $\langle \rangle$ for negativa e igual a zero, no caso contrário. Integrando-se três vezes, obtemos sucessivamente:

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P \langle x - \frac{1}{4}L \rangle \quad (8.44)$$

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P \langle x - \frac{1}{4}L \rangle^2 + C_1 \quad (8.46)$$

$$EI y = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P \langle x - \frac{1}{4}L \rangle^3 + C_1x + C_2 \quad (8.47)$$

onde as chaves $\langle \rangle$ podem ser substituídas por zero, quando a quantidade inserida for negativa, e por parênteses usuais, no caso contrário. As constantes C_1 e C_2 foram determinadas pelas condições de contorno mostradas na Fig. 8.28 (Exemplo 8.6; Probs. Resolvidos 8.4, 8.5 e 8.6).

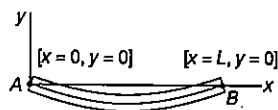


Fig. 8.28

Método da superposição

A última parte do capítulo foi voltada para o método da superposição, que consiste na determinação em separado, e depois adicionado, da declividade e da deflexão, devidas a aplicação de várias cargas aplicadas a uma viga [Sec. 8.7]. Este procedimento pode ser facilitado com o uso da tabela do Apêndice D, que fornece as declividades e as deflexões nas vigas, para vários carregamentos e tipos de apoios [Exemplo 8.7; Prob. Resolvido 8.7].

Vigas estaticamente indeterminadas por superposição

O método da superposição pode ser usado eficazmente em vigas estaticamente indeterminadas [Sec. 8.8]. No caso da viga do Exemplo 8.8 (Fig. 8.33), que envolve quatro reações incógnitas e é então indeterminada de primeiro grau, a reação em B foi considerada como redundante e a viga foi liberada desse apoio. Tratando a reação R_B como uma carga incógnita e considerando separadamente as deflexões causadas em B, pela carga distribuída indicada e pela reação R_B , então escrevemos que a soma dessas deflexões é zero (Fig. 8.34). A equação obtida foi resolvida para R_B [ver também Prob. Resolvido 8.8]. No caso de uma viga indeterminada de segundo grau, isto é, com reações de apoio envolvendo cinco incógnitas, duas reações devem ser consideradas como redundantes e os correspondentes apoios devem ser eliminados ou devidamente modificados [Prob. Resolvido 8.9].

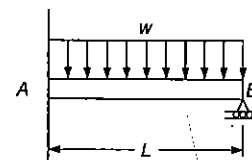


Fig. 8.33

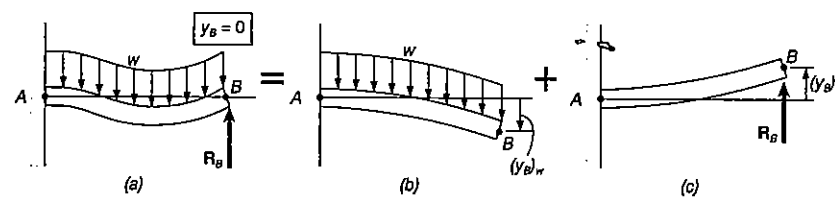


Fig. 8.34

PROBLEMAS DE REVISÃO

8.144 A viga uniforme *ABC* suporta uma carga vertical de 40 kN aplicada no ponto *C*, como mostrado. Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a declividade em *C*; (b) a deflexão em *C*.

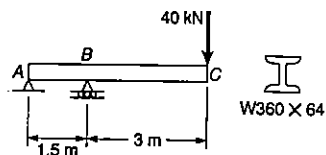


Fig. P8.144

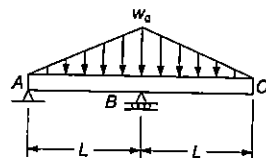


Fig. P8.145

8.145 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em *A*; (b) a declividade em *B*; (c) a deflexão em *C*.

8.146 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a deflexão: (a) no ponto médio *C* do vão *AB*; (b) na extremidade *D*. Usar $E = 200$ GPa.

8.147 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão do vão *AB*. Usar $E = 200$ GPa.

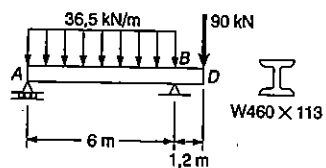


Fig. P8.146 e Fig. P8.147

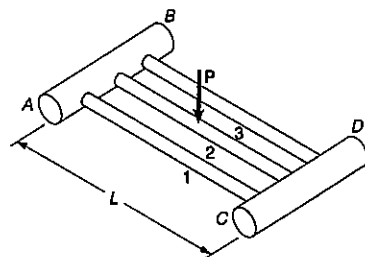


Fig. P8.148

8.148 Três barras idênticas, cada uma com comprimento L e rigidez flexional EI , são soldadas a dois cilindros *AB* e *CD*, como mostrado. Desprezando a deformação dos cilindros, determinar a deflexão no ponto médio de cada barra, devido a carga P aplicada no ponto médio da barra.

8.149 Para uma viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão no ponto *B*. Usar $E = 200$ GPa.

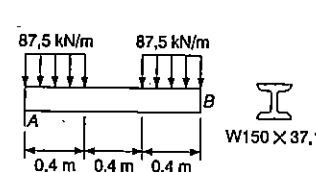


Fig. P8.149

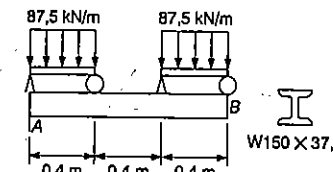


Fig. P8.150

8.150 As cargas distribuídas mostradas são suportadas por pequenas vigas, que descansam sobre a viga em balanço *AB*. Usando $E = 200$ GPa, determinar a declividade e a deflexão no ponto *B* da viga em balanço.

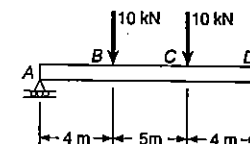


Fig. P8.151

8.151 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em *A*; (b) a reação em *D*.

8.152 Antes da força P ser aplicada, existe uma abertura $\delta_0 = 1,9$ mm entre as extremidades das barras em balanço *AB* e *CDE*. Sabendo-se que $E = 200$ GPa e $P = 3,6$ kN, determinar: (a) a reação em *A*; (b) a reação em *E*.

8.153 Antes da força P ser aplicada, existe uma abertura $\delta_0 = 1,9$ mm entre as extremidades das barras em balanço *AB* e *CDE*. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, encontrar a intensidade da força P para que a deflexão do ponto *B* seja 0,6 mm.

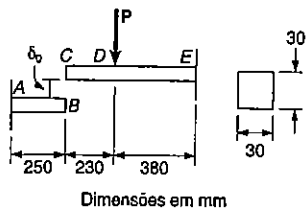


Fig. P8.152 e P8.153

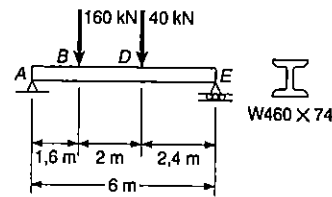


Fig. P8.154 e P8.155

8.154 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a declividade e a deflexão em B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.155 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

Os problemas que se seguem são para serem resolvidos com auxílio de um computador.

8.C1 Várias cargas uniformemente distribuídas e várias cargas concentradas podem ser aplicadas na viga em balanço AB. Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular a declividade e a deflexão da viga, desde $x = 0$ até $x = L$, em intervalos ΔL . Usar este programa para determinar, em intervalos de 100 mm, a declividade e a deflexão para a viga e o carregamento do: (a) Prob. 8.149; (b) Prob. 8.150. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

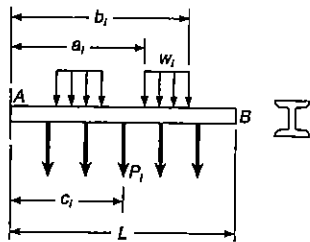


Fig. P8.C1

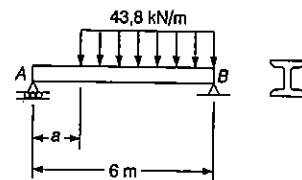


Fig. P8.C2

8.C2 A viga AB de 6 m de comprimento, consiste em um perfil laminado de aço W460 x 74 e suporta uma carga distribuída de 43,8 kN/m, como mostrado. Escreva um programa de computador e use-o para calcular os valores de a desde 0 até 6 m, em intervalos de 0,3 m para: (a) a declividade e a deflexão em D; (b) a localização e a intensidade da máxima deflexão. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

8.C3 A viga apoiada AB tem rigidez flexional constante EI e suporta várias cargas concentradas, como mostrado. Escreva um programa de computador que possa ser usado para calcular a declividade e a deflexão em pontos tomados ao longo da viga, desde $x = 0$ até $x = L$, em intervalos ΔL e aplique este programa para a viga e o carregamento do: (a) Prob. 8.19, com $\Delta L = 150 \text{ mm}$; (b) Prob. 8.20, com $\Delta L = 0,125 \text{ mm}$; (c) Prob. 8.121, com $\Delta L = 0,5 \text{ mm}$.

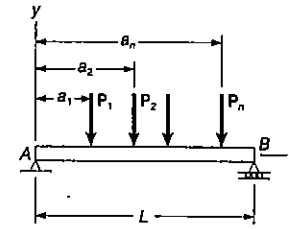


Fig. P8.C3

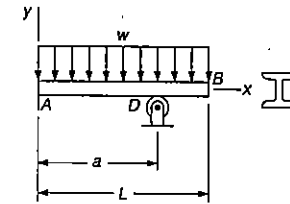


Fig. P8.C4

8.C4 Os suportes da viga AB consistem em um engastamento na extremidade A e um apoio móvel localizado no ponto D. Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular a declividade e a deflexão na extremidade livre da viga para valores de a , desde 0 até L, em intervalos ΔL . Usar este programa para calcular os valores de θ_B e y_B para cada um dos seguintes casos:

	L	ΔL	w	E	Perfil
(a)	3 m	0,3 m	22 kN/m	200 GPa	W200 x 46,1
(b)	4 m	0,5 m	20 kN/m	200 GPa	W250 x 58

Capítulo 9

DEFLEXÃO DAS VIGAS PELO MÉTODO DOS MOMENTOS DE ÁREA

*9.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, usamos um método matemático, baseado na integração da equação diferencial, para determinar a deflexão e a declividade, em qualquer ponto de uma viga. O momento fletor foi expresso como uma função $M(x)$, sendo a distância x medida ao longo da viga, e duas sucessivas integrações conduziam às funções $\theta(x)$ e $y(x)$, representando, respectivamente, a declividade e a deflexão em qualquer ponto da viga.

Neste capítulo, iremos usar algumas propriedades geométricas da linha elástica para determinar a deflexão e a declividade de uma viga, em um dado ponto. Ao invés da expressão do momento fletor, como uma função $M(x)$, e integrando analiticamente esta função, nós desenharemos o diagrama representativo da variação de M/EI , sobre o comprimento da viga (Sec. 9.2). Daí, serão derivados os dois teoremas do método dos momentos de área. O primeiro teorema do método dos momentos de área, nos habilitará para o cálculo do ângulo entre as tangentes a dois pontos da viga; o segundo teorema do método dos momentos de área será usado para calcular a distância vertical, desde um ponto sobre a viga até a tangente pelo segundo ponto.

Na Sec. 9.3, os teoremas do método dos momentos de área serão usados para determinar a declividade e a deflexão, em pontos selecionados de vigas em balanço e em vigas com carregamentos simétricos. Na Sec. 9.4 iremos verificar que, em muitos casos, as áreas e momentos de áreas, definidos pelo diagrama M/EI , podem ser mais facilmente determinados, se nós desenharmos o diagrama de momento fletor por partes. Uma vez estudado o método dos momentos de área, iremos observar que este método é particularmente eficaz no caso de vigas de seção transversal variável.

As vigas com carregamentos assimétricos e vigas suspensas serão consideradas na Sec. 9.5. Desde que, para um carregamento assimétrico a máxima deflexão não ocorre necessariamente no centro de uma viga, iremos aprender na Sec. 9.6s como localizar o ponto, onde a tangente é horizontal para que se possa determinar a máxima deflexão. A Seção 9.7 será voltada para a solução dos problemas envolvendo vigas estaticamente indeterminadas.

*9.2 TEOREMAS RELATIVOS ÀS ÁREAS DO DIAGRAMA DE MOMENTOS

Consideremos a viga AB submetida a um carregamento arbitrário (Fig. 9.1a). Desenhemos o diagrama que representa a variação de grandeza M/EI ao longo do vão, obtido pela divisão do momento fletor M pela rigidez flexional EI (Fig. 9.1b). Se a rigidez flexional é constante para toda a viga, vemos que esse diagrama é igual ao diagrama de momentos flectores, exceto por uma diferença de escalas e ordenadas.

Recorrendo à Eq. 8.4 da Sec. 8.3, e lembrando que $dy/dx = \theta$, escrevemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

ou

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \tag{9.1}^1$$

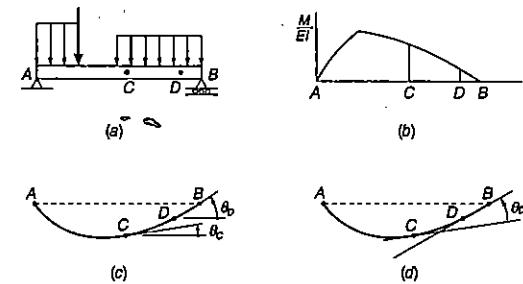


Fig. 9.1

1 Esta relação também pode ser deduzida sem que se recorra aos resultados da Sec. 8.3, se notarmos que o ângulo $d\theta$ formado por duas tangentes à linha elástica pelos pontos P e P' é também o ângulo formado pelas normais à linha elástica (Fig. 9.2). Assim,

$$d\theta = \frac{ds}{\rho}$$

onde ds é o comprimento do arco PP' e ρ é o raio de curvatura em P . Substituindo o valor $1/\rho$ da Eq. 4.21, e, como a declividade em P é muito pequena, considerando ds igual à distância horizontal dx entre P e P' , temos

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \tag{9.1}$$

Considerando dois pontos quaisquer de viga, C e D , e integrando os dois membros da Eq. 9.1 de C até D , obtemos

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$$

ou

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx \quad (9.2)$$

onde θ_C e θ_D são as declividades nos pontos C e D , respectivamente (Fig. 9.1c). Mas o segundo membro da Eq. 9.2 representa a área sob o diagrama de (M/EI) entre os pontos C e D , e o primeiro membro representa o ângulo formado pelas tangentes à linha elástica em C e D (Fig. 9.1d). Chamando esse ângulo de $\theta_{D/C}$, temos

$$\theta_{D/C} = \text{Área sob o diagrama de } (M/EI) \text{ entre } C \text{ e } D \quad (9.3)$$

Este é o primeiro teorema relativo à área do diagrama de momentos.

O ângulo $\theta_{D/C}$ e a área sob o diagrama de (M/EI) têm o mesmo sinal. Em outras palavras, a uma área positiva (localizada acima do eixo x) corresponde uma rotação no sentido anti-horário da tangente à linha elástica, quando se move de C para D . A uma área negativa corresponde uma rotação no sentido horário.

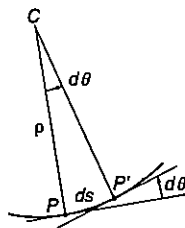


Fig. 9.2

Consideremos agora os pontos P e P' situados entre C e D e separados de uma distância dx (Fig. 9.3). As tangentes à linha elástica interceptam a vertical pelo ponto C em pontos que formam o comprimento dt . A declividade em P e o ângulo $d\theta$, formado pelas tangentes à linha elástica por P e P' , são valores muito pequenos, e podemos adotar que dt é igual ao arco de circunferência de raio x_1 subtendido pelo ângulo $d\theta$. Temos, desse modo,

$$dt = x_1 d\theta$$

ou, substituindo o valor de $d\theta$ da Eq. 9.1,

$$dt = x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (9.4)$$

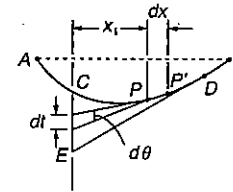


Fig. 9.3

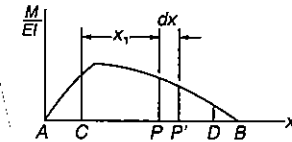


Fig. 9.4

Vamos agora integrar a Eq. 9.4 de C até D . Vemos que, enquanto o ponto P percorre a linha elástica de C a D , a tangente pelo ponto P varre a vertical traçada por C desde C até E . A integral do primeiro membro representa então: a distância, medida na vertical, do ponto C à tangente pelo ponto E . Essa distância, designada por $t_{C/D}$, é chamada *desvio tangencial de C em relação a D*. Temos, dessa forma,

$$t_{C/D} = \int_C^D x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (9.5)$$

Notemos agora que $(M/EI) dx$ representa um elemento de área sob o diagrama de (M/EI) e $x_1 \left(\frac{M}{EI}\right) dx$ representa o momento estático desse elemento de área em relação a um eixo vertical que passa por C (Fig. 9.4). Assim, o segundo membro da Eq. 9.5 é o momento estático em relação a esse eixo da área de diagrama (M/EI) situado entre C e D .

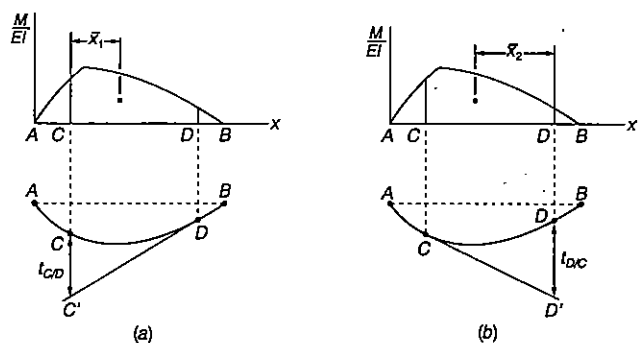


Fig. 9.5

Podemos agora estabelecer o segundo teorema relativo à área do diagrama de momentos: o desvio tangencial de C em relação a D, $t_{C/D}$, é igual ao momento estático da área limitada pelo diagrama (M/EI) entre os pontos C e D em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto C.

Recordando que o momento estático de uma área em relação a um eixo é igual ao produto da área pela distância do seu centróide até o eixo, podemos escrever o segundo teorema na forma

$$t_{C/D} = (\text{Área entre C e D}) \bar{x}_1 \tag{9.6}$$

onde a área se refere àquela limitada pelo diagrama (M/EI) e onde \bar{x}_1 é a distância do centróide da área até o eixo vertical que passa por C (Fig. 9.5a).

Devemos ter o cuidado de distinguir entre o desvio tangencial de C em relação a D, $t_{C/D}$, e o desvio tangencial de D em relação a C, designado por $t_{D/C}$. O desvio tangencial $t_{D/C}$ representará a distância vertical do ponto D à tangente à curva elástica traçada do ponto C, e é obtido pelo produto da área sob o diagrama de (M/EI) pela distância \bar{x}_2 do seu centróide até o eixo vertical que passa por D (Fig. 9.5b):

$$t_{D/C} = (\text{Área entre C e D}) \bar{x}_2 \tag{9.7}$$

Podemos notar que, se uma área limitada pelo diagrama de (M/EI) está situada acima do eixo x, seu momento estático em relação a um eixo vertical será positivo; se ela está situada abaixo do eixo x, seu momento estático será negativo. Podemos verificar na Fig. 9.5 que um ponto com desvio tangencial *positivo* fica situado *acima* da tangente correspondente, enquanto um ponto com desvio tangencial *negativo* ficaria situado *abaixo* da tangente correspondente.

*9.3 APLICAÇÃO A VIGAS EM BALANÇO E A VIGAS COM CARREGAMENTO SIMÉTRICO

O primeiro teorema relativo à área do diagrama de momentos reduzido na seção anterior define o ângulo $t_{D/C}$ entre as tangentes em dois pontos C e D da linha elástica. Assim, o ângulo θ_D que a tangente forma pelo ponto D com a horizontal, quer dizer, a declividade no ponto D, pode ser obtido somente se a declividade em C for conhecida. Do mesmo modo, o segundo teorema relativo à área do diagrama de momentos define a distância entre um ponto da linha elástica e a tangente traçada por outro ponto. O desvio tangencial $t_{D/C}$ nos dará a posição do ponto D somente se conhecermos a tangente pelo ponto C. Concluímos então que os dois teoremas só poderão ser aplicados efetivamente na determinação de declividade e flechas se uma *tangente de referência* à linha elástica for estipulada inicialmente.

No caso de uma viga em balanço (Fig. 9.6), a tangente à linha elástica na extremidade engastada A é conhecida e pode ser usada como tangente de referência. Como $\theta_A = 0$, a declividade da viga em qualquer ponto D é $\theta_D = \theta_{D/A}$, podendo ser obtido pelo primeiro teorema. Por outro lado, a flecha y_D no ponto D é igual ao desvio tangencial $t_{D/A}$ medido da tangente de referência horizontal em A, podendo ser obtido pelo segundo teorema.

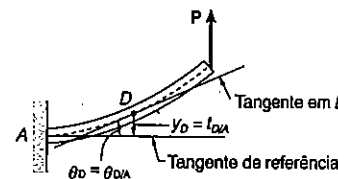


Fig. 9.6

No caso de uma viga AB simplesmente apoiada, que tenha carregamento simétrico (Fig. 9.7a) a tangente à linha elástica no ponto médio C , por razões de simetria, deve ser horizontal. Essa tangente será escolhida como tangente de referência (Fig. 9.7b). Como $\theta_C = 0$, a declividade da linha elástica no apoio B é $\theta_B = \theta_{B/C}$, podendo ser obtida pelo primeiro teorema. Temos ainda que $|y|_{\text{máx}}$ é igual ao desvio tangencial $t_{B/C}$, e pode, dessa forma, ser obtido pelo segundo momento. Para qualquer outro ponto D da viga, calculamos a declividade de maneira semelhante (Fig. 9.7c), e a flecha em D pode ser expressa por $y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$.

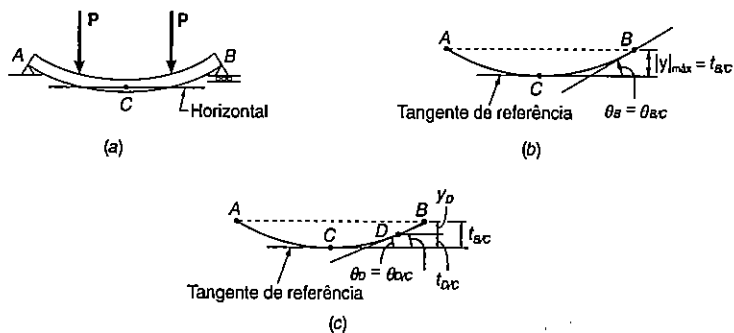


Fig. 9.7

EXEMPLO 9.1

Determinar a declividade e a flecha na extremidade B da viga prismática em balanço AB , quando atua o carregamento indicado na Fig. 9.8. Sabe-se que a rigidez flexional da viga tem valor $EI = 10 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$.

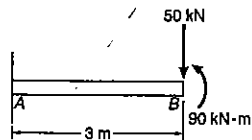


Fig. ex.9.8

Desenhamos inicialmente o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.9a). Efetuando a soma de forças verticais e de momentos em relação ao ponto A , obtemos as reações no engastamento A , que consistem da força vertical $R_A = 50 \text{ kN}$, dirigida de baixo para cima, e do conjugado $M_A = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$, no sentido anti-horário.

Em seguida, desenhamos o diagrama de momentos fletores (Fig. 9.9b), determinando a distância x_D do apoio até o ponto D onde o momento é nulo, por semelhança de triângulos:

$$\frac{x_D}{60} = \frac{3 - x_D}{90} = \frac{3}{150} \quad x_D = 1,2 \text{ m}$$

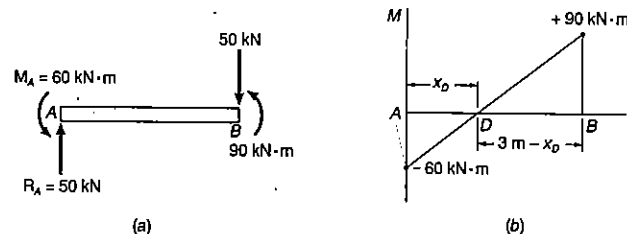


Fig. ex.9.9

Dividimos os valores de M pela rigidez flexional EI , e desenhamos o diagrama de (M/EI) na Fig. 9.10, calculando as áreas correspondentes aos trechos AD e DB , adotando como positiva a área situada acima do eixo x e negativa a área abaixo desse eixo.

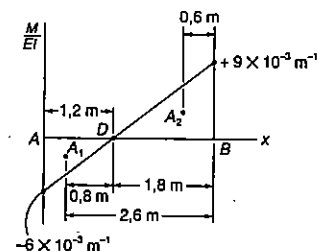


Fig. ex.9.10

Usando o primeiro teorema, escrevemos

$$\begin{aligned}\theta_{B/A} &= \theta_B - \theta_A = \text{Área de } A \text{ a } B = \\ &= A_1 + A_2 = -\frac{1}{2}(1,2 \text{ m})(6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1,8 \text{ m})(9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}) \\ &= -3,6 \times 10^{-3} + 8,1 \times 10^{-3} \\ &= +4,5 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

e, sendo $\theta_A = 0$,

$$\theta_B = +4,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Usando agora o segundo teorema, podemos igualar o desvio tangencial $t_{B/A}$ ao momento estático da área total entre A e B em relação ao eixo vertical que passa por B . O momento de cada área parcial é o produto dessa área pela distância do seu centróide até o eixo em B . Temos,

$$\begin{aligned}t_{B/A} &= A_1(2,6 \text{ m}) + A_2(0,6 \text{ m}) \\ &= (-3,6 \times 10^{-3})(2,6 \text{ m}) + (8,1 \times 10^{-3})(0,6 \text{ m}) \\ &= -9,36 \text{ mm} + 4,86 \text{ mm} = -4,50 \text{ mm}\end{aligned}$$

Como a tangente de referência em A é horizontal, a flecha em B é igual a $t_{B/A}$, e temos

$$y_B = t_{B/A} = -4,50 \text{ mm}$$

A viga deformada foi esboçada na Fig. 9.11.

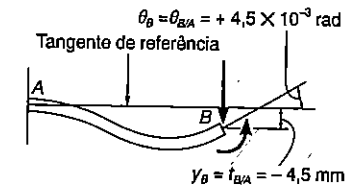


Fig. ex.9.11

*9.4 SUPERPOSIÇÃO DOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLETORES

Em muitas aplicações, a determinação do ângulo $\theta_{D/C}$ e do desvio tangencial $t_{D/C}$ pode ser simplificado se considerarmos o efeito de cada carregamento separadamente. Desenhemos um diagrama (M/EI) para cada carregamento e somamos algebricamente as áreas limitadas pelos vários diagramas, obtendo o ângulo $\theta_{D/C}$. Do mesmo modo, somando os momentos estáticos dessas áreas em relação a um eixo vertical que passa por D , vamos obter o desvio tangencial $t_{D/C}$. O diagrama de momentos fletores ou o diagrama de (M/EI) é obtido por *superposição*.

Quando um diagrama de momentos ou de (M/EI) é obtido por superposição, as várias partes que o compõem consistem em formas geométricas simples, como retângulos, triângulos e áreas limitadas por parábolas. Para facilidade de cálculo, a Fig. 9.12 indica o valor das áreas e as posições do centróide dessas formas geométricas.

Forma		Área	c
Retangular		bh	$\frac{b}{2}$
Triangular		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
Parabólico		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
Parábola Cúbica		$\frac{bh}{4}$	$\frac{b}{5}$
Parábola de grau n		$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{b}{n+2}$

Fig. 9.12 Áreas e centróides de formas comuns de diagramas.

EXEMPLO 9.2

Determinar a declividade e a flecha na extremidade B da viga do Ex. 9.1, por superposição do diagrama de momentos, substituindo o carregamento dado por dois carregamentos equivalentes (Fig. 9.13), desenhando os diagramas de momento fletor e de (M/EI) da direita para a esquerda, iniciando pela extremidade livre B.

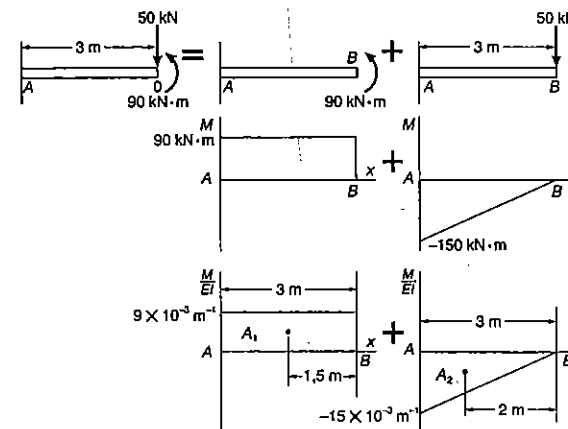


Fig. ex.9.13

Aplicando o primeiro teorema e lembrando que $\theta_A = 0$, escrevemos

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_{B/A} = A_1 + A_2 \\ &= (9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1})(3 \text{ m}) - \frac{1}{2}(15 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1})(3 \text{ m}) \\ &= 27 \times 10^{-3} - 22,5 \times 10^{-3} = 4,5 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Aplicando agora o segundo teorema, calculamos o momento estático de cada área em relação a um eixo vertical que passa por B, obtendo

$$\begin{aligned} y_B &= t_{B/A} = A_1(1,5 \text{ m}) + A_2(2 \text{ m}) \\ &= (27 \times 10^{-3})(1,5 \text{ m}) - (22,5 \times 10^{-3})(2 \text{ m}) \\ &= 40,5 \text{ mm} - 45 \text{ mm} = -4,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

É conveniente, na prática, agrupar-se as duas partes do diagrama de (M/EI) em um único desenho (Fig. 9.14).

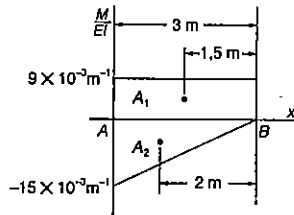


Fig. ex.9.14

EXEMPLO 9.3

Determinar a declividade em um dos apoios e a flecha máxima da viga prismática AB, com o carregamento indicado na Fig. 9.15.

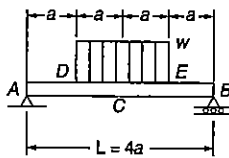


Fig. ex.9.15

Inicialmente, fazemos um esboço da viga deformada (Fig. 9.16). Como a tangente à viga no ponto médio C é horizontal, ela vai ser adotada como tangente de referência, e teremos $y_{máx} = t_{A/C}$ por outro lado, sendo $\theta_C = 0$, podemos escrever

$$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A \quad \text{ou} \quad \theta_A = -\theta_{C/A}$$

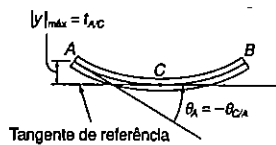


Fig. ex.9.16

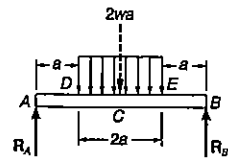


Fig. ex.9.17

No diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.17), vemos que

$$R_A = R_B = wa$$

A seguir, desenhamos os diagramas de momento fletor e de força cortante do trecho AC da viga. Obtemos esses diagramas por superposição, considerando separadamente os efeitos da reação de apoio R_A e da carga distribuída. Por conveniência, os diagramas dos dois carregamentos foram desenhados juntos (Fig. 9.18).

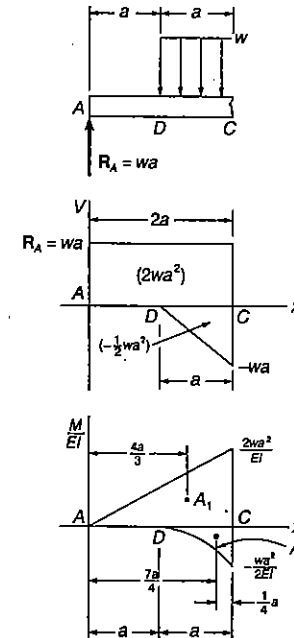


Fig. ex.9.18

Da Sec. 7.4 sabemos que os diagramas de força cortante e de momento fletor, para carga uniformemente distribuída, são linear e parabólico, respectivamente. As áreas desses diagramas e a localização de seus centróides são dados na Fig. 9.12.

As áreas são:

$$A_1 = \frac{1}{2} (2a) \left(\frac{2wa^2}{EI} \right) = \frac{2wa^3}{EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{3} (a) \left(\frac{wa^2}{2EI} \right) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Aplicando o primeiro teorema, escrevemos

$$\theta_{C/A} = A_1 + A_2 = \frac{2wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{11wa^3}{6EI}$$

Recorrendo às Figs. 9.15 e 9.16 vemos que $a = \frac{1}{4}L$ e $\theta_A = -\theta_{C/A}$, temos então:

$$\theta_A = \frac{11wa^3}{6EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

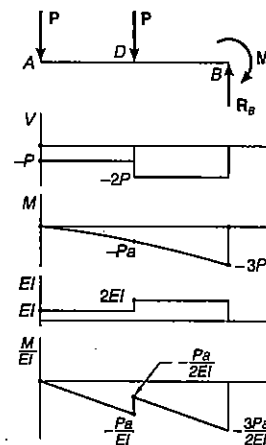
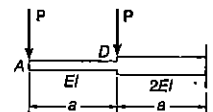
Aplicando agora o segundo teorema, encontramos

$$t_{A/C} = A_1 \frac{4a}{3} + A_2 \frac{7a}{4} = \left(\frac{2wa^3}{EI} \right) \frac{4a}{3} + \left(-\frac{wa^3}{6EI} \right) \frac{7a}{4} = \frac{19wa^4}{8EI}$$

$$|y|_{\text{máx}} = t_{A/C} = \frac{19wa^4}{8EI} = \frac{19wL^4}{2048EI}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.1

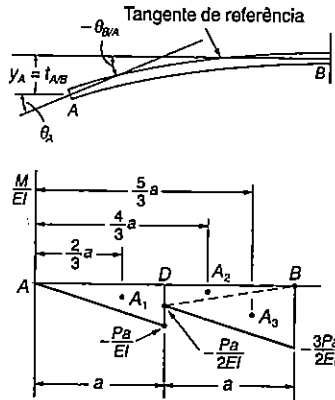
As barras prismáticas AD e DB são ligadas para formar a viga em balanço ADB. A rigidez flexional no trecho AD é EI e no trecho DB é 2EI. Calcular a declividade e a flecha na extremidade A.



Desenhamos inicialmente o diagrama de momento fletor, obtendo em seguida o diagrama de (M/EI) dividindo o valor de M em cada ponto da viga pelo valor da rigidez flexional correspondente.

Tangente de Referência. A tangente horizontal pelo ponto B é adotada como tangente de referência. Como $\theta_B = 0$ e $y_B = 0$, vemos que

$$\theta_A = -\theta_{B/A} \quad y_A = -t_{A/B}$$



Declividade no ponto A. Dividindo o diagrama de (M/EI) em três partes triangulares, temos

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{Pa}{2EI} a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \frac{3Pa}{2EI} a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$

Usando o primeiro teorema, obtemos

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \quad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI} \quad \blacktriangleleft$$

Flecha no ponto A. Usando o segundo teorema, encontramos

$$y_A = t_{A/B} = A_1 \left(\frac{2}{3} a \right) + A_2 \left(\frac{4}{3} a \right) + A_3 \left(\frac{5}{3} a \right)$$

$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI} \right) \frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI} \right) \frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI} \right) \frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \quad y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.2

Determinar, para a viga prismática com o carregamento indicado, a declividade e a flecha na extremidade E.

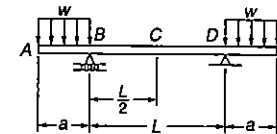
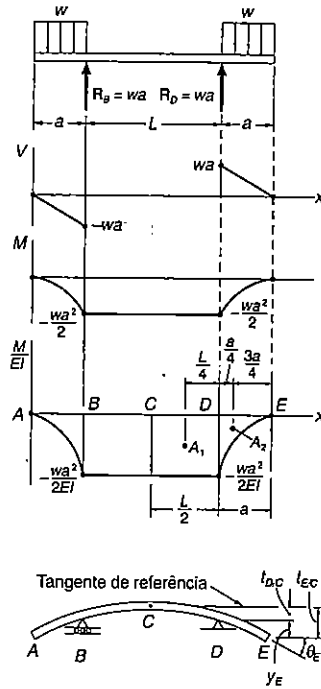


Diagrama (M/EI) . Tomando como corpo livre a própria viga, determinamos as reações dos apoios e desenhamos os diagramas de força cortante e de momento fletor. Dividimos os valores de M pelo valor constante EI , obtendo o diagrama de (M/EI) indicado.



Tangente de referência. A viga e seu carregamento são simétricos em relação ao ponto médio C, de modo que a tangente em C é horizontal e será usada como tangente de referência. Observamos no esboço da figura que, sendo $\theta_C = 0$,

$$\theta_E = \theta_C + \theta_{E/C} = \theta_{E/C} \quad (1)$$

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} \quad (2)$$

Declividade no ponto E. Recorrendo ao diagrama de (M/EI) e usando o primeiro teorema, escrevemos

$$A_1 = -\frac{wa^2}{2EI} \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{wa^2}{2EI} \right) (a) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Pela Eq. 1, temos

$$\theta_E = \theta_{E/C} = A_1 + A_2 = -\frac{wa^2L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_E = -\frac{wa^2}{12EI} (3L + 2a) \quad \theta_E = \frac{wa^2}{12EI} (3L + 2a) \quad \blacktriangleleft$$

Flecha no ponto E. Pelo segundo teorema, obtemos

$$t_{D/C} = A_1 \frac{L}{4} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI} \right) \frac{L}{4} = -\frac{wa^2L^2}{16EI}$$

$$\begin{aligned} t_{E/C} &= A_1 \left(a + \frac{L}{4} \right) + A_2 \left(\frac{3a}{4} \right) \\ &= \left(-\frac{wa^2L}{4EI} \right) \left(a + \frac{L}{4} \right) + \left(-\frac{wa^3}{6EI} \right) \left(\frac{3a}{4} \right) \\ &= -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^2L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI} \end{aligned}$$

Usando a Eq. 2, temos

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} = -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

$$y_E = -\frac{wa^3}{8EI} (2L + a) \quad y_E = \frac{wa^3}{8EI} (2L + a) \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

9.1 a 9.4 Para a viga uniforme em balanço, com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade da extremidade livre; (b) a deflexão da extremidade livre.

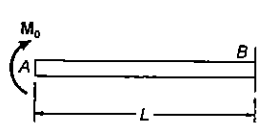


Fig. P9.1

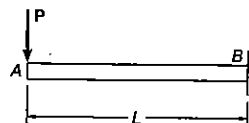


Fig. P9.2

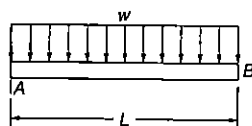


Fig. P9.3

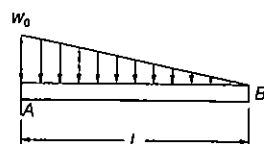


Fig. P9.4

9.5 a 9.8 Para a viga uniforme em balanço, com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade da extremidade livre; (b) a deflexão da extremidade livre.

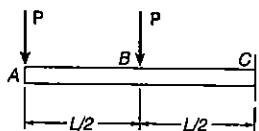


Fig. P9.5

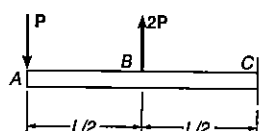


Fig. P9.6

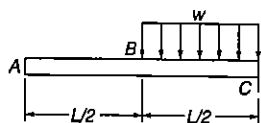


Fig. P9.7

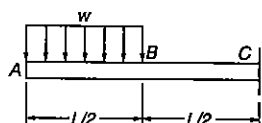


Fig. P9.8

9.9 A barra rígida BCD está soldada em B a uma viga uniforme em balanço AB. Determinar a declividade e a deflexão no ponto B, quando $a = L/4$.

9.10 A barra rígida BCD está soldada em B a uma viga uniforme em balanço AB. Determinar a declividade e a deflexão no ponto B, quando: (a) $a = L/2$; (b) $a = L/3$.

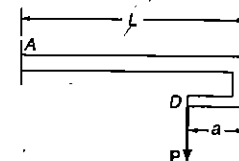


Fig. P9.9 e P9.10

9.11 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto C; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

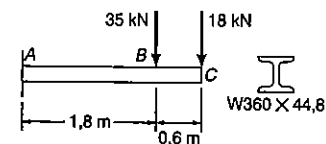


Fig. P9.11

9.12 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto A. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

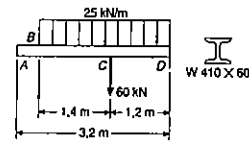


Fig. P9.12

9.13 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto A. Usar $E = 200$ GPa.

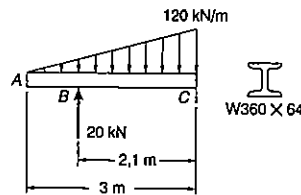


Fig. P9.13

9.14 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto B; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200$ GPa.

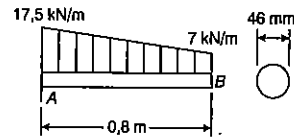


Fig. P9.14

9.15 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto C; (b) a deflexão no ponto C.

9.16 Para a viga em balanço com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto A.

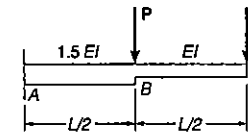


Fig. P9.15

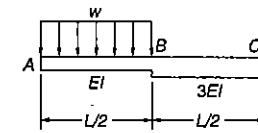


Fig. P9.16

9.17 Duas placas de cobertura são soldadas ao perfil laminado de aço ABC, como mostrado. Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto A.

9.18 Duas placas de cobertura são soldadas ao perfil laminado de aço ABC, como mostrado. Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a declividade na extremidade C; (b) a deflexão na extremidade C.

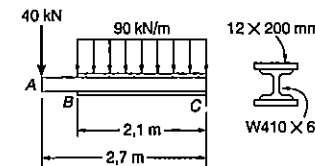


Fig. P9.17

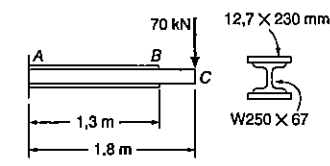


Fig. P9.18

9.19 Resolver o Prob. 9.18, assumindo que uma carga adicional de 70 kN é aplicada no ponto B da viga.

9.20 Resolver o Prob. 9.17, assumindo que uma carga distribuída de 90 kN/m é removida.

9.21 a 9.24 Para a viga prismática com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no centro C da viga.

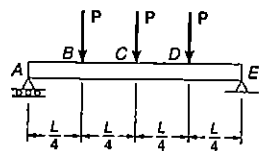


Fig. P9.21

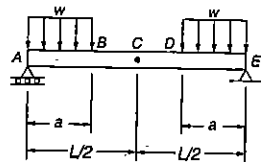


Fig. P9.22

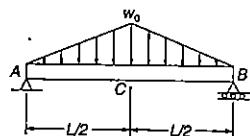


Fig. P9.23

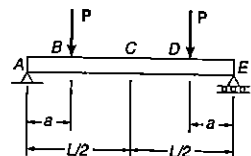


Fig. P9.24

9.25 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio da viga. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

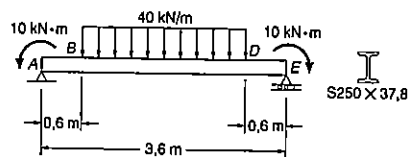


Fig. P9.25

9.26 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio da viga. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

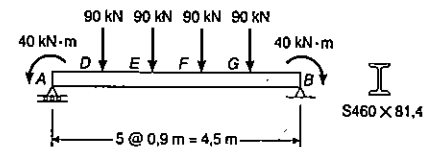


Fig. P9.26

9.27 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão na extremidade A; (c) a deflexão no ponto médio da viga. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

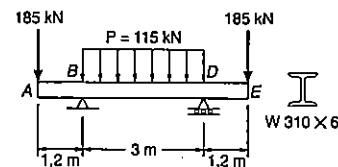


Fig. P9.27

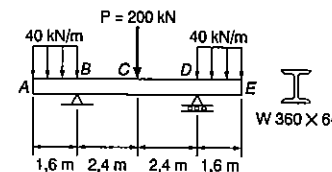


Fig. P9.28

9.28 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão na extremidade A; (c) a deflexão no ponto médio da viga. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

9.29 Para a viga com o carregamento do Prob. 9.28, determinar: (a) a carga P para que a deflexão seja zero no ponto médio C da viga; (b) a correspondente deflexão na extremidade A. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

*9.30 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) o valor de P para que a deflexão seja zero no ponto médio C da viga; (b) a variação dos valores de P , para que o valor absoluto da deflexão no ponto médio C da viga seja igual ou menor que 2,5 mm. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

*9.31 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) o valor de P para que a deflexão seja zero na extremidade A da viga; (b) a variação dos valores de P , para que o valor absoluto da deflexão na extremidade A da viga seja igual ou menor que 2,5 mm. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

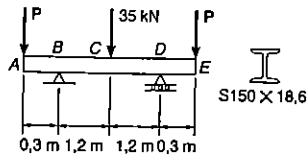


Fig. P9.30 e P9.31

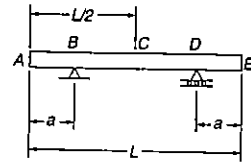


Fig. P9.32

*9.32 Uma barra uniforme AE está apoiada em dois pontos B e D . Determinar a distância a das extremidades da barra até os apoios, para que as deflexões em A , C e E sejam iguais e para baixo.

9.33 a 9.38 Para a viga prismática com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A ; (b) a deflexão no ponto D .

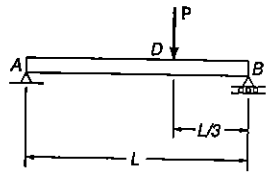


Fig. P9.33

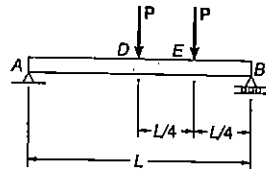


Fig. P9.34

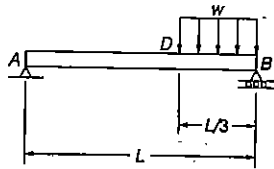


Fig. P9.35

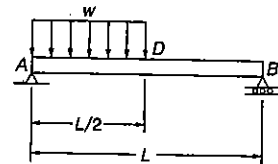


Fig. P9.36

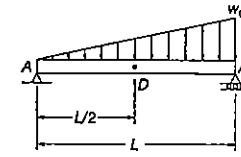


Fig. P9.37

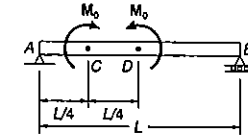


Fig. P9.38

9.39 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A ; (b) a deflexão no ponto C . Usar $E = 200$ GPa.

9.40 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade do ponto A ; (b) a deflexão do ponto E . Usar $E = 200$ GPa.

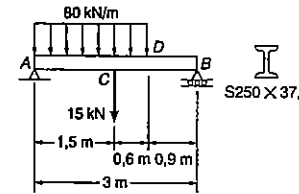


Fig. P9.39

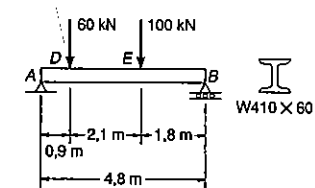


Fig. P9.40

9.41 e 9.42 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade do ponto A ; (b) a deflexão do ponto E . Usar $E = 200$ GPa.

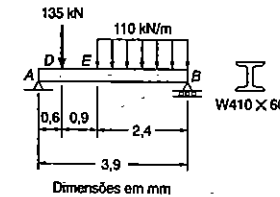


Fig. P9.41

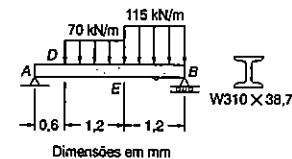


Fig. P9.42

*9.5 VIGAS COM CARREGAMENTO ASSIMÉTRICO

Na Sec. 9.3 vimos que, nas vigas simplesmente apoiadas com carregamento simétrico, a tangente à viga no ponto médio C é horizontal e pode ser usada como tangente de referência. Quando uma viga simplesmente apoiada, com ou sem balanços, suporta uma carga assimétrica, não podendo encontrar por simples inspeção da viga, a tangente é horizontal. Devemos buscar outros meios para adotar uma tangente de referência, isto é, uma tangente de declividade conhecida para ser utilizada na aplicação dos teoremas relativos à área do diagrama de momentos.

Usualmente, é mais prático adotar-se a tangente de referência em um dos apoios da viga. Consideremos, por exemplo, a tangente no apoio A da viga simplesmente apoiada AB (Fig. 9.19a). Podemos determinar sua declividade calculando o desvio tangencial $t_{B/A}$ do apoio B , em relação a A , e dividindo $t_{B/A}$ pelo vão L entre apoios.

Recordando que o desvio tangencial em um ponto situado acima da tangente é positivo, escrevemos

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} \quad (9.8)$$

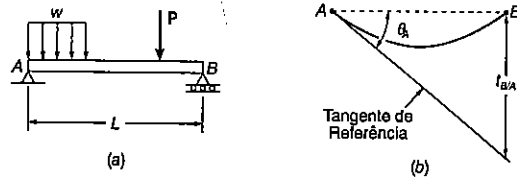


Fig. 9.19

Uma vez determinada a declividade da tangente de referência, a declividade θ_D de qualquer ponto D (Fig. 9.20) pode ser obtida usando-se o primeiro teorema para obter-se $\theta_{D/A}$, e calcular-se

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} \quad (9.9)$$

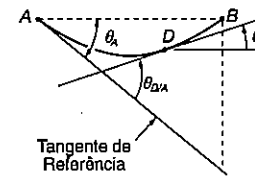


Fig. 9.20

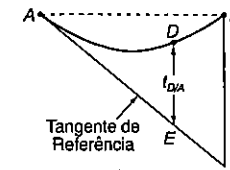


Fig. 9.21

O desvio tangencial $t_{D/A}$ de D em relação ao apoio A é obtido do segundo teorema relativo às áreas do diagrama de momentos.

Vemos que $t_{D/A}$ é igual ao segmento ED (Fig. 9.21) e representa a distância vertical de D até a tangente de referência. Por outro lado, a flecha y_D no ponto D representa a distância vertical de D até a linha horizontal AB (Fig. 9.22). Como y_D tem o mesmo comprimento do segmento FD , essa flecha pode ser expressa como a diferença entre EF e ED (Fig. 9.23). Os triângulos semelhantes AFE e ABH levam a

$$\frac{EF}{x} = \frac{HB}{L} \quad \text{ou} \quad EF = \frac{x}{L} t_{B/A}$$

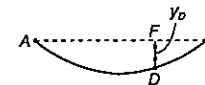


Fig. 9.22

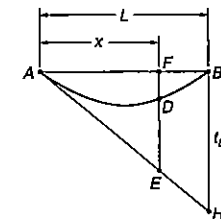


Fig. 9.23

e lembrando a convenção de sinais adotada para flechas e desvios tangenciais, escrevemos

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L} t_{B/A} \quad (9.10)$$

EXEMPLO 9.4

Calcular a declividade e a flecha no ponto *D* da viga com carregamento indicado.

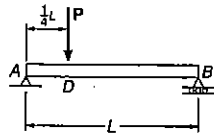


Fig. ex.9.24

Tangente de referência no apoio A. Calculamos as reações dos apoios e desenhamos o diagrama (*M/EI*) indicado na Fig. 9.25.

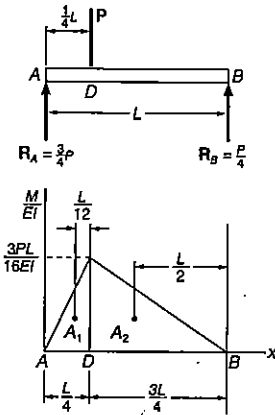


Fig. ex.9.25

Aplicando o segundo teorema, determinamos o desvio tangencial do apoio *B* em relação ao apoio *A*, através dos momentos estáticos das áreas *A*₁ e *A*₂ em relação a um eixo vertical que passa por *B*. Temos

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{3PL}{16EI} = \frac{3PL^2}{128EI} \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{3L}{4} \frac{3PL}{16EI} = \frac{9PL^2}{128EI}$$

$$t_{B/A} = A_1 \left(\frac{L}{12} + \frac{3L}{4} \right) + A_2 \left(\frac{L}{2} \right) \\ = \frac{3PL^2}{128EI} \frac{10L}{12} + \frac{9PL^2}{128EI} \frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{128EI}$$

A declividade da tangente de referência em *A* (Fig. 9.26) é

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\frac{7PL^2}{128EI}$$

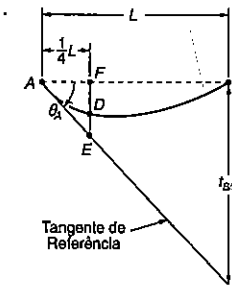


Fig. ex.9.26

Declividade em *D*. Aplicando o primeiro teorema de *A* até *D*, temos

$$\theta_{D/A} = A_1 = \frac{3PL^2}{128EI}$$

Assim, a declividade em *D* é

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} = -\frac{PL^2}{32EI}$$

Flecha no ponto *D*. Inicialmente, calculamos o momento estático da área *A*₁ em relação a um eixo vertical que passa por *D*, determinando o desvio tangencial $DE = t_{D/A}$.

$$DE = t_{D/A} = A_1 \left(\frac{L}{12} \right) = \frac{3PL^2}{128EI} \frac{L}{12} = \frac{PL^3}{512EI}$$

A flecha no ponto D é igual à diferença entre os segmentos DE e EF (Fig. 9.26). Temos então

$$\begin{aligned} y_D &= DE - EF = t_{D/A} - \frac{1}{4} t_{B/A} \\ &= \frac{PL^3}{512EI} - \frac{1}{4} \frac{7PL^3}{128EI} \\ y_D &= -\frac{3PL^3}{256EI} = -0,01172PL^3/EI \end{aligned}$$

*9.6 DEFORMAÇÃO MÁXIMA

Quando uma viga simplesmente apoiada, com balanços ou não, suporta uma carga assimétrica, a flecha máxima geralmente não ocorre no meio do vão. Com o objetivo de determinarmos a flecha máxima da viga, devemos localizar o ponto K da viga onde a tangente é horizontal, calculando então a deformação nesse ponto.

Nossa análise deve começar pela determinação da tangente de referência em um dos apoios. Se escolhermos o apoio A , a declividade θ_A da tangente nesse ponto é obtida pelo método descrito na seção anterior, calculando-se o desvio tangencial $t_{B/A}$ do apoio B em relação a A e dividindo-se pelo vão L .

Como a declividade θ_K no ponto K é igual a zero (Fig. 9.27a), devemos ter

$$\theta_{K/A} = \theta_K - \theta_A = 0 - \theta_A = -\theta_A$$

Recorrendo ao primeiro teorema, concluímos que o ponto K deve delimitar uma área $\theta_{K/A} = -\theta_A$ (Fig. 9.27b) sob o diagrama (M/EI) .

A flecha máxima $|y|_{\max}$ é igual ao desvio tangencial $t_{A/K}$ do apoio A em relação a K (Fig. 9.27a). Podemos então obter $|y|_{\max}$ calculando o momento estático da área situada entre A e K em relação ao eixo vertical que passa por A (Fig. 9.27b).

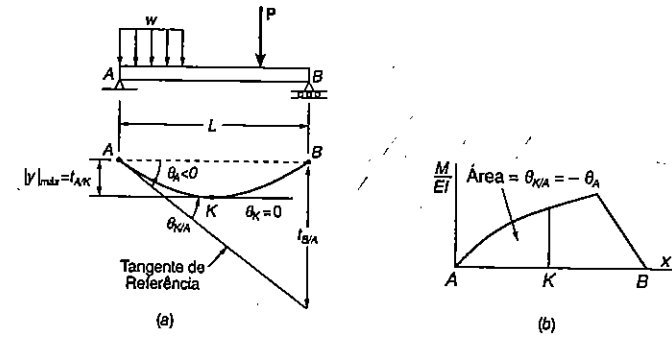


Fig. 9.27

EXEMPLO 9.5

Determinar a flecha máxima na viga do Ex. 9.4.

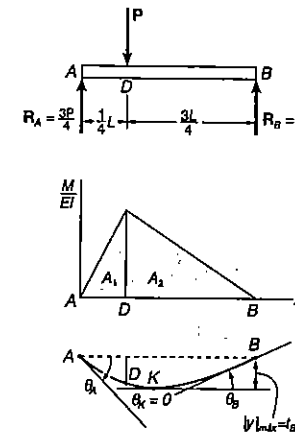


Fig. ex.9.28

Determinar o ponto K de declividade nula. Vimos no Ex. 9.4 que a declividade no ponto D, ponto de aplicação da carga, é negativa. Segue daí que o ponto K, onde a declividade é nula, se localiza entre o ponto D e o apoio B (Fig. 9.28). Nossos cálculos serão então simplificados, se relacionarmos a declividade do ponto K à declividade do ponto B, ao invés de fazê-lo em relação ao ponto A.

Uma vez que a declividade em A já foi determinada no Ex. 9.4, para obter a declividade em B basta fazer

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{B/A} = \theta_A + A_1 + A_2$$

$$\theta_B = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} + \frac{9PL^2}{128EI} = \frac{5PL^2}{128EI}$$

Notando que o momento fletor à distância u de extremidade B é $M = \frac{1}{4}P \cdot u$ (Fig. 9.29a), expressamos a área A' situada entre K e B sob o diagrama de (M/EI) por (Fig. 9.29b):

$$A' = \frac{1}{2} \frac{Pu}{4EI} u = \frac{Pu^2}{8EI}$$

Pelo primeiro teorema, temos

$$\theta_{B/K} = \theta_B - \theta_K = A'$$

e, uma vez que $\theta_K = 0$,

$$\theta_B = A'$$

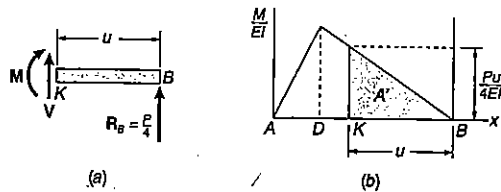


Fig. ex.9.29

Substituindo os valores obtidos para θ_B e A' , escrevemos

$$\frac{5PL^2}{128EI} = \frac{Pu^2}{8EI}$$

e, calculando o valor de u ,

$$u = \frac{\sqrt{5}}{4} L = 0,559L$$

Assim, a distância do apoio A ao ponto K é

$$AK = L - 0,559L = 0,441L$$

Flecha máxima. A flecha máxima $|y|_{\text{máx}}$ é igual ao desvio tangencial $t_{B/K}$ e, dessa forma, igual também ao momento estático da área A' em relação ao eixo vertical que passa por B (Fig. 9.29b). Temos

$$|y|_{\text{máx}} = t_{B/K} = A' \left(\frac{2u}{3} \right) = \frac{Pu^2}{8EI} \left(\frac{2u}{3} \right) = \frac{Pu^3}{12EI}$$

Substituindo nessa expressão o valor obtido para u , obtemos

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{P}{12EI} \left(\frac{\sqrt{5}}{4} L \right)^3 = 0,01456PL^3/EI$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.3

Para a viga e o carregamento indicados, (a) determinar a flecha no ponto A, (b) avaliar y para os seguintes dados:

W250 x 49,1 $E = 200 \text{ GPa}$ $I = 7,08 \times 10^7 \text{ mm}^4$
 $\alpha = 0,9 \text{ m}$ $L = 1,65 \text{ m}$ $\omega = 200 \text{ kN/m}$

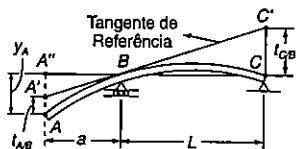
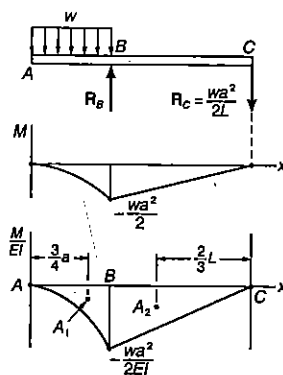
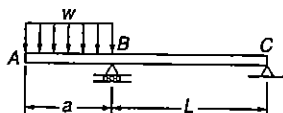


Diagrama de (M/EI) . Inicialmente desenhamos o diagrama de momento fletor. Como a rigidez flexional EI é constante, vamos obter o diagrama de (M/EI) que consiste em um trecho parabólico definindo a área A_1 e um trecho linear que define a área A_2 .

$$A_1 = \frac{1}{3} \left(-\frac{w\alpha^2}{2EI} \right) \alpha = -\frac{w\alpha^3}{6EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{w\alpha^2}{2EI} \right) L = -\frac{w\alpha^2 L}{4EI}$$

Tangente de referência em B. Adotamos a tangente de referência no ponto B, como indica a figura. Usando o segundo teorema, determinamos o desvio tangencial de C em relação a B.

$$t_{C/B} = A_2 \frac{2L}{3} = \left(-\frac{w\alpha^2 L}{4EI} \right) \frac{2L}{3} = -\frac{w\alpha^2 L^2}{6EI}$$

Dos triângulos semelhantes $A''A'B$ e $CC'D$, encontramos

$$A''A' = t_{C/B} \left(\frac{\alpha}{L} \right) = -\frac{w\alpha^2 L^2}{6EI} \left(\frac{\alpha}{L} \right) = -\frac{w\alpha^3 L}{6EI}$$

Usando novamente o segundo teorema, escrevemos

$$t_{A/B} = A_1 \frac{3\alpha}{4} = \left(-\frac{w\alpha^3}{6EI} \right) \frac{3\alpha}{4} = -\frac{w\alpha^4}{8EI}$$

(a) Flecha no ponto A

$$y_A = A''A' + t_{A/B} = -\frac{w\alpha^3 L}{6EI} - \frac{w\alpha^4}{8EI} = -\frac{w\alpha^4}{8EI} \left(\frac{4}{3} \frac{L}{\alpha} + 1 \right)$$

$$y_A = \frac{w\alpha^4}{8EI} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{L}{\alpha} \right) \downarrow$$

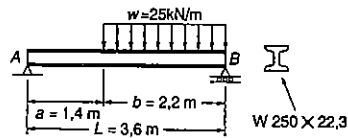
(b) Deslocamento y_A . Substituindo os dados numéricos, vem:

$$y_A = \frac{(200 \text{ kN/m})(0,9\text{m})^4}{8(200 \text{ GPa})(7,08 \times 10^7 \text{ mm}^4)} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1,65 \text{ m}}{0,9} \right)$$

$$y_A = 3,99 \text{ mm}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.4

Determinar, para a viga e o carregamento indicados, a localização da flexa máxima e o seu valor. Adotar $E = 200 \text{ GPa}$.



Reações. Usando o diagrama de corpo livre de toda a viga, encontramos

$$R_A = 16,81 \text{ kN } \uparrow \quad R_B = 38,2 \text{ kN } \uparrow$$

Diagrama de (M/EI) . Desenhemos o diagrama de (M/EI) por superposição, considerando separadamente os efeitos da reação R_A e da carga distribuída. As áreas do triângulo e da parte limitada pela parábola são

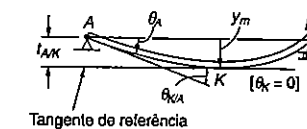
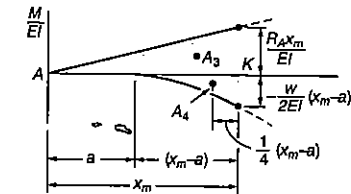
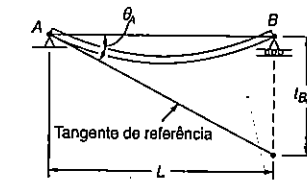
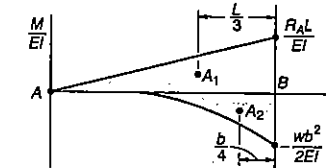
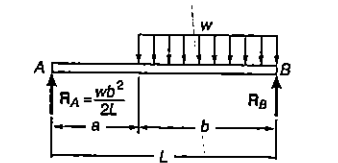
$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{R_A L}{EI} L = \frac{R_A L^2}{2EI} \quad A_2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{wb^2}{2EI} \right) b = -\frac{wb^3}{6EI}$$

Tangente de referência. Escolhemos como tangente de referência a tangente à viga no apoio. Usando o segundo teorema, calculamos o desvio tangencial $t_{B/A}$ do suporte B em relação ao suporte A.

$$t_{B/A} = A_1 \frac{L}{3} + A_2 \frac{b}{4} = \left(\frac{R_A L^2}{2EI} \right) \frac{L}{3} + \left(-\frac{wb^3}{6EI} \right) \frac{b}{4} = \frac{R_A L^3}{6EI} - \frac{wb^4}{24EI}$$

Declividade no ponto A.

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\left(\frac{R_A L^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EI L} \right) \quad (1)$$



Flecha máxima. A flecha máxima ocorre no ponto K, onde a declividade da linha elástica é nula. Escrevemos então

$$\theta_K = \theta_A + \theta_{K/A} = 0 \quad (2)$$

Mas

$$\theta_{K/A} = A_3 + A_4 = \frac{R_A x_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI} (x_m - a)^3 \quad (3)$$

Substituímos os valores de θ_A e $\theta_{K/A}$ obtidos nas Eqs. 1 e 3 na Eq. 2:

$$-\left(\frac{R_A L^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) + \left[\frac{R_A x_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI} (x_m - a)^3\right] = 0$$

Com os dados numéricos do problema obtemos:

$$-29,53 \frac{10^3}{EI} + 8,405x_m^2 \frac{10^3}{EI} - 4,167(x_m - 1,4)^3 \frac{10^3}{EI} = 0$$

Por tentativa e erro para x_m , temos:

$$x_m = 1,890 \text{ m}$$

Calculando agora os momentos estáticos das áreas A_3 e A_4 em relação a um eixo vertical que passa por A, temos

$$\begin{aligned} |y|_m &= i_{AK} = A_3 \frac{2x_m}{3} + A_4 \left[a + \frac{3}{4}(x_m - a) \right] \\ &= \frac{R_A x_m^3}{3EI} - \frac{wa}{6EI} (x_m - a)^3 - \frac{w}{8EI} (x_m - a)^4 \end{aligned}$$

Com os dados do problema, $R_A = 16,81 \text{ kN}$ e $I = 28,7 \cdot 10^6 \text{ m}^4$, encontramos

$$y_m = 6,44 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMAS

9.43 A barra rígida DEC é soldada no ponto C ao perfil laminado de aço AB. Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

9.44 A barra rígida DEC é soldada no ponto C ao perfil laminado de aço AB. Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

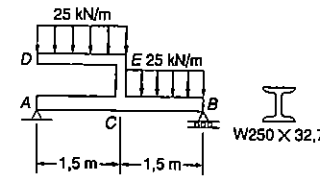


Fig. P9.43

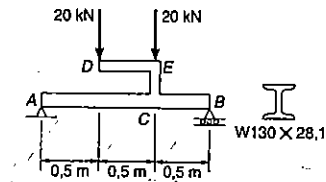


Fig. P9.44

9.45 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto A.

9.46 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a deflexão no ponto C.

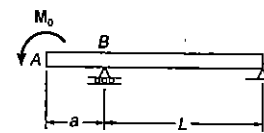


Fig. P9.45

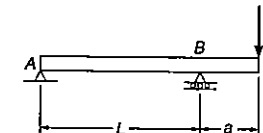


Fig. P9.46

9.47 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto A; (b) a declividade no ponto B; (c) a deflexão no ponto C.

9.48 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a deflexão no: (a) ponto A; (b) ponto C.

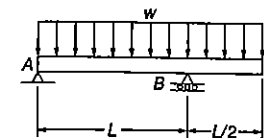


Fig. P9.47

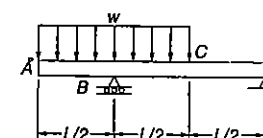


Fig. P9.48

9.49 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade do ponto B; (b) a deflexão do ponto D. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

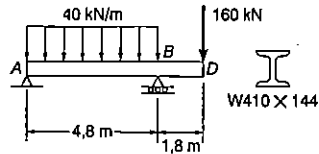


Fig. P9.49

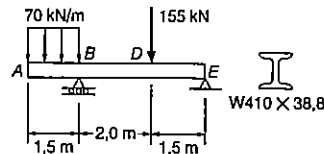


Fig. P9.50

9.51 Resolver o Prob. 9.50, assumindo que a carga de 155 kN é substituída por uma carga de 45 kN, dirigida para baixo.

9.52 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto D; (b) a deflexão no ponto E. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

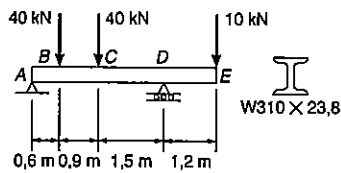


Fig. P9.52

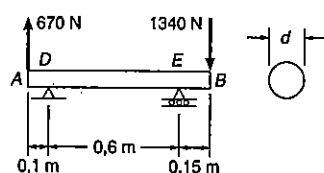


Fig. P9.53

9.54 Resolver o Prob. 9.53, considerando que a força de 670 N em A, atua para baixo.

9.55 Para a viga ACB, a rigidez flexional é EI na porção AC e nEI na porção CB. Para o carregamento mostrado, determinar a deflexão no ponto C, para: (a) $n = 1/3$; (b) $n = 1$; (c) $n = 3$.

9.56 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade no ponto D; (b) a deflexão no ponto B.

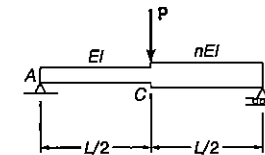


Fig. P9.55

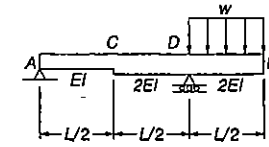


Fig. P9.56

9.57 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em A; (b) a declividade em B; (c) a deflexão no ponto médio C.

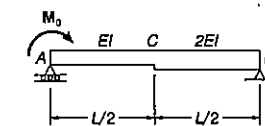


Fig. P9.57

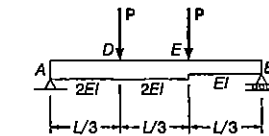


Fig. P9.58

9.58 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a deflexão no: (a) ponto D; (b) ponto E.

9.59 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a intensidade e a localização da máxima deflexão.

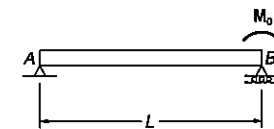


Fig. P9.59

9.60 a 9.66 Para a viga com o carregamento indicado, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão, dirigida para baixo.

9.60 Viga e carregamento do Prob. 9.33.

9.61 Viga e carregamento do Prob. 9.37.

9.62 Viga e carregamento do Prob. 9.36.

9.63 Viga e carregamento do Prob. 9.39.

9.64 Viga e carregamento do Prob. 9.40.

9.65 Viga e carregamento do Prob. 9.41.

9.66 Viga e carregamento do Prob. 9.42.

9.67 Para a viga e o carregamento do Prob. 9.49, determinar a maior deflexão, para cima, no vão AB .

9.68 Para a viga e o carregamento do Prob. 9.50, determinar a maior deflexão, para baixo, no vão BE .

9.69 Para a viga e o carregamento do Prob. 9.53, determinar a maior deflexão, para cima, no vão DE .

9.70 Para a viga e o carregamento do Prob. 9.52, determinar a maior deflexão, para baixo, no vão AD .

9.71 e 9.72 Para a viga e o carregamento indicado, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão dirigida para baixo.

9.71 Viga e carregamento do Prob. 9.57.

9.72 Viga e carregamento do Prob. 9.58.

9.73 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) o valor de a para que a declividade na extremidade A seja zero; (b) a correspondente deflexão no ponto C .

***9.74** A viga de igual resistência AB tem uma seção transversal retangular de largura b uniforme e altura variável h . Expressar a deflexão na extremidade A , em termos de P , L e da rigidez flexional EI_0 em B . (Sugestão: Visto que a viga é de resistência constante, então Mc/I tem um valor constante ao longo de AB .)

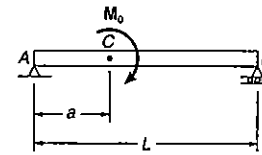


Fig. P9.73

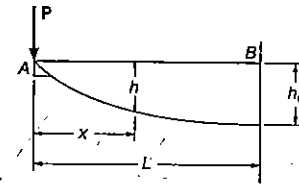


Fig. P9.74

*9.7 VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

As reações de apoio das vigas estaticamente indeterminadas podem ser obtidas pelo método das áreas do diagrama de momentos, de uma maneira semelhante àquela descrita na Sec. 8.8. No caso de uma viga com um grau de hiperestaticidade, por exemplo, adotamos uma das reações como sendo superabundante e modificamos ou eliminamos o apoio correspondente. A reação superabundante se torna, desse modo, um carregamento desconhecido que, juntamente com o carregamento dado, deve produzir deformações compatíveis com os apoios originais da viga. A condição de compatibilidade é normalmente estabelecida fazendo-se o desvio tangencial de um apoio em relação a outro igual a zero ou a um valor predeterminado.

Desenham-se dois diagramas de corpo livre da viga. Um deles indica a viga com o carregamento e as reações de apoio que não foram eliminadas; o outro indica a reação superabundante e as reações de apoio que ela provoca (ver Ex. 9.6). Desenhemos um diagrama de (M/EI) para cada um dos carregamentos, obtendo os desvios tangenciais pelo segundo teorema. Superpondo os resultados e exprimindo a condição de compatibilidade, obtemos o valor da reação separadamente. As outras reações são obtidas do estudo do diagrama de corpo livre da viga.

Uma vez conhecidas as reações de apoio, podemos obter a declividade e a flecha pelo método das áreas do diagrama de momentos em qualquer ponto da viga.

EXEMPLO 9.6

Determinar as reações da viga prismática com carregamento indicado (Fig. 9.30).

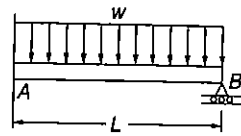


Fig. ex.9.30

Consideramos como reação superabundante o conjugado no engastamento A, substituindo esse engastamento por um apoio articulado fixo. O conjugado M_A passa a ser considerado como um carregamento de valor desconhecido (Fig. 9.31a), que será determinado pela condição de que a tangente à viga no apoio A deve ser horizontal.

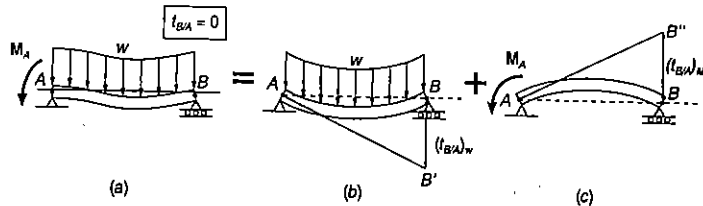


Fig. ex.9.31

Ocorre que essa tangente, sendo horizontal, deve passar pelo apoio B, de modo que o desvio tangencial $t_{B/A}$ de B em relação a A deve ser nulo. Procedese à solução calculando-se separadamente o desvio tangencial $(t_{B/A})_w$ causado pelo carregamento distribuído w (Fig. 9.31b) e o desvio tangencial $(t_{B/A})_M$ produzido pelo conjugado desconhecido M_A (Fig. 9.31c).

Analisando primeiramente o diagrama de corpo livre da viga submetida ao carregamento distribuído dado (Fig. 9.32a), obtemos as reações correspondentes nos apoios A e B. Temos

$$(R_A)_1 = (R_B)_1 = \frac{1}{2} wL \uparrow \quad (9.11)$$

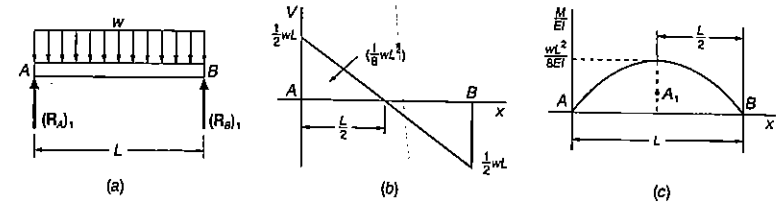


Fig. ex.9.32

Podemos desenhar agora os diagramas de força cortante e de (M/EI) indicados nas Figs. 9.32b e c. O diagrama de (M/EI) é representado por um arco de parábola e tem área $A = 2/3 bh$. Calculamos o momento estático dessa área em relação ao eixo vertical que passa por B e escrevemos

$$(t_{B/A})_w = A_1 \left(\frac{L}{2} \right) = \left(\frac{2}{3} L \frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{wL^4}{24EI} \quad (9.12)$$

Considerando agora o diagrama de corpo livre da viga submetida ao conjugado M_A (Fig. 9.33a), determinamos as reações correspondentes em A e B:

$$(R_A)_2 = \frac{M_A}{L} \uparrow \quad (R_B)_2 = \frac{M_A}{L} \downarrow \quad (9.13)$$

Desenhamos o diagrama (M/EI) correspondente (Fig. 9.33b) e aplicamos novamente o segundo teorema, escrevendo

$$(t_{B/A})_M = A_2 \left(\frac{2L}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} L \frac{M_A}{EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) = -\frac{M_A L^2}{3EI} \quad (9.14)$$

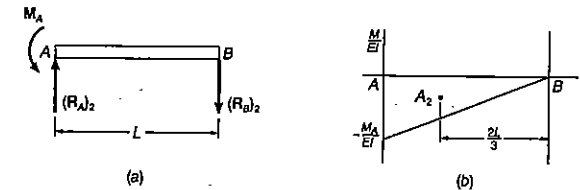


Fig. ex.9.33

Combinando os resultados obtidos em (9.12) e (9.14), e igualando a zero o desvio tangencial $t_{B/A}$ (Fig. 9.31), temos

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

$$\frac{wL^4}{24EI} - \frac{M_A L^2}{3EI} = 0$$

e, calculando M_A ,

$$M_A = +\frac{1}{8} wL^2 \qquad M_A = \frac{1}{8} wL^2$$

Substituímos o valor obtido para M_A em (9.13), e, juntamente com (9.11), encontramos os valores de R_A e R_B

$$R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \frac{1}{2} wL + \frac{1}{8} wL = \frac{5}{8} wL$$

$$R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \frac{1}{2} wL - \frac{1}{8} wL = \frac{3}{8} wL$$

Solução alternativa. Podemos considerar a reação em B superabundante e eliminar esse apoio da viga.

A reação R_B passa a ser considerada como uma carga desconhecida (Fig. 9.34a), que será determinada pela condição de que a extremidade B da viga deve ficar no mesmo nível do apoio A . Como a tangente à viga em A é horizontal, o desvio tangencial $t_{B/A}$ de B em relação a A deve ser nulo. Procedese à solução calculando-se separadamente o desvio tangencial $(t_{B/A})_w$ provocado pela carga uniformemente distribuída w (Fig. 9.34b) e o desvio $(t_{B/A})_R$ produzido pela reação superabundante R_B (Fig. 9.34c).

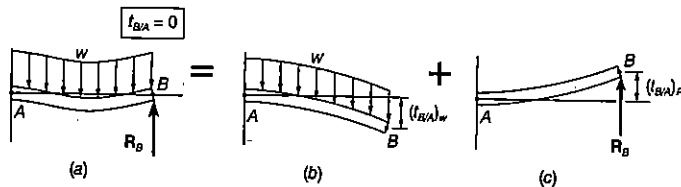


Fig. ex.9.34

Consideremos inicialmente o diagrama de corpo livre da viga submetida ao carregamento distribuído w (Fig. 9.35a) e desenhamos os diagramas de força cortante e de (M/EI) da direita para a esquerda (Fig. 9.35b e c), para evitar o cálculo das reações em A . A área do diagrama parabólico é

$$A_1 = \frac{1}{3} \left(-\frac{wL^2}{2EI} \right) L = -\frac{wL^3}{6EI}$$

e aplicando o segundo teorema, escrevemos

$$(t_{B/A})_w = A_1 \left(\frac{3L}{4} \right) = \left(-\frac{wL^3}{6EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad (9.15)$$

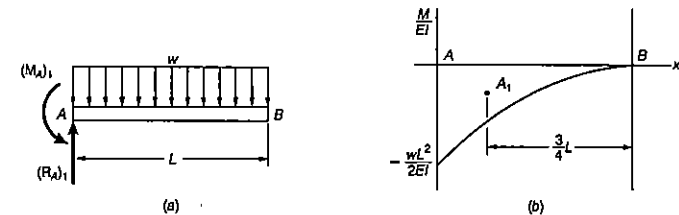


Fig. ex.9.35

Considerando a seguir o diagrama de corpo livre da viga submetida à reação superabundante R_B (Fig. 9.36a), desenhamos o diagrama de (M/EI) da direita para a esquerda (Fig. 9.36b), para evitar novamente o cálculo das reações em A . Escrevemos

$$(t_{B/A})_R = A_2 \left(\frac{2L}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \frac{R_B L}{EI} L \right) \left(\frac{2L}{3} \right) = \frac{R_B L^3}{3EI} \qquad (9.16)$$

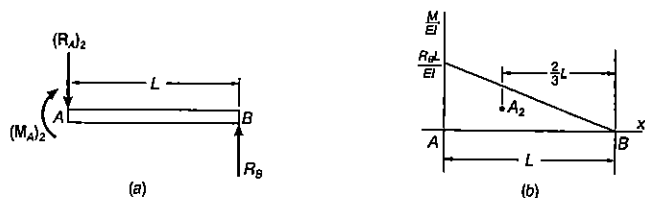


Fig. ex.9.36

Combinamos os resultados obtidos em (9.15) e (9.16), e igualamos a zero o desvio tangencial $t_{B/A}$ (Fig. 9.34), encontrando

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_R = 0$$

$$-\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

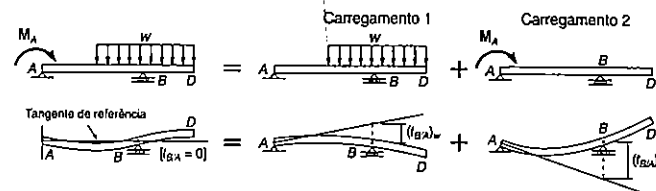
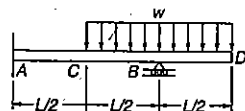
e, calculando R_B

$$R_B = \frac{3}{8} wL$$

A reação no engastamento em A pode ser obtida do diagrama de corpo livre da viga.

PROBLEMA RESOLVIDO 9.5

Determinar, para a viga prismática com o carregamento dado, as reações de apoio.



Solução. A viga tem um grau de hiperestabilidade, e escolhemos o conjugado M_A que se exerce no engastamento A como a reação superabundante. Adotamos a tangente horizontal em A como tangente de referência, observando que o desvio tangencial $t_{B/A}$ de B em relação a A deve ser nulo. As deformações provocadas pela carga distribuída w e pelo conjugado M_A (com sentido horário adotado) são consideradas separadamente.

Determinamos agora as reações para cada carregamento, desenhando o diagrama (M/EI) e encontramos $t_{B/A}$.

Carga distribuída. (Carregamento 1.)

$$(t_{B/A})_w = A_1 \frac{L}{8} = \left(-\frac{1}{3} \frac{wL^2}{8EI} \frac{L}{2} \right) \frac{L}{8} = -\frac{wL^4}{384EI}$$

Reação superabundante. (Carregamento 2.)

$$(t_{B/A})_M = A_2 \frac{2L}{3} = \left(\frac{1}{2} \frac{M_A}{EI} L \right) \frac{2L}{3} = \frac{M_A L^2}{3EI}$$

Conjugado M_A . Como o desvio $t_{B/A}$ deve ser nulo, escrevemos

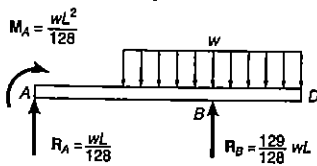
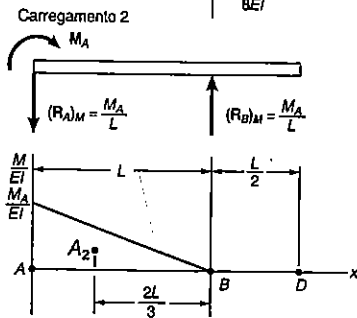
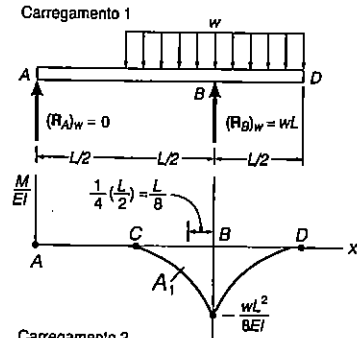
$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

$$-\frac{wL^4}{384EI} + \frac{M_A L^2}{3EI} = 0 \quad M_A = \frac{wL^2}{128} \downarrow$$

Outras reações. Substituindo a expressão $M_A = wL^2/128$ nas fórmulas de $(R_A)_M$ e $(R_B)_M$ indicadas no diagrama de corpo livre do segundo carregamento, temos $(R_A)_M = (R_B)_M = wL/128$. Combinando os diagramas dos dois carregamentos, obtemos

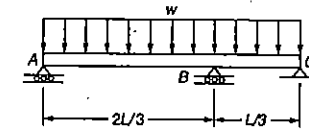
$$+\uparrow R_A = (R_A)_w + (R_A)_M = 0 + \left(-\frac{wL}{128}\right) = -\frac{wL}{128} \quad R_A = \frac{wL}{128} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow R_B = (R_B)_w + (R_B)_M = wL + \frac{wL}{128} = +\frac{129}{128} wL \quad R_B = \frac{129}{128} wL \uparrow \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 9.6

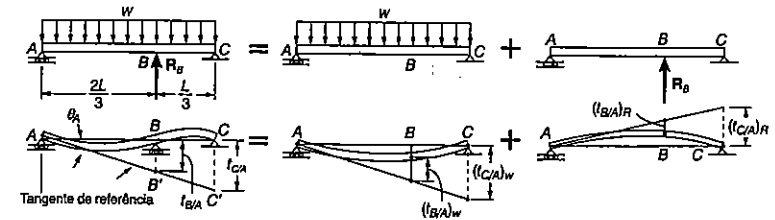
Para a viga uniforme de carregamento indicado, pede-se calcular a reação em B.



Solução. A viga possui um grau de hiperestabilidade e escolhemos a reação R_B como superabundante. Escolhemos também a tangente em A como a tangente de referência. Da semelhança dos triângulos ABB' e ACC' , escrevemos

$$\frac{t_{CIA}}{L} = \frac{t_{BIA}}{\frac{2}{3}L} \quad t_{CIA} = \frac{3}{2} t_{BIA} \quad (1)$$

Para cada carregamento, desenhamos o diagrama (M/EI) e determinamos os desvios tangenciais de B e C em relação a A.

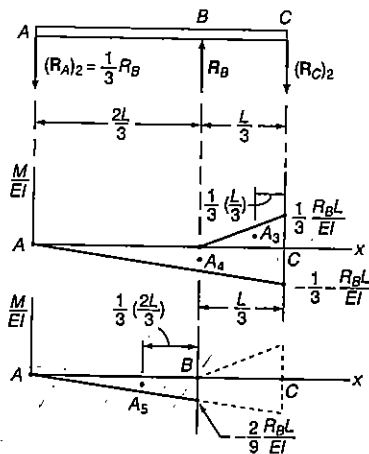
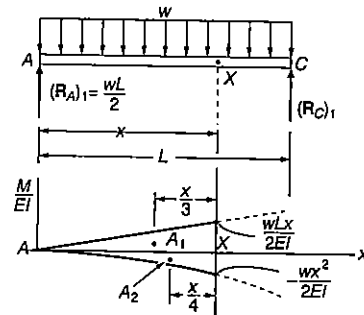


Carregamento distribuído. Considerando o diagrama de (M/EI) da extremidade A até um ponto arbitrário X, escrevemos

$$(t_{X/A})_w = A_1 \frac{x}{3} + A_2 \frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2} \frac{wLx}{2EI} x \right) \frac{x}{3} + \left(-\frac{1}{3} \frac{wx^2}{2EI} x \right) \frac{x}{4} = \frac{wx^3}{24EI} (2L - x)$$

Fazendo sucessivamente $X = L$ e $X = 2/3L$, temos

$$(t_{C/A})_w = \frac{wL^4}{24EI} \quad (t_{B/A})_w = \frac{4}{243} \frac{wL^4}{EI}$$



Carregamento de reação superabundante

$$(t_{C/A})_R = A_3 \frac{L}{9} + A_4 \frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2} \frac{R_B L}{3EI} \frac{L}{3} \right) \frac{L}{9} + \left(-\frac{1}{2} \frac{R_B L}{3EI} L \right) \frac{L}{3} = -\frac{4}{81} \frac{R_B L^3}{EI}$$

$$(t_{B/A})_R = A_5 \frac{2L}{9} = \left[-\frac{1}{2} \frac{2R_B L}{9EI} \left(\frac{2L}{3} \right) \right] \frac{2L}{9} = -\frac{4}{243} \frac{R_B L^3}{EI}$$

Combinação dos carregamentos. Somando os resultados obtidos, escrevemos

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81} \frac{R_B L^3}{EI} \quad t_{B/A} = \frac{4}{243} \frac{(wL^4 - R_B L^3)}{EI}$$

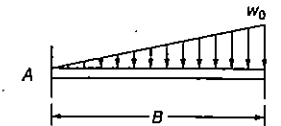
Reação em B. Substituindo na Eq. 1 os valores de $t_{C/A}$ e $t_{B/A}$, encontramos

$$\left(\frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81} \frac{R_B L^3}{EI} \right) = \frac{3}{2} \left[\frac{4}{243} \frac{(wL^4 - R_B L^3)}{EI} \right]$$

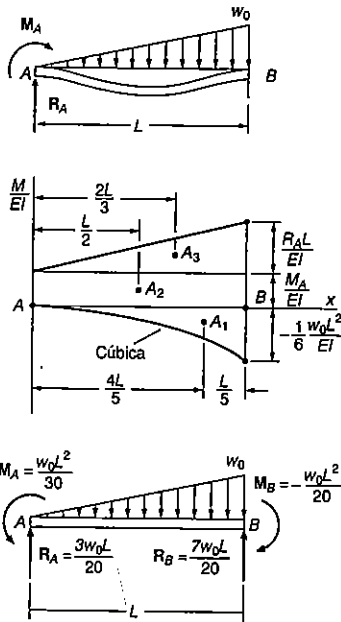
$$R_B = 0,6875wL \quad R_B = 0,688wL \uparrow$$

PROBLEMA RESOLVIDO 9.7

Determinar as reações dos apoios da viga prismática com o carregamento indicado.



Solução. Adotamos que a força axial na viga é nula. Desse modo, ela se torna indeterminada com dois graus de hiperestaticidade, e escolhemos as duas componentes de reação R_A e M_A , como superabundantes.



Tangente de referência. Escolhemos como tangente de referência a tangente à viga no apoio B, observando que $\theta_{B/A}$ e $t_{A/B}$ são ambos iguais a zero².

Diagrama de (M/EI). Desenhemos o diagrama de (M/EI) por superposição, considerando separadamente os efeitos da carga distribuída do conjugado M_A e da força R_A . O diagrama final se compõe de três formas geométricas simples, um triângulo, um retângulo e uma área limitada por uma parábola cúbica. Recorrendo à Fig. 9.12, escrevemos

² Vemos que o desvio tangencial de B em relação a A também é nula. Assim, poderíamos usar $\theta_{B/A} = 0$ e $t_{B/A} = 0$ e $t_{A/B} = 0$.

$$A_1 = \frac{1}{4} \left(-\frac{w_0 L^2}{6EI} \right) L = -\frac{w_0 L^3}{24EI}$$

$$A_2 = \frac{M_A L}{EI} \quad A_3 = \frac{R_A L^2}{2EI}$$

Teoremas relativos às áreas do diagrama de momentos. Uma vez que $\theta_{B/A} = 0$, a área do diagrama (M/EI) entre os pontos A e B é igual a zero.

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$-\frac{w_0 L^3}{24EI} + \frac{M_A L}{EI} + \frac{R_A L^2}{2EI} = 0$$

$$M_A + \frac{1}{2} R_A L = \frac{1}{24} w_0 L^2 \quad (1)$$

Como $t_{A/B} = 0$, o momento estático da área sob o diagrama de (M/EI) em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto A é zero.

$$t_{A/B} = A_1 \frac{4L}{5} + A_2 \frac{L}{2} + A_3 \frac{2L}{3} = 0$$

$$\left(-\frac{w_0 L^3}{24EI} \right) \frac{4L}{5} + \left(\frac{M_A}{EI} \right) \frac{L}{2} + \left(\frac{R_A L^2}{2EI} \right) \frac{2L}{3} = 0$$

$$\frac{1}{2} M_A + \frac{1}{3} R_A L = \frac{1}{30} w_0 L^2 \quad (2)$$

Reação em A. Resolvendo o sistema de equações formado por (1) e (2), obtemos

$$R_A = +\frac{3}{20} w_0 L \quad R_A = \frac{3}{20} w_0 L \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

$$M_A = -\frac{w_0 L^2}{30} \quad M_A = \frac{w_0 L^2}{30} \quad \blacktriangleleft$$

Reação em B. Pelas equações da estática, encontramos

$$R_B = \frac{7}{20} w_0 L \uparrow \quad M_B = \frac{w_0 L^2}{20} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

9.75 a 9.78 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a reação no apoio móvel.

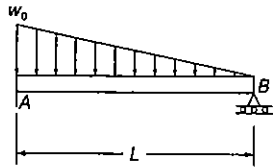


Fig. P9.75

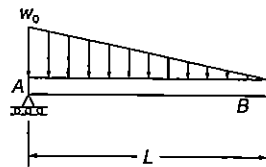


Fig. P9.76

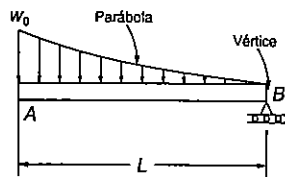


Fig. P9.77

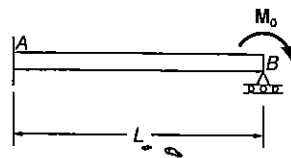


Fig. P9.78

9.79 a 9.82 Determinar a reação no apoio móvel e desenhar o diagrama de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado.

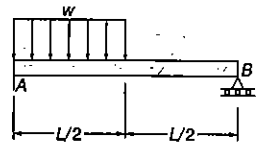


Fig. P9.79

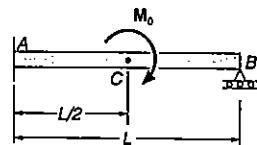


Fig. P9.80

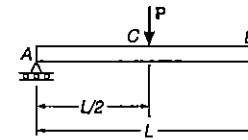


Fig. P9.81

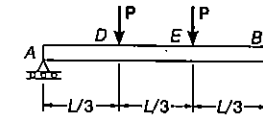


Fig. P9.82

9.83 e 9.84 Determinar a reação no apoio móvel e desenhar o diagrama de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado.

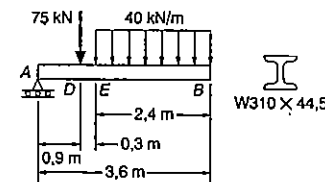


Fig. P9.83

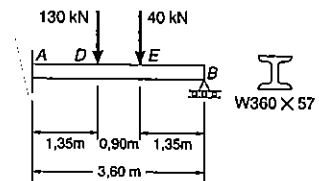


Fig. P9.84

9.85 Resolver o Prob. 9.84, assumindo que a carga de 130 kN é substituída por uma de 110 kN aplicada no mesmo ponto D da viga.

9.86 Resolver o Prob. 9.83, assumindo que a carga de 75 kN é removida.

9.87 a 9.90 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a reação em cada um dos apoios.

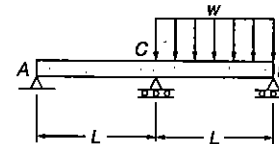


Fig. P9.87

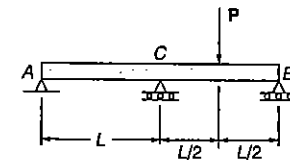


Fig. P9.88

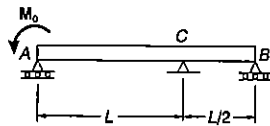


Fig. P9.89

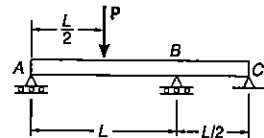


Fig. P9.90

9.91 a 9.94 Determinar a reação em A e desenhar o diagrama de momento fletor para a viga com o carregamento mostrado.

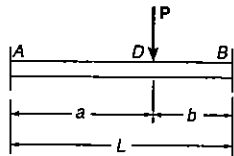


Fig. P9.91

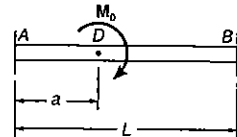


Fig. P9.92

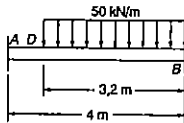


Fig. P9.93

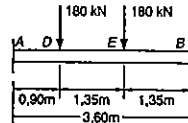


Fig. P9.94

9.95 Um macaco hidráulico pode ser usado para levantar o ponto B, de uma viga em balanço ABC. Sabendo-se que, depois da carga de 20 kN ser aplicada, o ponto C deve estar no mesmo nível do ponto A, determinar: (a) quanto o ponto B deve ser levantado; (b) a reação em B, depois que B for levantado e a carga de 20 kN for aplicada. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

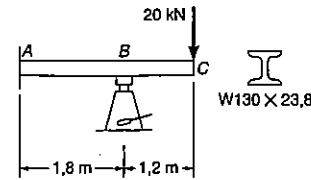


Fig. P9.95

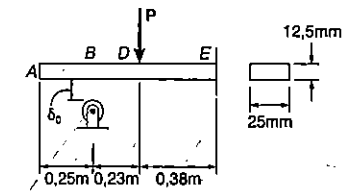


Fig. P9.97, P9.98 e P9.99

9.96 Para a viga com o carregamento do Prob. 9.95, determinar: (a) quanto o ponto B deverá ser levantado, se a deflexão em CF deve ser de 10 mm para baixo, em relação à horizontal que passa por A; (b) a reação em B depois que o ponto B tiver sido levantado e a carga de 20 kN aplicada.

9.97 Antes da carga P ser aplicada, uma abertura $\delta_0 = 5 \text{ mm}$ existe entre a viga e o apoio em B. Para $P = 360 \text{ kN}$, determinar: (a) a reação em B; (b) a declividade em B; (c) a deflexão em A. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

9.98 Antes da carga P ser aplicada, uma abertura $\delta_0 = 5 \text{ mm}$ existe entre a viga e o apoio em B. Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a intensidade P da carga para que a deflexão em A seja zero; (b) a correspondente reação em B.

9.99 Antes da carga P ser aplicada, uma abertura $\delta_0 = 5 \text{ mm}$ existe entre a viga e o apoio em B. Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a intensidade P da carga para que a declividade em A seja zero; (b) a correspondente reação em B.

9.100 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a constante de mola k para que o momento fletor em B seja $M_B = -wL^2/12$.

9.101 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a constante de mola k para que a força na mola seja igual a um terço da carga total sobre a viga.

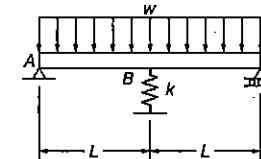


Fig. P9.100 e P9.101

9.102 O suporte estrutural mostrado é feito de duas vigas de perfil laminado de aço S130 x 15, que são simplesmente apoiados em cada uma das extremidades e, quando não carregados, eles simplesmente se tocam no ponto médio C, de cada uma das vigas. Para a carga distribuída mostrada, determinar: (a) a reação em cada um dos apoios; (b) a deflexão no ponto médio C. Usar $E = 200$ GPa.

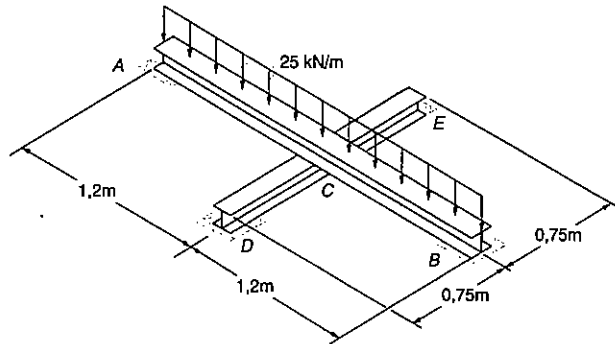


Fig. P9.102

9.103 Resolver o Prob. 9.102, considerando que a carga distribuída é substituída por uma carga de 40 kN, aplicada no ponto médio da viga ACB.

9.104 Uma barra maciça de aço, com 20 mm de diâmetro e 1,0 m de comprimento, é fixada no ponto médio C da viga AE, feita de um perfil laminado de aço S130 x 15, para aliviar os apoios da viga. Para $P = 40$ kN, determinar: (a) a tração na barra; (b) o momento fletor nos pontos B e C da viga; (c) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200$ GPa.

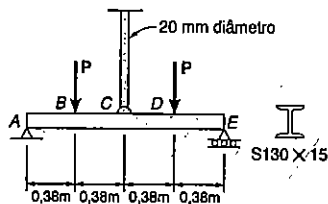


Fig. P9.104

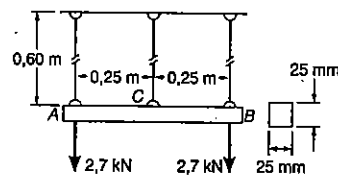


Fig. P9.106

9.105 Resolver o Prob. 9.104, considerando que a barra de diâmetro igual a 20 mm seja substituída por outra de 12,5 mm de diâmetro e de mesmo comprimento.

9.106 Arames de aço de diâmetro igual a 3,25 mm são usados para suportar a barra quadrada ACB de aço. Sabendo-se que cada um dos arames está inicialmente tenso, determinar a tração adicional em cada um dos arames, quando duas forças de 2,7 kN são aplicadas, como mostrado.

9.107 Resolver o Prob. 9.106, assumindo que uma única força de 2,7 kN é aplicada no ponto C.

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado para a determinação das deflexões e declividades de vigas, usando o método dos momentos de área.

Primeiro teorema momento-área

Para se derivar os teoremas do método dos momentos de área (Sec. 9.2), inicialmente desenhamos um diagrama representativo da variação, ao longo da viga, de uma quantidade M/EI obtida pela divisão entre o momento fletor M e a rigidez flexional EI (Fig. 9.1). Nós, então, deduzimos o primeiro teorema do método dos momentos de área que pode ser anunciado como segue: *ângulo entre as tangentes à linha elástica, desenhadas por estes pontos. Considerando as tangentes em C e D, escrevemos:*

$$\theta_{D/C} = \text{área sob o diagrama } (M/EI), \text{ entre } C \text{ e } D \quad (9.3)$$

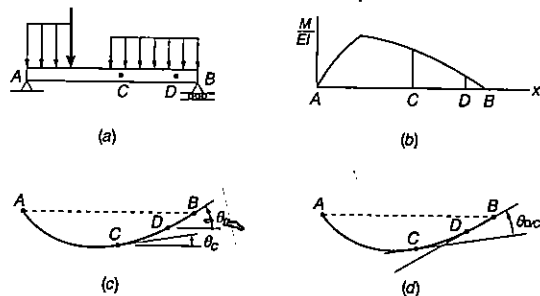


Fig. 9.1

Segundo teorema momento-área

Por outro lado, usando o diagrama (M/EI) e um esboço da viga defletida (Fig. 9.5a), desenhamos uma tangente pelo ponto D e tomamos a distância vertical $t_{C/D}$ que é chamada *afastamento tangencial*, de C em relação a D . Assim, nós deduzimos o segundo teorema do método dos momentos de área, que pode ser enunciado como segue: *o afastamento tangencial, $t_{C/D}$, de C em relação a D é igual ao momento estático da área limitada pelo diagrama (M/EI) entre os pontos C e D , em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto C .*

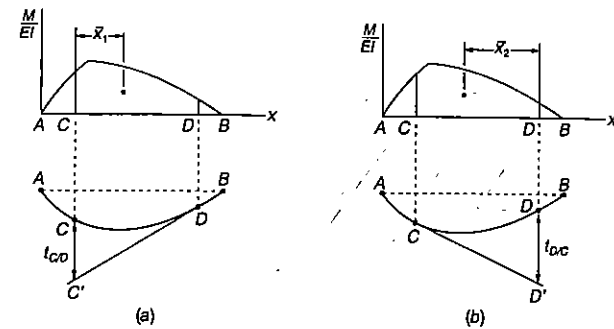


Fig. 9.5

Devemos ter o cuidado de distinguir entre o afastamento tangencial de C , em relação a D ,

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ e } D) \bar{x}_1 \quad (9.6)$$

e o afastamento tangencial em D , em relação a C (Fig. 9.5b),

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ e } D) \bar{x}_2 \quad (9.7)$$

Vigas em balanço

Vigas com carregamento simétrico

Na Sec. 9.3, aprendemos a determinar a declividade e a deflexão em pontos de vigas em balanço e em vigas com carregamentos simétricos. Para vigas em balanço, a tangente no engastamento é horizontal (Fig. 9.6); e para vigas simetricamente

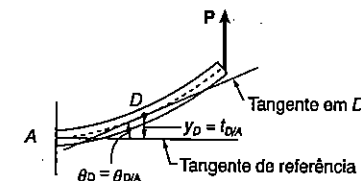


Fig. 9.6

carregadas, a tangente é horizontal no ponto médio C da viga (Fig.9.7). Usando a tangente horizontal como uma *tangente referência*, estaremos aptos para determinar as declividades e as deflexões, pelo uso do primeiro e do segundo teorema do método dos momentos de área, respectivamente (Exemplo 9.1; Prob. Resolvido 9.1 e 9.2). Notamos que para encontrar uma deflexão que não seja um afastamento tangencial (Fig. 9.7c), é necessário inicialmente determinar os afastamentos tangenciais, que possam ser combinados, para obter a desejada deflexão.

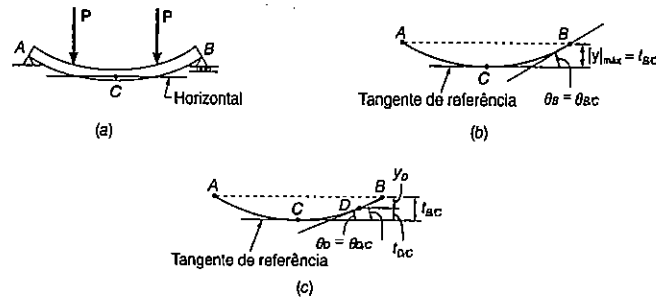


Fig. 9.7

Diagrama de momento fletor

Em muitos casos de aplicação, os teoremas do método dos momentos de área são simplificados, se considerarmos o efeito de cada uma das cargas separadamente (Sec. 9.4). Para isto, desenhamos o *diagrama por parte* (M/EI), desenhando um diagrama (M/EI) separado para cada carga. As áreas e os momentos de áreas sob diversos diagramas, podem então se adicionados para determinarmos as declividades e os afastamentos tangenciais para a viga com o carregamento original (Exemplos 9.2 e 9.3).

Carregamentos assimétricos

Na Sec. 9.5 nós expandimos o uso do método dos momentos de áreas para vigas que suportam *carregamentos assimétricos*. Observa-se que a localização de uma tangente horizontal não é normalmente possível, então selecionamos, como tangente referência, aquela no primeiro apoio da viga, visto que a declividade dessa tangente pode ser prontamente determinada. Por exemplo, para a viga com o carregamento mostrado na Fig. 9.19, a declividade da tangente em A pode ser obtida pelo cálculo do afastamento tangencial $t_{B/A}$ e dividindo-o pela distância L entre os apoios A e B. Então, usando-se ambos os teoremas do método dos momentos de área e uma geometria simples, poderemos determinar a declividade e a deflexão em qualquer ponto da viga (Exemplo 9.4; Prob. Resolvido 9.3).

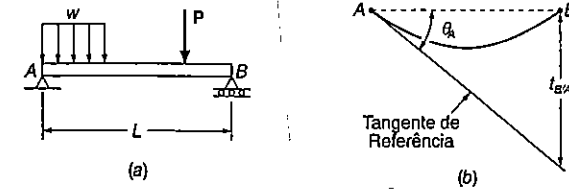


Fig. 9.19

Deflexão máxima

A *máxima deflexão* de uma viga carregada *assimetricamente*, geralmente não ocorre no meio do vão. O caminho indicado no parágrafo precedente foi usado para determinar o ponto K, onde a máxima deflexão ocorre e a intensidade desta deflexão (Sec. 9.6). Observando-se que a declividade em K é zero (Fig. 9.27), daí nós concluímos que $\theta_{K/A} = -\theta_A$. Lembrando o primeiro teorema do método dos momentos de área, determinaremos a localização de K, medindo-se sob o diagrama (M/EI) uma área igual para $\theta_{K/A}$. A máxima deflexão será então obtida pelo cálculo do afastamento tangencial $t_{A/K}$ (Exemplo 9.5; Probs. Resolvido 9.3 e 9.4).

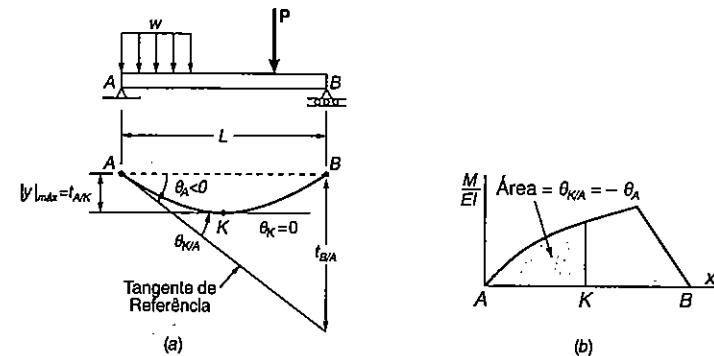


Fig. 9.27

Vigas estaticamente indeterminadas

Na última seção deste capítulo (Sec. 9.7), nós consideramos a análise de vigas estaticamente indeterminadas. Uma vez que as reações, para a viga com o carregamento mostrado na Fig. 9.30, não pode ser determinada apenas pela estática, designamos uma das reações da viga como redundante (M_A , na Fig. 9.31a) e consideramos esta reação redundante como uma carga desconhecida. O afastamento tangencial, de B em relação a A, foi considerado separadamente para a carga distribuída (Fig. 9.31b) e para a reação redundante (Fig. 9.31c). Expressando, que sob a ação combinada da carga distribuída e do momento M_A , o afastamento tangencial, de B em relação a A, deve ser zero, escrevemos:

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

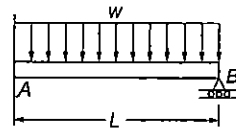


Fig. 9.30

Por esta expressão, determinamos a intensidade da reação redundante M_A (Exemplo 9.6; Probs. Resolvidos 9.5, 9.6 e 9.7).

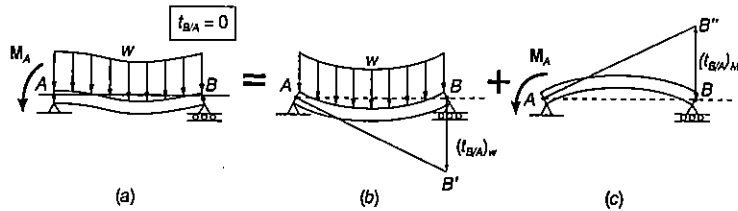


Fig. 9.31

PROBLEMAS DE REVISÃO

9.108 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade na extremidade E; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

9.109 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar a intensidade e a localização da maior deflexão. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

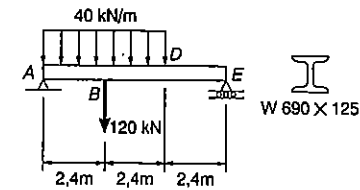


Fig. P9.108 e P9.109

9.110 Duas barras em forma de L são soldadas nos pontos B e D da viga AE, de perfil laminado de aço, como indicado. Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em A; (b) a declividade em B; (c) a deflexão em B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

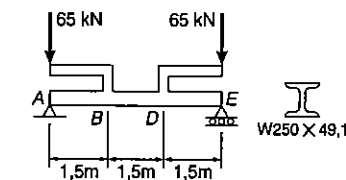


Fig. P9.110

9.111 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) o momento fletor na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio C.

9.112 Duas placas de cobertura são soldadas a uma viga de perfil laminado de aço W760 x 147, como mostrado. Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a declividade na extremidade A; (b) a deflexão no ponto médio C.

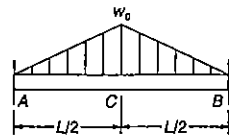


Fig. P9.111

9.113 Resolver o Prob. 9.112, assumindo que as duas cargas de 180 kN são removidas.

9.114 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a reação em A; (b) a deflexão em D. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

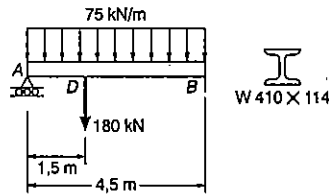


Fig. P9.114

9.115 Resolver o Prob. 9.114, assumindo que o apoio fixo em B seja substituído por um apoio articulado fixo.

9.116 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em D; (b) a deflexão em C; (c) a deflexão em E. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

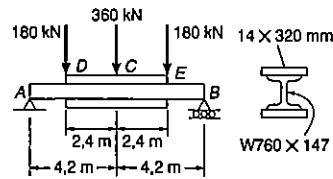


Fig. P9.112

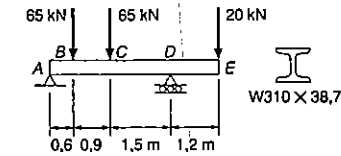


Fig. P9.116

9.117 Resolver o Prob. 9.116, assumindo que a intensidade da carga em E é aumentada para 65 kN.

9.118 Forças verticais P são aplicadas nas extremidades A e E de uma barra de aço uniforme, que descansa sobre uma superfície horizontal rígida. Como a intensidade P das forças aplicadas é aumentada, as porções AB e DE da barra são levantadas da superfície. Sabendo-se que a barra é inicialmente reta, e denotando por w seu peso por unidade de comprimento e por EI sua rigidez flexional, determinar a distância e a deflexão δ_A quando: (a) $P = wL/8$; (b) $P = wL/4$; (c) $P = 3wL/8$.

9.119 Para a viga com o carregamento mostrado, determinar: (a) a declividade em A; (b) a deflexão em E; (c) a deflexão em F. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

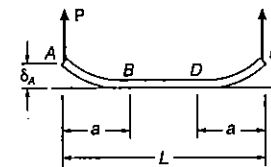


Fig. P9.118

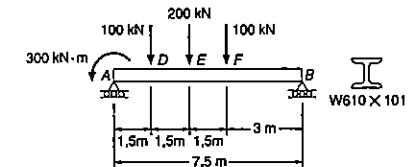


Fig. P9.119

Os problemas que se seguem são para serem resolvidos com auxílio de um computador.

9.C1 Para a viga uniforme e carregamento mostrado, escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular a deflexão e a declividade da viga, desde $x = 0$ até $x = L$, em intervalos ΔL . Usar este programa para calcular a declividade e a deflexão nos pontos de aplicação das cargas concentradas, para a viga do: (a) Prob. 9.26; (b) Prob. 9.119.

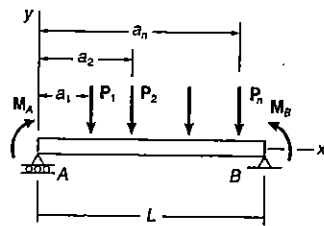


Fig. P9.C1

9.C2 Duas cargas de 45 kN são mantidas afastadas de 1,5 m e elas se movem lentamente ao longo da viga AB. Escrever um programa de computador que possa ser usado para calcular a deflexão no ponto médio C da viga, determinando os valores de x , desde 0 até 4,8 m, em intervalos de 0,3 m. Usar $E = 200$ GPa.

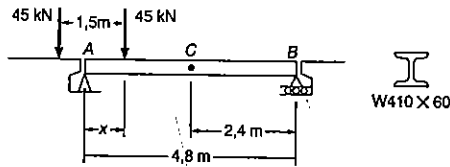


Fig. P9.C2

9.C3 O macaco hidráulico mostrado pode ser usado para levantar o ponto B, de uma viga em balanço ABC. Depois da carga de 30 kN ter sido aplicada, a deflexão do ponto C é de 3,8 mm, para baixo, medida em relação à horizontal que passa por A. Escrever um programa de computador e usá-lo para determinar, para valores de a , desde 0,6 m até 3 m, em intervalos de 0,3 m: (a) a deflexão necessária no ponto B; (b) a correspondente força aplicada pelo macaco em B. Usar $E = 200$ GPa.

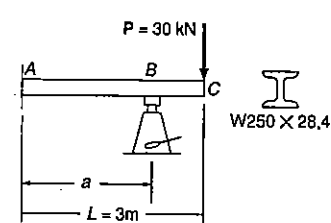


Fig. P9.C3

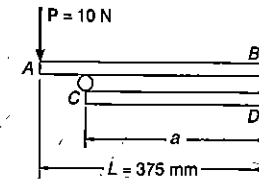


Fig. P9.C4

9.C4 Duas barras de latão, cada uma de 6×6 mm de seção transversal, são usadas para formar as vigas em balanço AB e CD. Antes da carga $P = 10$ N ser aplicada, ambas as vigas são retas e estão em contato no ponto C. Escrever um programa de computador e usá-lo para determinar, para valores de a , desde 0 até 375 mm, em intervalos de 25 mm: (a) a reação em D; (b) a deflexão em A; (c) a intensidade e a localização da máxima tensão. Usar $E = 105$ GPa.

Capítulo 10

MÉTODOS DE ENERGIA

10.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, estivemos preocupados com as relações existentes entre forças e deformações, sob diversas condições de carregamento. Nossa análise foi baseada em dois conceitos fundamentais: o conceito de tensão (Cap. 1) e o conceito de deformação (Cap. 2). Agora iremos introduzir um terceiro conceito importante, o conceito de *energia de deformação*.

Na Sec. 10.2, iremos definir a *energia de deformação* de um membro como sendo o acréscimo de energia associada com a deformação do membro. Veremos que a energia de deformação é igual ao trabalho realizado pelo aumento gradual da carga aplicada no membro. A *energia específica de deformação* de um material irá ser definida como a energia de deformação por unidade de volume e veremos que isto é igual à área abaixo da curva do diagrama tensão-deformação de um material. Também iremos definir *módulo de tenacidade* ou *módulo de dureza* e o *módulo de resiliência* do material (Fig. 10.1).

Na Sec. 10.4, iremos discutir a energia de deformação elástica associada com as *tensões normais*, primeiro em membros sujeitos a carregamento axial, e depois em membros sob flexão. Mais adiante, iremos considerar a energia de deformação associada com as *tensões de cisalhamento*, uma vez que estas ocorrem em eixos submetidos a carregamentos transversais (Sec. 10.5). A energia de deformação para um *estado geral de tensões* irá ser considerada na Sec. 10.6, onde será desenvolvido o *critério da máxima energia de distorção* para o escoamento.

O efeito das *cargas de impacto* sobre membros serão considerados na Sec. 10.7. Aprenderemos a calcular prontamente a *máxima tensão* e a *máxima deflexão*, devida ao impacto de uma massa sobre um membro. As propriedades que efetivamente aumentam a capacidade de uma estrutura, para resistir a cargas de impacto, serão discutidas na Sec. 10.8.

Na Sec. 10.9, será calculada a energia de deformação de um membro submetido a uma *única carga concentrada* e na Sec. 10.10, iremos aprender a determinar a deflexão do ponto de aplicação dessa carga única.

No final do capítulo, será considerada a energia de deformação de estruturas submetidas a *várias cargas* (Sec. 10.11). O *teorema de Castigliano* será desenvolvido na Sec. 10.12 e usado na Sec. 10.13, para determinar a deflexão em um dado ponto de uma estrutura, sujeita a várias cargas. Na última seção, o teorema de Castigliano será aplicado para a análise de estruturas indeterminadas (Sec. 10.14).

10.2 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO

Considere uma barra *BC* de comprimento *L* e seção transversal uniforme de área *A*, presa no ponto *B* a um suporte fixo. No ponto *C* atua uma carga axial *P* (Fig. 10.1), cuja intensidade *aumenta gradualmente*. Como foi visto na Sec. 2.2, se marcarmos em um gráfico os valores de *P* e os valores correspondentes da deformação *x* da barra, vamos obter uma curva força-deformação (Fig. 10.2) que é característica da barra *BC*.

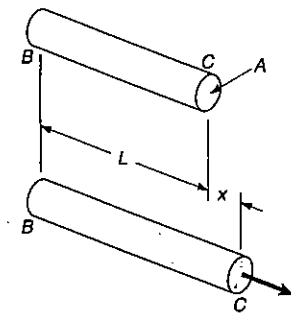


Fig. 10.1

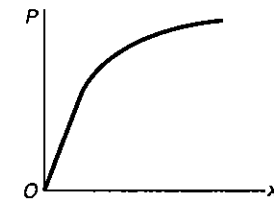


Fig. 10.2

Vamos agora considerar o trabalho *dU* realizado pela força *P* enquanto a barra se alonga de um valor *dx*. Esse *trabalho elementar* é igual ao produto da intensidade de *P* pelo pequeno alongamento *dx*.

Podemos escrever,

$$dU = P \cdot dx \tag{10.1}$$

Observa-se que essa expressão é igual ao elemento de área de largura dx situado sob a curva força-deformação (Fig. 10.3). O trabalho total U realizado pela força quando a barra sofre uma deformação x_1 é, então,

$$U = \int_0^{x_1} P \cdot dx$$

valor esse igual à área sob o diagrama força-deformação entre $x = 0$ e $x = x_1$.

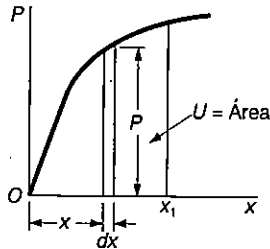


Fig. 10.3

O trabalho realizado pela força P enquanto ela é gradualmente aplicada à barra deve resultar em alguma energia acumulada na barra associada à sua deformação. Essa energia é designada de *Energia de Deformação* ou de *Trabalho de Deformação* da barra. Por definição, temos

$$\text{Trabalho de Deformação} = U = \int_0^{x_1} P \cdot dx \quad (10.2)$$

Lembramos que trabalho e energia devem ser expressos em unidades obtidas pelo produto de unidade de comprimento por unidade de força. No Sistema Internacional de Unidades, trabalho e energia são expressos em $N \cdot m$. Essa unidade é chamada de *joule* (J).

No caso de uma deformação linear e elástica, a porção do diagrama força-deformação referente ao problema estudado pode ser representada por uma linha reta de equação $P = kx$ (Fig. 10.4). Substituindo essa expressão de P na Eq. (10.2), temos

$$U = \int_0^{x_1} kx \, dx = \frac{1}{2} kx_1^2$$

ou

$$U = \frac{1}{2} P_1 x_1 \quad (10.3)$$

onde P_1 é o valor da carga correspondente ao valor da deformação x_1 .

O conceito de trabalho de deformação σ é particularmente útil na determinação dos efeitos de choques e impactos provocados por carregamentos em componentes de máquinas e componentes estruturais.

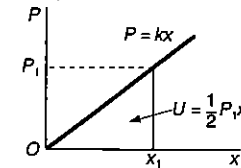


Fig. 10.4

Consideremos, por exemplo, um corpo de massa m movendo-se com velocidade v_0 que se choca contra a extremidade B da barra AB (Fig. 10.5a). Se desprezarmos a inércia dos elementos da barra, e adotarmos que não ocorre dissipação de energia durante o impacto, vemos que a máxima energia de deformação U_m adquirida pela barra (Fig. 10.5b) é igual à energia cinética original do corpo em movimento $T = \frac{1}{2} m v_0^2$. Podemos então determinar o valor P_m do carregamento estático que produziria a mesma energia de deformação na barra, e obter então o valor da tensão máxima σ_m que ocorre na barra, dividindo P_m pela área da seção transversal da barra.

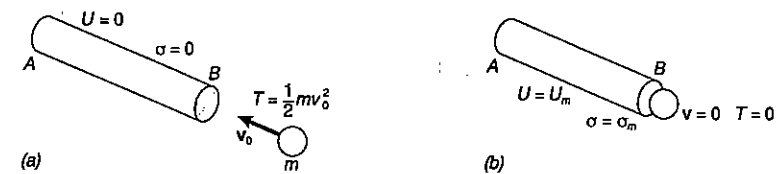


Fig. 10.5

10.3 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICO

Vimos na Sec. 2.2 que o diagrama força-deformação de uma barra BC depende do comprimento L e da área da seção transversal A da barra. Assim, o trabalho de deformação U definido pela Eq. 10.2 também vai depender das dimensões da barra. Para que nossa análise não fique presa às dimensões da barra e possa ser dirigida para as propriedades do material, vamos considerar o trabalho de deformação por unidade de volume. Dividindo o trabalho de deformação U pelo volume da barra V = AL (Fig. 10.1), e usando a Eq. 10.2, temos

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$

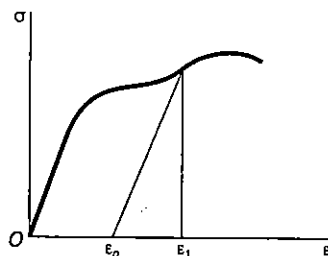


Fig. 10.6

Mas P/A representa a tensão normal σ_x da barra, e x/L representa a deformação específica ϵ_x . Escrevemos então

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x$$

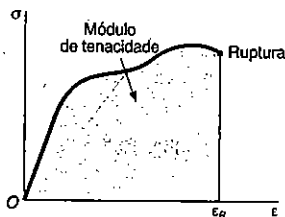


Fig. 10.7

onde ϵ_1 representa o valor da deformação específica correspondente ao alongamento x_1 . O trabalho de deformação por unidade de volume, U/V , é designado *trabalho de deformação específico*, convencionalmente denotado pela letra u . Temos, dessa maneira,

$$\text{Trabalho de deformação específico} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x \quad (10.4)$$

O trabalho de deformação específico u é expresso em unidades obtidas da divisão de unidades de trabalho por unidades de volume. Se o Sistema Internacional for usado, o trabalho de deformação específico será expresso por J/m^3 ou seus múltiplos¹ kJ/m^3 e MJ/m^3 .

Recorrendo à Fig. 10.6, vemos que o trabalho de deformação específico u é igual à área do diagrama tensão-deformação específica, medida de $\epsilon_x = 0$ a $\epsilon_x = \epsilon_1$. Se o material for descarregado, as tensões caem para zero, mas ocorre uma deformação permanente representada por ϵ_p , e só a parte do trabalho de deformação específica correspondente à área triangular pode ser recuperada. O restante da energia se perde na forma de calor.

O valor do trabalho de deformação específico que se obtém fazendo-se $\epsilon_1 = \epsilon_R$, na Eq. 10.4, onde ϵ_R é a deformação específica na ruptura, é conhecido como *módulo de tenacidade* do material. Ele é igual à área total limitada pelo diagrama tensão-deformação específica. (Fig. 10.7) e representa a energia por unidade de volume necessária para provocar a ruptura do material. Fica claro que a dureza de um material é diretamente relacionada com sua dutibilidade e com sua tensão última (Sec. 2.3), e que a capacidade de uma estrutura resistir a uma força de impacto depende da tenacidade do material.

Se a tensão normal σ_x permanece abaixo do limite de proporcionalidade do material, a lei de Hooke pode ser aplicada e podemos escrever

$$\sigma_1 = E\epsilon_x \quad (10.5)$$

Substituindo em (10.4) a expressão acima, temos

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2} \quad (10.6)$$

1 Podemos notar que $1J/m^3$ e $1Pa$ são ambos iguais $1N/m^2$, e, assim, trabalho de deformação específico e tensão são dimensionalmente iguais e podem ser expressos na mesma unidade.

ou, expressando ϵ_1 em termos da tensão correspondente σ_1 na Eq. 10.5,

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \quad (10.7)$$

O valor u_e do trabalho de deformação específico que se obtém fazendo-se $\sigma_1 = \sigma_e$ na Eq. 10.7, onde σ_e é a tensão de escoamento, é chamado *módulo de resiliência* do material. Temos

$$u_e = \frac{\sigma_e^2}{2E} \quad (10.8)$$

O módulo de resiliência é igual à área sob o diagrama tensão-deformação correspondente à reta OY (Fig. 10.8) e representa a energia por unidade de volume que o material pode absorver sem entrar em escoamento. A capacidade do material estrutural suportar um impacto sem ficar deformado permanentemente depende de sua resiliência.

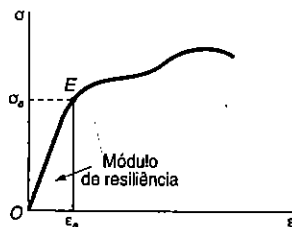


Fig. 10.8

O módulo de tenacidade e o módulo de resiliência representam valores característicos do trabalho de deformação específico do material estudado, e serão expressos no Sistema Internacional de Unidades em J/m^3 .

2 Entretanto, recordando a nota da página anterior, percebemos que o módulo de tenacidade e o módulo de resiliência podem ser expressos nas mesmas unidades da tensão.

10.4 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA PARA TENSÕES NORMAIS

A barra analisada na seção anterior estava submetida à tensão uniformemente distribuída σ_x , e o trabalho específico de deformação era constante ao longo da barra, podendo ser definido pela relação U/V entre o trabalho de deformação U e o volume V da barra. Em uma peça estrutural ou componente de máquina com distribuição de tensões não uniforme, o trabalho de deformação específico u pode ser definido considerando-se a energia de deformação de um pequeno elemento de material de volume ΔV e escrevendo

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

ou

$$u = \frac{dU}{dV} \quad (10.9)$$

A expressão obtida para u na Sec. 10.2 em função de σ_x e de ϵ_x continua válida, e temos ainda

$$u = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x \quad (10.10)$$

mas agora a tensão σ_x , a deformação específica ϵ_x e o trabalho de deformação específico u geralmente vão variar de um ponto a outro.

Para valores de σ_x dentro do limite de proporcionalidade, podemos fazer $\sigma_x = E\epsilon_x$ na Eq. 10.10 e escrever

$$u = \frac{1}{2} E\epsilon_x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} \quad (10.11)$$

Levando o valor de u dado pela Eq. 10.10 na Eq. 10.9 e integrando os dois membros, obtemos o valor do trabalho de deformação U de um corpo submetido a tensões normais uniaxiais. Temos

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad (10.12)$$

A expressão obtida só é válida para deformações elásticas e é conhecida como *trabalho de deformação elástica* do corpo.

Trabalho de deformação para carga axial. Vimos na Sec. 2.16 que, para uma barra submetida a carregamento axial centrado, podemos adotar que as tensões normais σ_x estejam uniformemente distribuídas em qualquer seção transversal. Se A é a área da seção localizada a uma distância x da extremidade B da barra (Fig. 10.9), P é o esforço interno na seção, temos $\sigma_x = P/A$. Substituindo esse valor de σ_x na Eq. 10.12, escrevemos

$$U = \int \frac{P^2}{2EA^2} dV$$

ou, fazendo $dV = Adx$,

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx \quad (10.13)$$

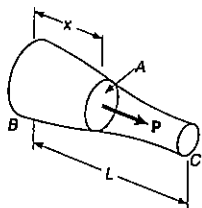


Fig. 10.9

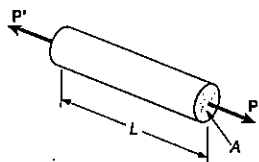


Fig. 10.10

No caso de uma barra de seção transversal uniforme sujeita em suas extremidades a forças de mesma intensidade P e sentidos opostos (Fig. 10.10), a Eq. 10.13 conduz a

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (10.14)$$

EXEMPLO 10.1

Uma barra se compõe de dois trechos BC e CD do mesmo material e de mesmo comprimento, mas com seções transversais diferentes (Fig. 10.11). Determinar o trabalho de deformação da barra quando ela fica sujeita a uma força centrada P , exprimindo o resultado em função de P, L, E da área A da seção do trecho CD , e da relação n entre os dois diâmetros.

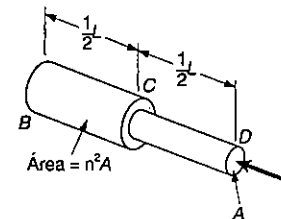


Fig. ex.10.11

Usamos a Eq. 10.14 para calcular o trabalho de deformação de cada uma das duas partes, somando as expressões encontradas:

$$U_n = \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2AE} + \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2(n^2A)E} = \frac{P^2 L}{4AE} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$U_n = \frac{1 + n^2}{2n^2} \frac{P^2 L}{2AE} \quad (10.15)$$

Verificamos que, para $n = 1$, temos

$$U_1 = \frac{P^2 L}{2AE}$$

que é a expressão dada na Eq. 10.14 para uma barra de comprimento B e seção transversal uniforme de área A . Vemos ainda que, para $n > 1$, temos $U_n < U_1$; por exemplo, quando $n = 2$, $U_2 = (5/8)U_1$. Como a tensão máxima ocorre no trecho CD da barra, sendo igual a $\sigma_{máx} = P/A$, conclui-se para uma dada tensão admissível, o fato de aumentar-se o diâmetro do trecho BC resulta em uma *perda* de capacidade de absorção de energia da barra toda. Devemos então evitar mudanças desnecessárias de seção transversal no projeto de peças estruturais que possam eventualmente ficar submetidas a impactos de forças, quando é importante a capacidade de absorção de energia da peça estrutural.

EXEMPLO 10.2

Duas barras de mesmo material e de mesma seção transversal de área A suportam uma força P no ponto B (Fig. 10.12). Determinar o trabalho do sistema.

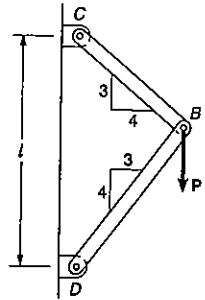


Fig. ex.10.12

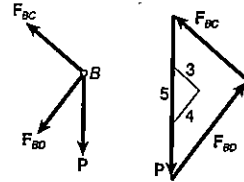


Fig. ex.10.13

Chamamos de F_{BC} e F_{BD} , respectivamente, as forças nas barras BC e BD . Recorrendo à Eq. 10.14, expressamos o trabalho de deformação do sistema por

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE} \quad (10.16)$$

A Fig. 10.12 indica que

$$BC = 0,6l \quad BD = 0,8l$$

e do diagrama de corpo livre do pino B e do triângulo de forças correspondentes (Fig. 10.13) temos que

$$F_{BC} = +0,6P \quad F_{BD} = -0,8P$$

Substituindo na Eq. 10.16, obtemos

$$U = \frac{P^2 l [(0,6)^3 + (0,8)^3]}{2AE} = 0,364 \frac{P^2 l}{AE}$$

Trabalho de deformação na flexão. Consideremos a viga AB submetida ao carregamento dado (Fig. 10.14), e seja M o momento fletor a uma distância x do plano A . Desprezando por enquanto a influência da força cortante, e lembrando que a tensão normal $\sigma_x = My/I$, substituímos essa expressão na Eq. (10.12) escrevendo

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV$$

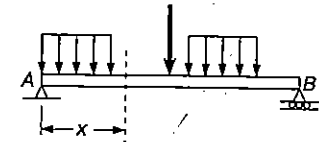


Fig. ex.10.14

Fazendo $dV = dA dx$, onde dA representa um elemento da área da seção transversal, e lembrando que $M^2/2EI^2$ é uma função apenas de x , podemos escrever

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} (\int y^2 dA) dx$$

Mas a integral entre parênteses representa o momento de inércia I da seção transversal em relação à linha neutra e escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (10.17)$$

EXEMPLO 10.3

Determinar o trabalho de deformação da viga prismática em balanço AB (Fig. 10.15), levando em conta apenas o efeito das tensões normais.

O momento fletor a uma distância x da extremidade A é $M = -Px$. Substituindo esse valor na Eq. 10.17, escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

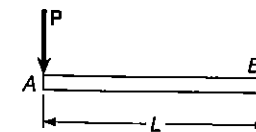


Fig. ex.10.15

10.5 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA PARA TENSÕES DE CISALHAMENTO

Quando um material está submetido a tensões planas de cisalhamento τ_{xy} , o trabalho específico de deformação pode ser expresso por

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \tag{10.18}$$

onde γ_{xy} é a deformação de cisalhamento correspondente à tensão τ_{xy} (Fig. 10.16a). Observamos que o trabalho de deformação específico u é igual à área sob o diagrama de tensão-deformação para tensões de cisalhamento (Fig. 10.16b).

Para valores de τ_{xy} abaixo do limite de proporcionalidade, temos $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, sendo G o módulo de elasticidade transversal do material. Substituindo esse valor de τ_{xy} na Eq. 10.18 e integrando, escrevemos

$$u = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{10.19}$$

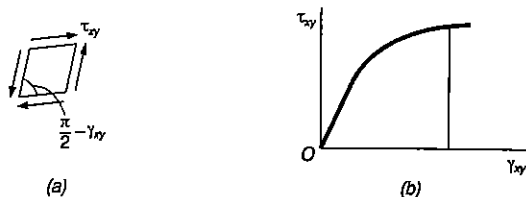


Fig. 10.16

Recorrendo à Sec. 10.4, sabemos que o trabalho de deformação específico é dado pela relação abaixo, o que nos permite obter o trabalho de deformação U de um corpo submetido a tensões planas de cisalhamento.

$$u = \frac{dU}{dV} \tag{10.9}$$

Substituindo o valor de u da Eq. 10.19 na Eq. 10.9 e integrando os dois membros, vamos ter

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \tag{10.20}$$

Essa expressão define o trabalho de deformação elástica referente às deformações de cisalhamento de um corpo. Ela só é válida para deformações elásticas, do mesmo modo que a expressão semelhante obtida na Sec. 10.4 para tensões normais uniaxiais.

Trabalho de deformação na torção. Consideremos o eixo BC de comprimento L submetido a um ou a vários conjugados de torção. Seja J o momento de inércia polar da seção situada a uma distância x do ponto B (Fig. 10.17). Se T é o momento torçor na seção, as tensões de cisalhamento na seção são dadas por $\tau_{xy} = T\rho/J$. Substituindo esse valor na Eq. 10.20, encontramos

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$$

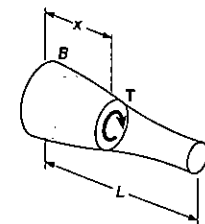


Fig. 10.17

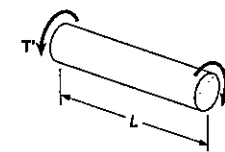


Fig. 10.18

Fazendo então $dV = dA dx$, onde dA é um elemento da área da seção transversal, e observando que $T^2/2GJ^2$ é função apenas de x , escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int \rho^2 dA \right) dx$$

Mas a integral entre parênteses representa o momento de inércia polar J da seção transversal, e vamos ter

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (10.21)$$

No caso de um eixo de seção transversal uniforme submetido a conjugados de torção iguais e de sentido contrário aplicados nas suas extremidades (Fig. 10.18), a Eq. 10.21 fica sendo

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad (10.22)$$

EXEMPLO 10.4

Um eixo circular consiste de dois trechos de mesmo material e mesmo comprimento, *CD* e *BC*, que têm seções transversais diferentes (Fig. 10.19). Determinar o trabalho de deformação do eixo quando ele fica submetido a um conjugado de torção aplicado na extremidade *D*. Expressar o resultado em termos de *T*, *L*, *G*, do momento polar de inércia *J*, da menor seção transversal e da relação *n* entre dois diâmetros.

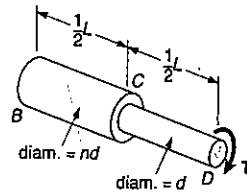


Fig. ex.10.19

Usamos a expressão (10.22) para calcularmos o trabalho de deformação de cada um dos trechos, somando os resultados obtidos. O momento de inércia polar no trecho *BC* é igual a $n^4 J$. Podemos escrever

$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2}{4GJ} \left(1 + \frac{1}{n^4} \right)$$

$$U_n = \frac{1 + n^4}{2n^4} \frac{T^2 L}{2GJ} \quad (10.23)$$

Verificamos que, para $n = 1$, vamos ter

$$U_1 = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

que é a expressão dada pela Eq. 10.22 para um eixo de comprimento *L* e seção transversal uniforme. Vemos que para $n > 1$, temos $U_n < U_1$; por exemplo quando $n = 2$, encontramos $U_2 = (17/32)U_1$. Como a máxima tensão de cisalhamento ocorre na parte *CD* do eixo, sendo proporcional ao torque *T*, verificamos, como já o fizemos anteriormente no caso de carregamento axial, que, para uma dada tensão admissível, o aumento do diâmetro da parte *BC* resulta numa queda da capacidade de absorção de energia de todo o eixo.

Trabalho de deformação para carregamento transversal. Na Sec. 10.4 foi obtida uma expressão para o trabalho de deformação de uma viga submetida a carga transversal. No entanto, na dedução dessa expressão foi levado em conta apenas o efeito das tensões normais devidas à flexão, sendo desprezado o efeito das tensões de cisalhamento. Vamos agora levar em conta o efeito dos dois tipos de tensão.

EXEMPLO 10.5

Determinar o trabalho de deformação da viga em balanço *AB* (Fig. 10.20), de seção retangular, levando em conta o efeito das tensões normais e de cisalhamento.

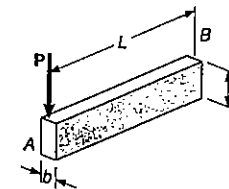


Fig. ex.10.20

No Ex. 10.3 foi determinado que o trabalho de deformação devido às tensões normais σ_x é

$$U_\sigma = \frac{P^2 L^2}{6EI}$$

Para determinarmos o trabalho de deformação U_τ devido às tensões de cisalhamento τ_{xy} recorreremos à Eq. 5.13 da Sec. 5.6, que dá o valor dessa tensão para uma viga de seção retangular de largura *b* e altura *h*.

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Substituindo esse valor de τ_{xy} na Eq. 10.20, escrevemos

$$U_\tau = \frac{1}{2G} \left(\frac{3}{2} \frac{P}{bh}\right)^2 \int \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

ou, fazendo $dV = b \, dy \, dx$, após algumas simplificações,

$$U_\tau = \frac{9P^2}{8Gbh^2} \int_{-c}^c \left(1 - 2\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^4}{c^4}\right) dy \int_0^L dx$$

Integrando e lembrando que $c = h/2$, temos

$$U_\tau = \frac{9P^2L}{8Gbh^2} \left[y - \frac{2}{3} \frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5} \frac{y^5}{c^4} \right]_{-c}^c = \frac{3P^2L}{5Gbh} = \frac{3P^2L}{5GA}$$

O trabalho de deformação total da viga é

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5GA}$$

Como $I/A = h^2/12$, fatoramos a expressão para U_σ encontrando

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI} \left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = U_\sigma \left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) \quad (10.24)$$

Na Sec. 2.14 vimos que $G \geq E/3$, de modo que o parêntese na expressão acima é menor que $1 + 0,9(h/L)^2$ e, assim, quando o efeito do cisalhamento é desprezado. Para uma viga com relação h/L menor que $1/10$ a porcentagem de erro fica abaixo de 0,9%. Na prática é costume desprezar o efeito das tensões de cisalhamento devido a esse pequeno erro.

*10.6 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO PARA O CASO GERAL DE TENSÕES

Na análise feita até agora, foi determinado o trabalho de deformação de um corpo em estado uniaxial de tensão (Sec. 10.4) e em estado plano de tensões de cisalhamento (Sec. 10.5). No caso de um corpo submetido a um caso geral de tensões caracterizado

pelos seis componentes de tensão $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ e τ_{zx} , podemos obter o trabalho de deformação específico somando as expressões dadas pelas Eqs. 10.10 e 10.18, juntamente com outras quatro expressões obtidas por permutação dos índices.

Para uma deformação elástica de um corpo isotrópico, cada uma das seis componentes envolvidas é linear, e o trabalho de deformação específico pode ser expresso por

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (10.25)$$

Recorrendo às relações (2.38) da Sec. 2.14, e substituindo as componentes de tensão na Eq. 10.25, temos, para o caso geral de tensões em um dado ponto de um material elástico e isotrópico

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (10.26)$$

Se usarmos os eixos principais nesse ponto como eixos coordenados, as tensões de cisalhamento serão nulas e a Eq. 10.26 se reduz a

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_c + \sigma_c \sigma_a)] \quad (10.27)$$

onde σ_a, σ_b e σ_c são as tensões principais nesse ponto.

Na Sec. 6.7 estudamos um critério usado para verificar se um certo estado de tensões poderia causar escoamento em um material dúctil, o critério da máxima energia de distorção. Esse critério se baseia na determinação da energia por unidade de volume associada à distorção, ou mudança de forma do material. Vamos então separar o trabalho de deformação específico u em um certo ponto do material em duas partes, uma parte u_v referente à mudança de volume do material nesse ponto, e outra parte u_d referente à distorção, ou mudança de forma, do material no mesmo ponto. Escrevemos

$$u = u_v + u_d \quad (10.28)$$

Com o objetivo de determinar u_v e u_d , vamos tomar o valor médio $\bar{\sigma}$ das tensões principais no ponto considerado.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}{3} \quad (10.29)$$

e fazer

$$\sigma_a = \bar{\sigma} + \sigma'_a \quad \sigma_b = \bar{\sigma} + \sigma'_b \quad \sigma_c = \bar{\sigma} + \sigma'_c \quad (10.30)$$

Assim, o estado de tensões dado pode ser obtido por superposição dos estados de tensão indicados nas Figs. 10.21b e c. O estado de tensões descrito pela Fig. 10.21b tende a mudar o volume do elemento, mas não sua forma, uma vez que as faces do elemento estão submetidas todas à mesma tensão $\bar{\sigma}$. Por outro lado, podemos ver pelas Eqs. 10.29 e 10.30 que

$$\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c = 0 \quad (10.31)$$

o que indica que algumas das tensões que aparecem na Fig. 10.21c são de tração e outras de compressão. Então, esse estado de tensões tende a modificar a forma do elemento, sem, no entanto, modificar o seu volume. Realmente, se lembrarmos da Eq. 2.31 da Sec. 2.13, vamos ver que a variação no volume por unidade de volume e , provocada por esse estado de tensões, é

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c)$$

sendo $e = 0$, em vista da Eq. 10.31. Concluimos dessas observações que a parte u_v do trabalho de deformação específico deve ser relacionada com o estado de tensões indicado na Fig. 10.21b, enquanto a parte u_d deve ser relacionada com o estado de tensões indicado na Fig. 10.21c.

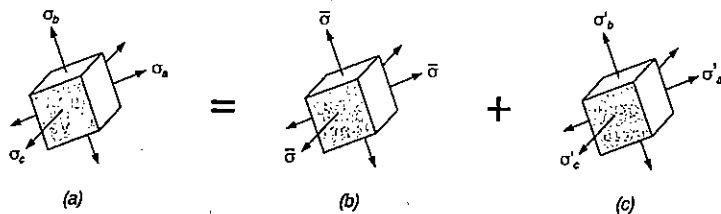


Fig. 10.21

Em consequência, a parte u_v do trabalho de deformação específico, correspondente à mudança de volume do elemento, pode ser obtida pela substituição, na Eq. 10.27, de cada tensão principal por $\bar{\sigma}$. Temos

$$u_v = \frac{1}{2E} [3\bar{\sigma}^2 - 2\nu(3\bar{\sigma}^2)] = \frac{3(1 - 2\nu)}{2E} \bar{\sigma}^2$$

ou, usando a Eq. 10.29,

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \quad (10.32)$$

Para obtermos a parte u_d do trabalho de deformação específico correspondente à distorção do elemento, vamos calcular u_d substituindo os valores de u e u_v já obtidos na Eq. 10.28. Escrevemos

$$u_d = u - u_v = \frac{1}{6E} [3(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2) - 6\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a) - (1 - 2\nu)(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2]$$

Elevando ao quadrado e reagrupando os termos, obtemos

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_a^2 - 2\sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) + (\sigma_b^2 - 2\sigma_b\sigma_c + \sigma_c^2) + (\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_a + \sigma_a^2)]$$

Cada termo dentro dos parênteses é um quadrado perfeito. A Eq. 2.43 da Sec. 2.15 mostrou que o coeficiente em frente aos parênteses é igual a $1/12G$. Podemos então obter a expressão abaixo para a parte u_d do trabalho específico de deformação, isto é, para a energia de distorção por unidade e volume,

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \quad (10.33)$$

No caso de um estado *plano de tensões*, se considerarmos que o eixo c é perpendicular ao plano das tensões, temos $\sigma_c = 0$, e a Eq. 10.33 se reduz a

$$u_d = \frac{1}{6G} (\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \quad (10.34)$$

Vamos considerar o caso particular de um corpo de prova em ensaio de tração, onde, no escoamento, temos $\sigma_a = \sigma_c$ e $\sigma_b = 0$. Nesse caso $(u_d)_e = \sigma_e^2/6G$. Pelo critério da máxima energia de distorção para um estado plano de tensões, um certo estado de tensões é seguro enquanto $u_d < (u_d)_e$, ou, substituindo u_d na Eq. 10.34, enquanto

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_e^2 \quad (6.26)$$

que é a mesma condição estabelecida na Sec. 6.7 e representada graficamente pela elipse da Fig. 6.39. No caso do estado geral de tensões, a expressão (10.33) deve ser usada. O critério da máxima energia de distorção é expresso pela condição

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 < 2\sigma_e^2 \quad (10.35)$$

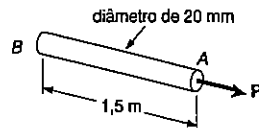
que indica que a condição para que um estado de tensões seja seguro é que o ponto de coordenadas $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ se localize no interior da superfície definida pela equação:

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (10.36)$$

Podemos verificar que essa superfície é um cilindro circular de raio $\sqrt{2/3} \sigma_e$ com eixo formando ângulos iguais com os eixos principais de tensão.

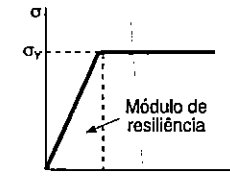
PROBLEMA RESOLVIDO 10.1

Durante uma operação de rotina de fabricação, a barra AB deve adquirir um trabalho de deformação elástica de $14,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Sabendo-se que $E = 200 \text{ GPa}$, determinar qual deve ser a tensão de escoamento do aço, se o coeficiente de segurança em relação à deformação permanente deve ser igual a cinco.



Coeficiente de segurança. Como se deseja um coeficiente de segurança igual a cinco, a barra deve ser projetada para um trabalho de deformação de

$$U = 5(14 \text{ N} \cdot \text{m}) = 70 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Trabalho de deformação específico. O volume da barra é

$$V = AL = \frac{\pi}{4} (0,02 \text{ m})^2 (1,5 \text{ m}) = 47,12 \text{ N} \cdot \text{m} \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Como a barra tem seção uniforme, o trabalho de deformação específico é

$$u = \frac{U}{V} = \frac{70 \text{ N} \cdot \text{m}}{47,12 \times 10^{-5} \text{ m}^3} = 148560 \text{ N} \cdot \text{m/m}^3$$

Tensões de escoamento. O módulo de resiliência é igual ao trabalho de deformação específico quando a tensão máxima é igual a σ_e . Pela Eq. 10.8, escrevemos

$$u = \frac{\sigma_e^2}{2E}$$

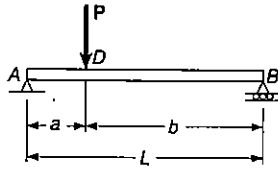
$$148560 \text{ N} \cdot \text{m/m}^3 = \frac{\sigma_e^2}{2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}$$

$$\sigma_e = 243,8 \text{ MPa}$$

Comentário. Como o trabalho de deformação não é linearmente relacionado com a tensão, os coeficientes de segurança referentes ao trabalho de deformação devem ser aplicados ao trabalho de deformação e não às tensões.

PROBLEMA RESOLVIDO 10.2

Pede-se: (a) Determinar o trabalho de deformação da viga prismática AB para o carregamento indicado, levando em conta apenas o efeito das tensões normais devidas à flexão. (b) Calcular o trabalho de deformação sabendo-se que a viga é um perfil W250x67, $P = 200 \text{ kN}$, $L = 3,6 \text{ m}$, $a = 0,9 \text{ m}$, $b = 2,7 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$.

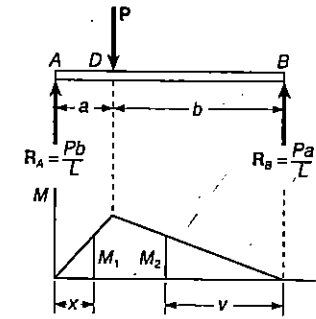


Momento fletor. Usando o diagrama de corpo livre de toda a viga, determinamos as reações de apoio

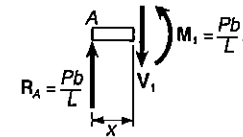
$$R_A = \frac{Pb}{L} \uparrow \quad R_B = \frac{Pa}{L} \uparrow$$

No trecho AD do diagrama, o momento fletor é

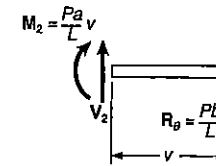
$$M_1 = \frac{Pb}{L} x$$



De A a D:D:



De B a D: D:



No trecho BD, o momento fletor a uma distância v da extremidade B é

$$M_2 = \frac{Pa}{L} v$$

(a) **Trabalho de deformação.** O trabalho de deformação é uma grandeza escalar, e podemos somar o trabalho de deformação do trecho AD àquele do trecho DB para obter o trabalho de deformação total da viga. Pela Eq. 10.17, escrevemos

$$U = U_{AD} + U_{DB} \\ = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI} dv$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{L} x \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{L} v \right)^2 dv$$

$$= \frac{1}{2EI} \frac{P^2}{L^2} \left(\frac{b^2 a^3}{3} + \frac{a^2 b^3}{3} \right) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL^2} (a + b)$$

ou, como $(a + b) = L$,

$$U = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL}$$

(b) **Cálculo do trabalho de deformação.** Obtemos no Apêndice C o momento de inércia do perfil W250 x 67. Os outros dados estão relacionados abaixo.

$$P = 200 \text{ kN} \quad L = 3,6 \text{ m}$$

$$a = 0,9 \text{ m} \quad E = 200 \text{ GPa}$$

$$b = 2,7 \text{ m} \quad I = 103,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$= 103,2 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Substituindo os valores na expressão do trabalho de deformação, temos

$$U = \frac{(200 \times 10^3 \text{ N})^2 (0,9 \text{ m})^2 (2,7 \text{ m})^2}{6(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(103,2 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(3,6 \text{ m})}$$

$$U = 529,7 \text{ N} \cdot \text{m} \approx 0,53 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PROBLEMAS

10.1 Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar o módulo de resiliência para cada um dos tipos de aço estrutural seguintes:

- (a) ASTM A-36; $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$
- (b) ASTM A-441; $\sigma_e = 320 \text{ MPa}$
- (c) ASTM A-514; $\sigma_e = 690 \text{ MPa}$

10.2 Determinar o módulo de resiliência para cada uma das seguintes ligas de alumínio:

- (a) 1100-H14; $E = 70 \text{ GPa}$; $\sigma_e = 100 \text{ MPa}$
- (b) 2014-T6; $E = 75 \text{ GPa}$; $\sigma_e = 400 \text{ MPa}$
- (c) 7075-T6; $E = 72 \text{ GPa}$; $\sigma_e = 500 \text{ MPa}$

10.3 Determinar o módulo de resiliência para cada uma das seguintes ligas:

- (a) Monel (trabalhado a frio): $E = 180 \text{ GPa}$; $\sigma_e = 585 \text{ MPa}$
- (b) Monel (recozido): $E = 180 \text{ GPa}$; $\sigma_e = 220 \text{ MPa}$
- (c) Liga de titânio: $E = 115 \text{ GPa}$; $\sigma_e = 830 \text{ MPa}$

10.4 Determinar o módulo de resiliência para cada um dos seguintes metais:

- (a) Aço inoxidável (laminado a frio) $E = 190 \text{ GPa}$ $\sigma_e = 520 \text{ MPa}$
- (b) Aço inoxidável (temperado) $E = 190 \text{ GPa}$ $\sigma_e = 260 \text{ MPa}$
- (c) Ferro fundido maleável $E = 165 \text{ GPa}$ $\sigma_e = 230 \text{ MPa}$

10.5 O diagrama tensão-deformação mostrado foi desenhado a partir dos dados obtidos durante um ensaio de tração de um corpo de prova de um aço estrutural. Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) o módulo de resiliência do aço; (b) por meio aproximado o módulo de tenacidade do aço.

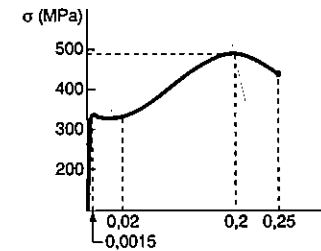


Fig. P10.5

10.6 O diagrama tensão-deformação mostrado foi desenhado a partir dos dados obtidos durante um ensaio de tração de um corpo de prova de uma liga de alumínio. Usando $E = 72 \text{ GPa}$, determinar: (a) o módulo de resiliência da liga; (b) por meio aproximado, o módulo de tenacidade da liga.

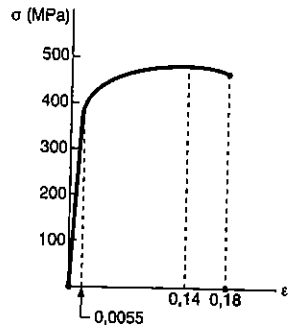


Fig. P10.6

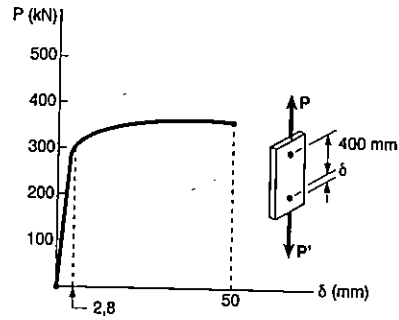


Fig. P10.7

10.7 O diagrama carga-deformação mostrado foi desenhado a partir dos dados obtidos durante um ensaio de tração de um corpo de prova de uma liga de alumínio. Sabendo-se que a área da seção transversal do CDP era 600 mm^2 , e que a deformação foi tomada usando um comprimento de medição igual a 400 mm , determinar por meio aproximado: (a) o módulo de resiliência da liga; (b) o módulo de tenacidade da liga.

10.8 O diagrama carga-deformação mostrado foi desenhado a partir dos dados obtidos durante o ensaio de tração de uma barra de aço estrutural com 16 mm de diâmetro. Sabendo-se que a deformação foi tomada usando um comprimento de medição de 460 mm , determinar por meio aproximado: (a) o módulo de resiliência do aço; (b) o módulo de tenacidade do aço.

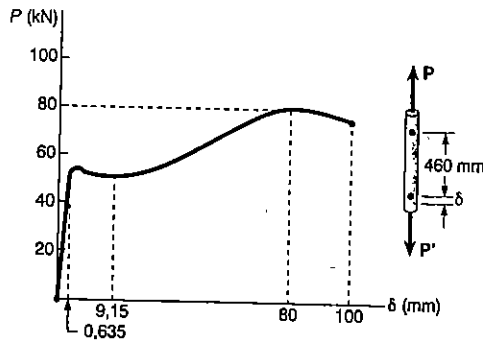


Fig. P10.8

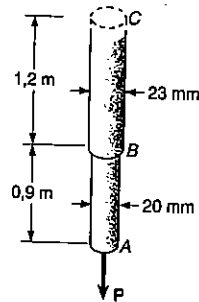


Fig. P10.9

10.9 Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a energia de deformação na barra de aço ABC, quando $P = 60 \text{ kN}$; (b) a correspondente densidade de energia de deformação nas porções AB e BC da barra.

10.10 Usando $E = 75 \text{ GPa}$, determinar: (a) a energia de deformação na barra de alumínio ABC, quando $a = 1,2 \text{ m}$; (b) a correspondente densidade de energia de deformação nas porções AB e BC da barra.

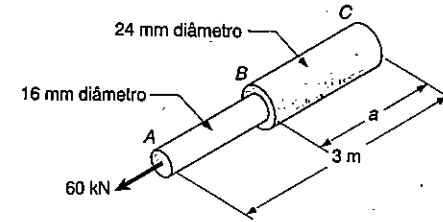


Fig. P10.10

10.11 Resolver o Prob. 10.10, quando $a = 1,8 \text{ m}$.

10.12 Uma força P de intensidade 10 kN é aplicada em cada uma das barras de aço mostrada. Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar: (a) a energia de deformação absorvida pela barra a; (b) o comprimento necessário l , se a energia de deformação absorvida pela barra b é 90% da energia de deformação adquirida pela barra a.

10.13 Cada uma das barras mostradas é feita de um aço com a tensão de escoamento igual a $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ e o módulo de elasticidade de $E = 200 \text{ GPa}$. Sabendo-se que $l = 380 \text{ mm}$, determinar a máxima energia de deformação que pode ser absorvida em cada uma das barras, sem que cause qualquer deformação permanente.

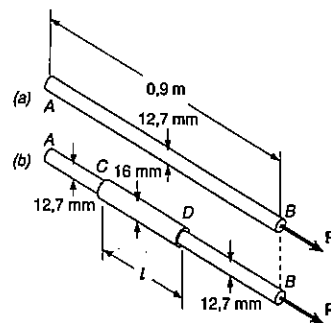


Fig. P10.12 e P10.13

10.14 A barra AB é feita de uma liga de alumínio para a qual a tensão de escoamento é $\sigma_e = 300$ MPa e o módulo de elasticidade é $E = 75$ GPa; a barra BC é feita de um tipo de aço para o qual a $\sigma_e = 420$ MPa e $E = 200$ GPa. Determinar a máxima energia de deformação que pode ser acumulada pela barra composta ABC sem causar qualquer deformação permanente.

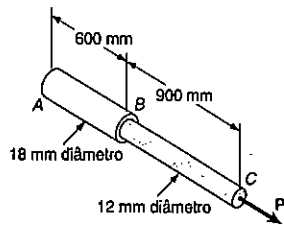


Fig. P10.14

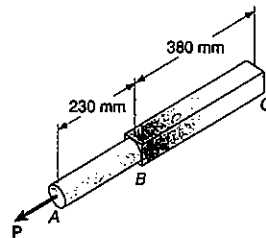


Fig. P10.16

10.15 Resolver o Prob. 10.14, usando as propriedades do material dado e assumindo que a barra ABC é feita inteiramente de: (a) aço; (b) alumínio.

10.16 Uma porção de uma barra de aço quadrada, de 22 mm de lado, foi usinada produzindo um cilindro de diâmetro 22 mm, como mostrado. Sabendo-se que a tensão normal admissível do aço é $\sigma_{adm} = 150$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar, para o carregamento mostrado, a máxima energia de deformação que pode ser acumulada pela barra ABC.

10.17 Uma barra uniforme de 9,5 mm de diâmetro e 2,7 m de comprimento é feita de um aço inoxidável de alta resistência, para o qual $\sigma_e = 860$ MPa e $E = 190$ GPa.

Sabendo-se que uma energia de deformação de $70 \text{ N} \cdot \text{m}$ deve ser absorvida pela barra assim que a carga axial P é aplicada, determinar o coeficiente de segurança da barra com relação à deformação permanente.

10.18 Uma barra AB de 6 mm de diâmetro, com comprimento $L = 2,5$ m é feita de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_e = 320$ MPa e $E = 72$ GPa. Sabendo-se que uma energia de deformação de 10 J deve ser acumulada pela barra assim que a carga axial P é aplicada, determinar o coeficiente de segurança da barra com relação à deformação permanente.

10.19 A barra ABC é feita de um aço para o qual $\sigma_e = 350$ MPa e $E = 200$ GPa. Sabendo-se que uma energia de deformação de $4,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ deve ser acumulada pela barra assim que a carga axial P é aplicada, determinar o coeficiente de segurança da barra em relação a deformação permanente, quando $a = 380$ mm.

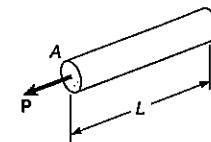


Fig. P10.17 e P17.18

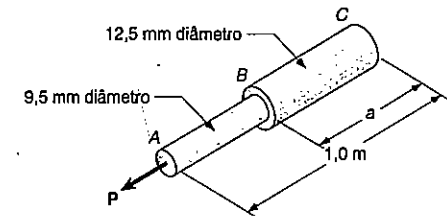


Fig. P10.19

10.20 Resolver o Prob. 10.19, assumindo que $a = 635$ mm.

10.21 A barra AB é feita de um aço reforçado para o qual $\sigma_e = 275$ MPa e $E = 200$ GPa. Uma energia de deformação de 5 J deve ser acumulada pela barra quando a força axial P é aplicada. Sabendo-se que o diâmetro da barra é $d = 9$ mm, determinar o comprimento da barra para a qual o coeficiente de segurança, em relação à deformação permanente, é seis.

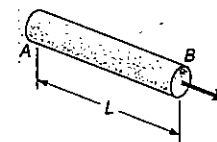


Fig. P10.21 e P10.22

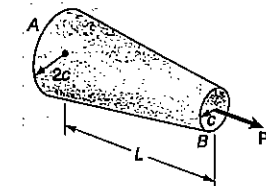


Fig. P10.23

10.22 A barra AB é feita de um aço de alta resistência para o qual $\sigma_e = 750 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$. Uma energia de deformação de 25 J deve ser acumulada pela barra quando a carga axial P é aplicada. Sabendo-se que o comprimento da barra é $L = 2,25 \text{ m}$, determinar o diâmetro da barra para a qual o coeficiente de segurança, com relação à deformação permanente, é cinco.

10.23 Mostrar por integração que a energia de deformação da barra AB, em forma de tronco de cone, é:

$$U = \frac{1}{4} \frac{P^2 L}{EA_{\min}}$$

onde A_{\min} é a área de seção transversal na extremidade B.

10.24 Resolver o Prob. 10.23, usando a barra escalonada mostrada, como uma aproximação da barra em forma de tronco de cone. Qual é a porcentagem de erro na resposta obtida?

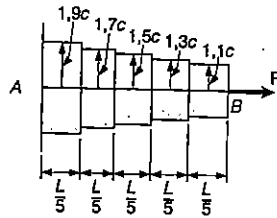


Fig. P10.24

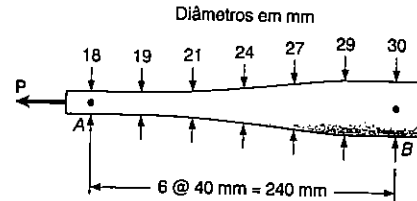


Fig. P10.25

10.25 Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar, por meio aproximado, a máxima energia de deformação que pode ser acumulada pela porção AB de 240 mm, da barra de controle mostrada, se a tensão normal admissível é $\sigma_{adm} = 175 \text{ MPa}$.

10.26 Resolver o Prob. 10.25, assumindo que os dois diâmetros da barra, de 18 mm e 19 mm, foram aumentados para 21 mm. Desta maneira, os três diâmetros à esquerda da barra de controle ficam constantes e de valor igual a 21 mm.

10.27 a 10.30 Na treliça mostrada, todos os membros são feitos de mesmo material e têm as seções transversais uniformes, com as áreas indicadas. Determinar a energia de deformação da treliça, quando a carga P é aplicada.

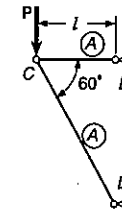


Fig. P10.27

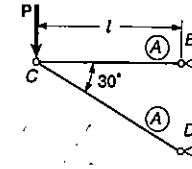


Fig. P10.28

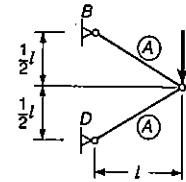


Fig. P10.29

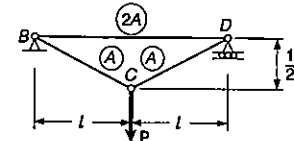


Fig. P10.30

10.31 Cada uma das barras de treliça mostrada é feita de aço e tem a seção transversal com as áreas indicadas. Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a energia de deformação da treliça para o carregamento mostrado.

10.32 Cada uma das barras da treliça mostrada é feita de alumínio e tem a seção transversal com as áreas indicadas. Usando $E = 72 \text{ GPa}$, determinar a energia de deformação da treliça para o carregamento mostrado.

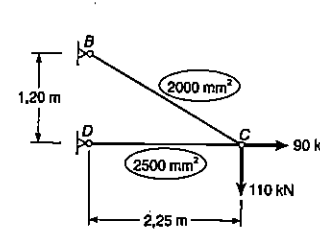


Fig. P10.31

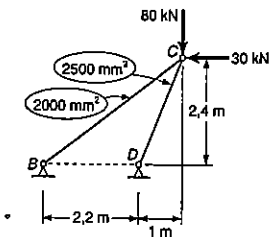


Fig. P10.32

10.33 Resolver o Prob. 10.32, considerando que a carga de 30 kN é removida.

10.34 Resolver o Prob. 10.31, considerando que a carga de 90 kN é removida.

10.35 a 10.38 Levando em conta somente o efeito das tensões normais, determinar a energia de deformação da viga prismática AB para o carregamento mostrado.

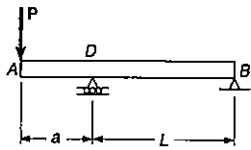


Fig. P10.35

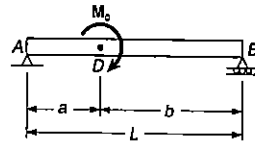


Fig. P10.36

10.39 Assumindo que a viga prismática AB tem uma seção transversal retangular, mostrar que, para o carregamento dado, o máximo valor da densidade de energia de deformação na viga é

$$u_m = 15 \frac{U}{V}$$

onde U é a energia de deformação da viga e V é seu volume.

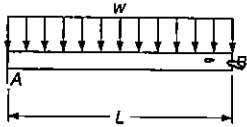


Fig. P10.37 e P10.39

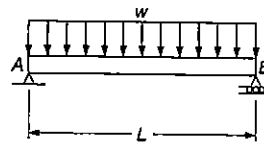


Fig. P10.38 e P10.40

10.40 Assumindo que a viga prismática AB tem uma seção transversal retangular, mostrar que para o carregamento dado, o máximo valor da densidade de energia de deformação específica na viga é

$$u_m = \frac{45}{8} \frac{U}{V}$$

onde U é a energia de deformação da viga e V é seu volume.

10.41 a 10.44 Usando E = 200 GPa, determinar a energia de deformação devido à flexão, para a viga com o carregamento mostrado (desprezar o efeito das tensões de cisalhamento).

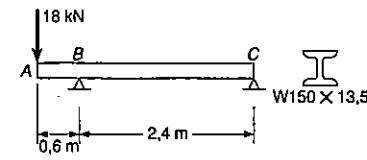


Fig. P10.41

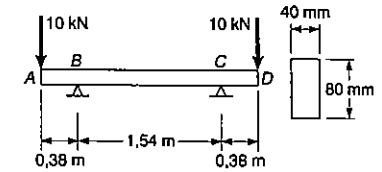


Fig. P10.42

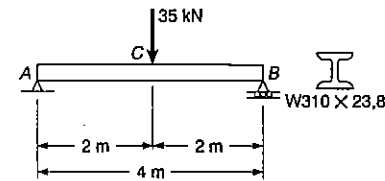


Fig. P10.43

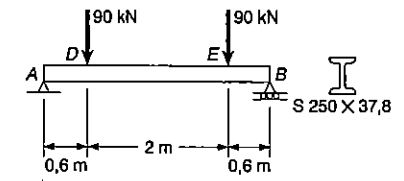


Fig. P10.44

10.45 O eixo maciço de aço mostrado está submetido aos torques de 0,9 kN·m, aplicados nas extremidades A e D. Usando G = 77 GPa, determinar a energia de deformação do eixo.

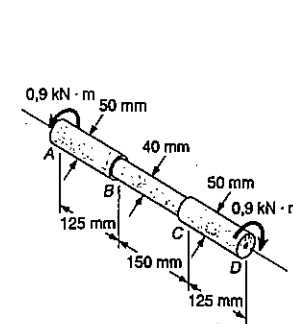


Fig. P10.45

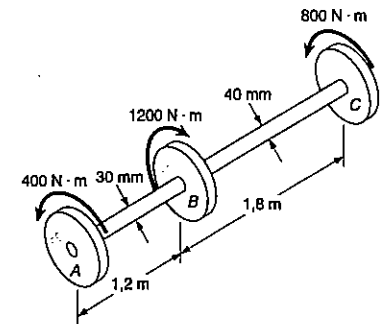


Fig. P10.46

10.46 Os torques mostrados são exercidos nas polias A, B e C. Sabendo-se que ambos os eixos são maciços e feitos de latão ($G = 39 \text{ GPa}$), determinar a energia de deformação no: (a) eixo AB; (b) eixo BC.

10.47 A barra de alumínio AB ($G = 26 \text{ GPa}$) é fortemente ligada à barra de latão BD ($G = 39 \text{ GPa}$). Sabendo-se que a porção CD da barra de latão é vazada e tem um diâmetro interno de 40 mm, determinar a energia de deformação total das duas barras.

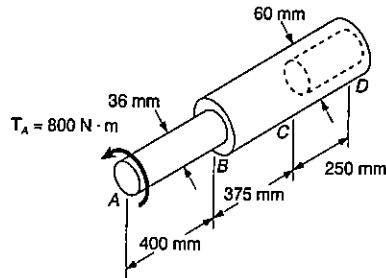


Fig. P10.47

10.48 Dois eixos maciços são conectados pelas duas engrenagens mostradas. Usando $G = 77 \text{ GPa}$, determinar a energia de deformação em cada um dos eixos, quando um torque T de $1130 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado em D.

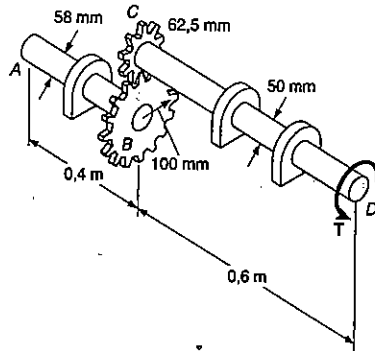


Fig. P10.48

10.49 Mostrar, por integração, que a energia de deformação da barra AB, em forma de tronco de cone, é

$$U = \frac{7}{24} \frac{T^2 L}{G J_{\min}}$$

onde J_{\min} é o momento de inércia polar da seção transversal da barra, na extremidade B.

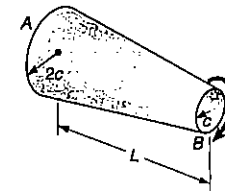


Fig. P10.49

*10.50 Um cilindro vazado de borracha liga uma barra A, de raio R_1 , a um tubo B, de raio interno R_2 , formando um suporte isolante de vibração. Denotando por G o módulo de elasticidade transversal da borracha, determinar a energia de deformação do cilindro vazado de borracha para o carregamento mostrado.

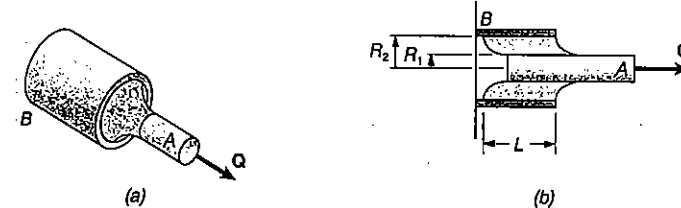


Fig. P10.50

10.51 Para o estado de tensões mostrado na Fig. a, determinar as tensões sobre um elemento orientado como mostrado na Fig. b. Calcular a densidade de energia de deformação específica, inicialmente dado pelo estado de tensões da Fig. a, depois usando a Fig. b. Equacionar os dois resultados obtidos, e mostrar que:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Fig. P10.51

10.52 Determinar a energia de deformação da barra prismática *AB*, levando em conta os efeitos das tensões normais e das tensões cisalhantes.

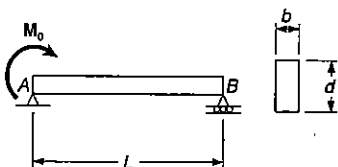


Fig. P10.52

10.53 O estado de tensões mostrado ocorre em um componente de máquina, que é feito de um latão para o qual $\sigma_e = 175 \text{ MPa}$. Usando o critério da máxima energia de distorção, determinar se o escoamento ocorre, quando: (a) $\sigma_z = + 60 \text{ MPa}$; (b) $\sigma_z = - 60 \text{ MPa}$.

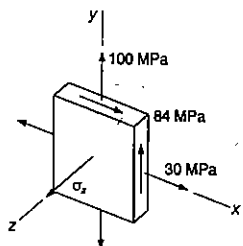


Fig. P10.53 e P10.54

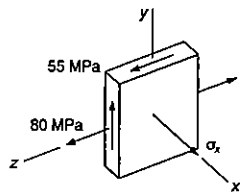


Fig. P10.55 e P10.56

10.54 O estado de tensões mostrado ocorre em um componente de máquina, que é feito de latão para o qual $\sigma_e = 175 \text{ MPa}$. Usando o critério da máxima energia de distorção, determinar a variação dos valores de σ_z , de tal modo que o escoamento não ocorra.

10.55 O estado de tensões mostrado ocorre em um componente de máquina, que é feito de um aço para o qual $\sigma_e = 415 \text{ MPa}$. Usando o critério da máxima energia de distorção, determinar o coeficiente de segurança em relação à tensão de escoamento, quando: (a) $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$; (b) $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$.

10.56 O estado de tensões mostrado ocorre em um componente de máquina, que é feito de um aço para o qual $\sigma_e = 415 \text{ MPa}$. Usando o critério da máxima energia de distorção, determinar a variação dos valores de σ_z , de tal modo que o coeficiente de segurança, em relação a tensão de escoamento, seja igual ou superior a 2,5.

10.7 CARREGAMENTO PRODUZIDO POR IMPACTO

Consideremos a barra *BD* de seção transversal uniforme, que recebe o impacto da massa *m*, movendo-se à velocidade v_0 , na extremidade *B* (Fig. 10.22a). A barra se deforma pela ação do impacto (Fig. 10.22b) e ocorrem tensões do material que atingem o valor máximo σ_m . Durante um certo tempo a barra permanece vibrando e, quando entra em repouso, as tensões desaparecem. Essa seqüência de eventos é chamada *carregamento produzido por impacto ou choque*.

Para podermos determinar o valor máximo σ_m da tensão que ocorre em um certo ponto de uma estrutura sujeita a um carregamento transmitido com impacto, teremos que fazer algumas simplificações para as hipóteses básicas.

Em primeiro lugar, vamos adotar que a energia cinética $T = 1/2 (m \cdot v_0^2)$ do corpo que se choca com a estrutura é transferida totalmente para ela. Desse modo, o trabalho de deformação U_m correspondente à deformação máxima x_m é

$$U_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{10.37}$$

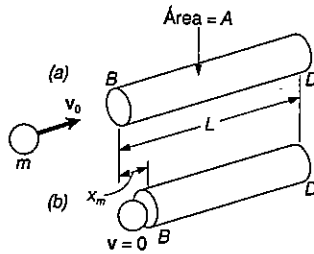


Fig. 10.22

Essa hipótese leva a duas condições necessárias:

1. Não ocorre dissipação de energia durante o impacto.
2. O corpo que se choca não deve ricochetear na estrutura e voltar, conservando parte de sua energia. Por sua vez, essa condição exige que a inércia da estrutura possa ser desprezada em face da inércia do corpo.

Na prática, nenhuma dessas condições fica satisfeita, e só uma parte da energia cinética do corpo se transfere para a estrutura. Se adotarmos que ocorre uma transferência total de energia do corpo para a estrutura, estaremos fazendo um dimensionamento com bastante segurança.

Vamos adotar ainda que o diagrama tensão-deformação obtido de um ensaio estático permanece válido para um carregamento produzido por impacto. Assim, para uma deformação elástica da estrutura, podemos expressar o valor máximo do trabalho de deformação por

$$U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV \quad (10.38)$$

No caso da barra uniforme da Fig. 10.22, a tensão máxima tem o mesmo valor ao longo de toda a barra, e podemos dizer que $U_m = \sigma_m^2 \cdot V/2E$. Explicitando nessa expressão o valor σ_m e substituindo o valor de U_m pelo valor dado na Eq. 10.37, obtemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} = \sqrt{\frac{M v_0^2 E}{V}} \quad (10.39)$$

Essa expressão mostra que se adotarmos uma barra com módulo de elasticidade E baixo e de grande volume V , estaremos reduzindo o valor da tensão máxima σ_m para um dado carregamento transmitido por choque.

Na maior parte dos problemas, não ocorre distribuição uniforme de tensões e a Fórm. 10.39 não se aplica. É conveniente nesses casos determinar-se a carga estática P_m que produziria o mesmo trabalho de deformação produzido pela carga com impacto, calculando a seguir o valor σ_m correspondente.

EXEMPLO 10.6

Um corpo de massa m , movendo-se à velocidade v_0 , choca-se com a extremidade B da barra BCD de seção não-uniforme (Fig. 10.23). Sabe-se que o diâmetro do trecho BC é o dobro do diâmetro do trecho CD. Determinar o valor máximo σ_m da tensão na barra.

Fazemos $n = 2$ na expressão (10.15) encontrada no Ex. 10.1. Verificamos que a barra BCD, quando submetida ao carregamento estático P_m , tem trabalho de deformação igual a

$$U_m = \frac{5P_m^2 L}{16AE} \quad (10.40)$$

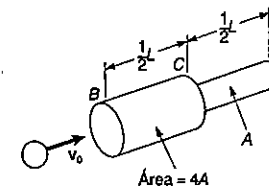


Fig. ex.10.23

onde A é a área da seção transversal do trecho CD da barra. Explicitando o valor P_m na Eq 10.40, encontramos o valor da carga estática que produz na barra o mesmo trabalho de deformação do carregamento com impacto:

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5} \frac{U_m A E}{L}}$$

Nessa expressão, U_m é dado pela Eq. 10.37. A tensão máxima ocorre na parte CD da barra. Dividindo-se P_m pela área A desse trecho, encontramos

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A} = \sqrt{\frac{16}{5} \frac{U_m E}{AL}} \quad (10.41)$$

ou, substituindo U_m pela expressão (10.37),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8}{5} \frac{mv_0^2 E}{AL}} = 1,265 \sqrt{\frac{mv_0^2 E}{AL}}$$

Comparando essa expressão com a expressão de σ_m no caso de barra de seção transversal uniforme da Fig. 10.22 e fazendo $V = AL$ na Eq. 10.39, verificamos que a tensão máxima na barra de seção variável é 26,5% maior do que na barra de seção uniforme. Assim, como já havíamos observado no Ex. 10.1, o aumento do diâmetro do trecho BC leva a uma queda da capacidade de absorção de energia da barra.

EXEMPLO 10.7

Deixa-se cair um peso W de uma altura h sobre a extremidade livre da viga em balanço AB (Fig. 10.24). Determinar o valor da tensão máxima na viga.

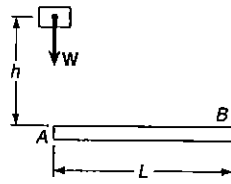


Fig. ex.10.24

Enquanto o corpo cai da altura h , sua energia potencial $W \cdot h$ se transforma em energia cinética. Essa energia cinética, como resultado do impacto com a viga, é transformada em energia de deformação. Temos, então³

$$U_m = Wh \tag{10.42}$$

Recorrendo à expressão do trabalho de deformação obtida no Ex. 10.3 para uma viga em balanço, e desprezando o peso próprio da viga, escrevemos

$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI}$$

³ A altura de queda total do corpo é na verdade $h + y_m$, onde y_m é a flecha máxima na extremidade da viga. Assim, uma expressão mais exata para U_m é (v. Problema Resolvido 10.3):

$$U_m = W(h + y_m) \tag{10.42}$$

No entanto, quando $h \gg y_m$, podemos desprezar y_m e usar a Eq. (10.42).

Dessa equação retiramos o valor de P_m verificando que a força estática que produz a mesma energia de deformação na viga é

$$P_m = \sqrt{\frac{6U_m EI}{L^3}} \tag{10.43}$$

A máxima tensão σ_m ocorre no engastamento B e é igual a

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{P_m Lc}{I}$$

Substituindo o valor de P_m dado por (10.43), obtemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}} \tag{10.44}$$

ou, recordando a Eq. 10.42,

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

10.8 DIMENSIONAMENTO PARA CARREGAMENTO PROVOCADO POR IMPACTO

Vamos comparar os valores obtidos na seção anterior para a tensão máxima σ_m : (a) na barra de seção transversal uniforme da Fig. 10.22; (b) na barra de seção variável do Ex. 10.6; c) na viga em balanço do Ex. 10.7, considerando que esta última tem seção transversal circular de raio c .

(a) Vamos inicialmente recorrer à Eq. 10.39 que, sendo U_m a quantidade de trabalho transferido à barra como resultado do impacto, o valor da tensão máxima na barra de seção uniforme é

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} \tag{10.45a}$$

onde V é o volume da barra.

(b) Considerando a seguir a barra do Ex. 10.6, calculamos o volume da barra, que é

$$V = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2$$

Substituindo $A \cdot L = 2V/5$ na Eq. 10.41, obtemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m E}{V}} \quad (10.45b)$$

(c) Finalmente, como o momento de inércia da viga de seção circular é $I = (1/4)\pi c^4$, vemos que

$$L(I/c^2) = L\left(\frac{1}{4}\pi c^4/c^2\right) = \frac{1}{4}(\pi c^2 L) = \frac{1}{4}V$$

onde V representa o volume da viga. Levando esse valor à Eq. 10.44, exprimimos a tensão máxima na viga em balanço do Ex. 10.7 por

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_m E}{V}} \quad (10.45c)$$

Verificamos então que a tensão máxima σ_m é, em cada caso, proporcional à raiz quadrada do módulo de elasticidade do material e inversamente proporcional à raiz quadrada do volume da barra. Se adotarmos que as três peças estruturais têm o mesmo volume e são feitas do mesmo material, podemos ver que, para um certo trabalho de deformação a ser acumulado, a barra de seção uniforme ficará submetida à menor tensão máxima, e a viga em balanço apresentará o maior valor da tensão máxima.

Essa conclusão pode ser aplicada pelo fato de que, no caso *a*, a tensão é uniforme ao longo da barra, o mesmo ocorrendo com o trabalho de deformação. No caso *b*, por outro lado, as tensões no trecho *BC* da barra são de valor igual a apenas 25% das tensões na parte *CD*. Essa distribuição de tensões desigual, que também ocorre com o trabalho de deformação, resulta em um valor de σ_m duas vezes maior do que aquele encontrado para a barra de seção uniforme. No caso *c*, em que a viga está submetida à carga transversal por impacto, as tensões variam linearmente ao longo do vão, bem como ao longo da seção transversal. A distribuição de trabalho de deformação é muito desigual, o que leva o valor da tensão máxima σ_m a um valor 3,46 vezes maior do que o valor que se obteria se essa peça fosse carregada axialmente como no caso *a*.

As propriedades verificadas nas três peças estruturais analisadas nesta seção são propriedades gerais, podendo ser observadas em todos os tipos de estruturas e casos de carregamento com impacto. Concluímos assim que a estrutura projetada para resistir com eficácia a cargas introduzidas por choque devem seguir as seguintes condições:

1. Ter um grande volume.
2. Ser constituídas de material com baixo módulo de elasticidade e alta tensão de escoamento.

3. Ter uma forma que permita que as tensões se distribuam do modo mais uniforme possível ao longo da estrutura.

10.9 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO PRODUZIDO POR UMA ÚNICA FORÇA APLICADA

Quando foi apresentado o conceito de trabalho de deformação no início deste capítulo, consideramos o trabalho realizado por uma força axial P aplicada à extremidade de uma barra de seção transversal uniforme (Fig. 10.1). Definimos o trabalho de deformação da barra para um alongamento x_1 como o trabalho da força P enquanto ela aumentava gradualmente de zero até o valor P_1 correspondente a x_1 . Escrevemos naquela altura

$$\text{Trabalho de deformação} = U = \int_0^{x_1} P dx \quad (10.2)$$

No caso de uma deformação elástica, o trabalho da força P e, conseqüentemente, o trabalho de deformação, eram expressos por

$$U = \frac{1}{2} P_1 x_1 \quad (10.3)$$

Depois, nas Secs. 10.3 e 10.4, calculamos o valor do trabalho de deformação de peças estruturais submetidas a várias condições de carregamento através de determinação do trabalho específico de deformação u em cada ponto da peça estrutural, integrando u ao longo de todo o corpo.

No entanto, quando a peça estrutural fica submetida a uma única carga concentrada, é possível utilizar-se a Eq. 10.3 para calcular-se seu trabalho de deformação desde que sejam conhecidas as relações entre carregamento e deformação. Por exemplo, no caso da viga em balanço do Ex. 10.3 indicada na Fig. 10.25, escrevemos

$$U = -\frac{1}{2} P_1 y_1$$

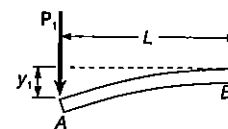


Fig. 10.25

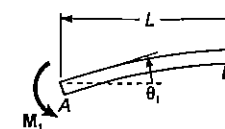


Fig. 10.26

e, substituindo y_1 pelo valor obtido na tabela do Apêndice D,

$$U = -\frac{1}{2}P_1 \left(-\frac{P_1 L^3}{3EI} \right) = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \quad (10.46)$$

Um método semelhante pode ser usado para a determinação do trabalho de deformação de uma peça estrutural submetida à ação de um único conjugado. Lembrando que o trabalho elementar de um conjugado M é $Md\theta$, onde $d\theta$ é um ângulo muito pequeno, vemos que o trabalho de deformação elástica de uma viga em balanço AB submetida a um único conjugado M_1 na sua extremidade A (Fig. 10.26) pode ser expresso por

$$U = \int_0^{\theta_1} M d\theta = \frac{1}{2} M_1 \theta_1 \quad (10.47)$$

onde θ_1 é a declividade da viga em A . Substituindo θ_1 pelo valor dado no Apêndice D, escrevemos

$$U = \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 L}{EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{2EI} \quad (10.48)$$

Da mesma maneira, o trabalho de deformação elástica de um eixo circular uniforme AB de comprimento L que está sujeito a um único torque T_1 (Fig. 10.27) pode ser expresso como

$$U = \int_0^{\phi_1} T d\phi = \frac{1}{2} T_1 \phi_1 \quad (10.49)$$

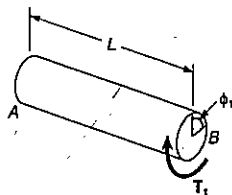


Fig. 10.27

Substituímos o ângulo ϕ_1 pelo valor dado em (3.16) e verificamos que

$$U = \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{T_1 L}{JG} \right) = \frac{T_1^2 L}{2JG}$$

como havia sido obtido na Sec. 10.5.

O método apresentado nesta seção pode simplificar a solução de muitos problemas de carregamento aplicado por impacto.

EXEMPLO 10.8

Um bloco de massa m que se move com velocidade v_0 choca-se perpendicularmente com a barra prismática AB em seu ponto médio C (Fig. 10.28). Determinar: (a) o carregamento estático equivalente P_m ; (b) a tensão máxima σ_m na barra; e (c) a flecha máxima x_m no ponto C .

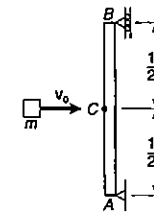


Fig. ex.10.28

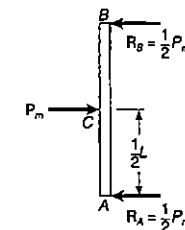


Fig. ex.10.29

(a) **Carga estática equivalente.** O trabalho de deformação máximo da barra é igual à energia cinética do bloco antes do impacto. Temos

$$U_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (10.50)$$

Por outro lado, expressando U_m como o trabalho da carga estática horizontal equivalente, enquanto ela é aplicada gradualmente ao ponto C da barra, temos

$$U_m = \frac{1}{2} P_m x_m \quad (10.51)$$

onde x_m é a flecha no ponto C correspondente à carga estática P_m . Da tabela do Apêndice D, tomamos o valor

$$x_m = \frac{P_m L^3}{48EI} \quad (10.52)$$

Substituindo o valor de x_m acima em (10.51), obtemos

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{P_m^2 L^3}{48EI}$$

Dessa expressão encontramos P_m , e recorrendo à Eq. 10.50, vemos que a carga estática equivalente ao carregamento com impacto é

$$P_m = \sqrt{\frac{96U_m EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} \quad (10.53)$$

(b) **Tensão máxima.** Desenhemos o diagrama de corpo livre da barra (Fig. 10.29), verificando que o momento fletor máximo ocorre em C e tem valor $M = P_m \cdot L/4$. A tensão máxima, conseqüentemente, ocorre em uma seção transversal que passa por C e é igual a

$$\sigma_m = \frac{M_{\text{máx}} c}{I} = \frac{P_m L c}{4I}$$

Substituindo o valor de P_m dado por (10.53), obtemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{3mv_0^2 EI}{L(I/c)^2}}$$

(c) **Flecha máxima.** Levando à Eq. 10.52 a expressão obtida para P_m na Eq. 10.53, temos

$$x_m = \frac{L^3}{48EI} \sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 L^3}{48EI}}$$

10.10 DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DEVIDA A UMA ÚNICA CARGA APLICADA USANDO TRABALHO DE DEFORMAÇÃO

Vimos na seção anterior que, se a deformação x_1 de uma estrutura ou membro estrutural sob uma única força concentrada P_1 for conhecida, o trabalho de deformação correspondente U pode ser obtido por

$$U = \frac{1}{2} P_1 x_1 \quad (10.3)$$

Uma expressão semelhante pode ser usada para a obtenção do trabalho de deformação de uma peça estrutural submetida a um único conjugado aplicado, M_1 :

$$U = \frac{1}{2} M_1 \theta_1 \quad (10.47)$$

Se, de modo contrário, o trabalho de deformação U de uma peça estrutural submetida a uma única força concentrada P_1 ou a um único conjugado M_1 for conhecido, as Eqs. 10.3 ou 10.47 podem ser usadas na obtenção da deformação x_1 ou do ângulo θ_1 . Se precisamos calcular a flecha devida a uma única força aplicada a uma peça estrutural composta de várias partes, podemos encontrar maior facilidade no cálculo do trabalho de deformação U ao invés de usarmos os métodos dos Caps. 8 ou 9. Para isso, calculamos inicialmente o trabalho específico de deformação de cada uma das partes por integração, como foi feito nas Secs. 10.4 e 10.5, usando a seguir as Eqs. 10.3 ou 10.47 para a determinação da deformação desejada. Do mesmo modo, o ângulo de giro ϕ_1 de um eixo composto de várias partes pode ser obtido pela integração do trabalho específico de deformação ao longo de cada parte do eixo, e resolvendo a Eq. 10.49 para encontrar o valor de ϕ_1 .

EXEMPLO 10.9

Duas barras de seção transversal uniforme de área A suportam a força P no ponto B (Fig. 10.30). Calcular o deslocamento vertical no ponto B .

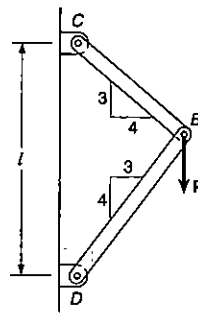


Fig. ex.10.30

O trabalho de deformação do sistema sob a carga dada foi determinado no Ex. 10.2. Igualando a expressão obtida para U ao trabalho realizado pelo carregamento, escrevemos

$$U = 0,364 \frac{P^2 L}{AE} = \frac{1}{2} P y_B$$

e, explicitando o deslocamento vertical y_B

$$y_B = 0,728 \frac{Pl}{AE}$$

Comentário. Devemos notar que, uma vez que conhecemos as forças nas duas barras, podemos utilizar o método do Cap. 2 para calcularmos as deformações $\delta_{B/C}$ e $\delta_{B/D}$. No entanto, a deformação do deslocamento vertical a partir dessas deformações requer uma análise cuidadosa dos vários deslocamentos envolvidos. O método do trabalho de deformação usado acima torna essa análise desnecessária.

EXEMPLO 10.10

Determinar a flecha da extremidade A da viga em balanço AB (Fig. 10.31), levando em conta o efeito: (a) das tensões normais somente; (b) das tensões normais e das tensões de cisalhamento.

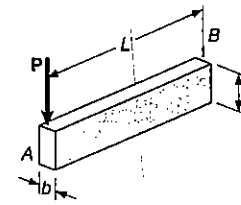


Fig. ex.10.31

(a) Efeito das tensões normais. O trabalho da força P enquanto ela é aplicada gradualmente à viga no ponto A é

$$U = \frac{1}{2} P y_A$$

Substituímos o valor de U pela expressão do trabalho de deformação obtida para a viga do Ex. 10.3, onde foi considerado apenas o efeito das tensões normais. Escrevemos

$$\frac{P^2 L^3}{6EI} = \frac{1}{2} P y_A$$

ou, explicitando o valor y_A

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

(b) Efeito das tensões normais e das tensões de cisalhamento. Substituímos agora o valor de U pela expressão (10.24) obtida no Ex. 10.5, onde foram considerados os efeitos das tensões normais e de cisalhamento. Temos

$$\frac{P^2 L^3}{6EI} \left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2} \right) = \frac{1}{2} P y_A$$

ou, explicitando o valor de y_A ,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2} \right)$$

Vemos que o erro relativo que cometemos ao desprezarmos a parcela das tensões de cisalhamento é o mesmo obtido no Ex. 10.5, que é menos de $0,9(h/L)^2$. Como já comentamos naquele exemplo, esse erro é menor que 0,9% para uma viga com relação h/L menor que 1/10.

EXEMPLO 10.11

Um conjugado de torção T é aplicado à extremidade D do eixo BCD (Fig. 10.32). Sabe-se que duas partes do eixo são do mesmo material e têm o mesmo comprimento, mas o diâmetro de BC é o dobro do diâmetro de CD . Determinar o ângulo de giro do eixo.

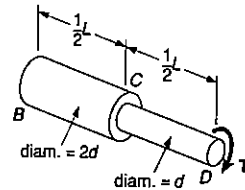


Fig. ex.10.32

O trabalho de deformação de um eixo semelhante foi calculado no Ex. 10.4, dividindo-se o eixo nas partes BC e CD . Fazendo $n = 2$ na Eq. 10.23, temos

$$U = \frac{17}{32} \frac{T^2 L}{2GJ}$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material e J é o momento de inércia polar do trecho CD do eixo. Igualamos U ao trabalho do conjugado de torção enquanto ele é aplicado gradualmente ao eixo, e recorrendo à Eq. 10.49, escrevemos

$$\frac{17}{32} \frac{T^2 L}{2GJ} = \frac{1}{2} T \phi_{D/B}$$

Explicitando o valor do ângulo de giro $\phi_{D/B}$

$$\phi_{D/B} = \frac{17TL}{32GJ}$$

Devemos ter em mente que o método apresentado nesta seção só pode ser usado quando a estrutura em estudo estiver submetida a apenas uma única força concentrada ou a um único conjugado. Como veremos na Sec. 10.11, o trabalho de deformação de uma estrutura submetida a vários carregamentos *não pode ser determinado* pelo cálculo do trabalho de cada carregamento como se fosse aplicado independentemente à estrutura. Mesmo que fosse possível determinar-se o trabalho de deformação dessa maneira, só teríamos uma equação disponível para o cálculo das deformações correspondentes aos vários carregamentos. Nas Secs. 10.12 e 10.13, vamos apresentar um outro método baseado no conceito de trabalho de deformação, que pode ser usado para a determinação das deformações em um certo ponto de uma estrutura, mesmo que a estrutura esteja submetida a várias cargas, concentradas ou distribuídas, ou conjugadas.

PROBLEMA RESOLVIDO 10.3

O bloco D de massa m , inicialmente em repouso, cai de uma altura h e se choca com o ponto médio C da viga AB constituída de alumínio. Adotando-se $E = 70$ GPa, determinar: (a) a flecha máxima no ponto C ; (b) a tensão máxima que ocorre na viga.

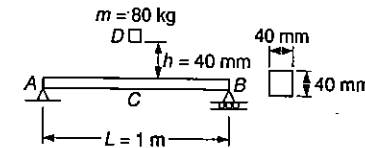
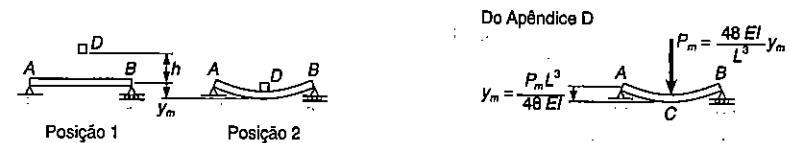


Fig. PR10.3

Princípio do trabalho e energia. Como o bloco parte do repouso, vemos que na posição 1 tanto a energia cinética como a energia de deformação são nulas. Na posição 2, onde ocorre a flecha máxima y_m , a energia cinética é nula novamente. Recorrendo à tabela do Apêndice D, encontramos a expressão para y_m . A energia de deformação da viga na posição 2 é

$$U_2 = \frac{1}{2} P_m y_m = \frac{1}{2} \frac{48EI}{L^3} y_m^2$$

$$U_2 = \frac{24EI}{L^3} y_m^2$$



Observamos que o trabalho realizado pelo peso W do bloco é $W(h + y_m)$. Igualando o trabalho de deformação da viga com o trabalho realizado por W , obtemos

$$\frac{24EI}{L^3} y_m^2 = W(h + y_m) \quad (1)$$

(a) Flecha máxima no ponto C. Dos dados do problema obtemos

$$EI = (70 \times 10^9 \text{ Pa}) \frac{1}{12} (0,04 \text{ m})^4 = 14,93 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$L = 1 \text{ m} \quad h = 0,040 \text{ m} \quad W = mg = (80 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 784,8 \text{ N}$$

Substituindo na Eq. 1, temos

$$\frac{24(14,93 \times 10^3)}{(1)^3} y_m^2 - 784,8(0,040 + y_m) = 0$$

$$(358,3 \times 10^3) y_m^2 - 784,8 y_m - 31,39 = 0$$

Resolvendo a equação, temos

$$y_m = 10,52 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

(b) Tensão máxima. O valor de P_m é

$$P_m = \frac{48EI}{L^3} y_m = \frac{48(14,93 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{(1 \text{ m})^3} (0,01052 \text{ m}) \quad P_m = 7540 \text{ N}$$

Como $M_{\text{máx}} = \frac{1}{4} P_m L$, a tensão máxima é

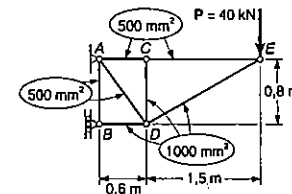
$$\sigma_m = \frac{M_{\text{máx}} c}{I} = \frac{(\frac{1}{4} P_m L) c}{I} = \frac{\frac{1}{4} (7540 \text{ N})(1 \text{ m})(0,020 \text{ m})}{\frac{1}{12} (0,040 \text{ m})^4}$$

$$\sigma_m = 176,7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

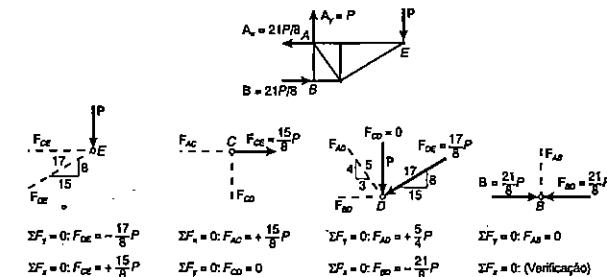
Um valor aproximado do trabalho realizado pelo peso do bloco pode ser obtido desprezando-se y_m na expressão do segundo membro da Eq. 1, como foi feito no Ex. 10.7. Se usarmos essa simplificação no problema acima, veremos que $y_m = 9,36 \text{ mm}$; o resultado obtido contém um erro de 11,0%. Todavia, se um bloco de 8 kg for lançado de uma altura de 400mm, produzindo o mesmo Wh , o fato de omitirmos o valor de y_m do segundo membro da Eq. 1 resultará em um erro inferior a 1,2%. Uma discussão mais aprofundada dessa simplificação será feita no Prob. 10.78.

PROBLEMA RESOLVIDO 10.4

As barras de treliça indicada se constituem de tubos de alumínio com seção transversal de áreas assinaladas. Adotando-se $E = 70 \text{ GPa}$, determinar o deslocamento vertical do ponto E causado pela força P.



Forças axiais nas barras da treliça. Usando o diagrama de corpo livre de toda a treliça, determinamos as reações de apoio. Estudamos a seguir o equilíbrio dos nós E, C, D e B, dessa seqüência. Em cada nó, determinamos as forças indicadas por linhas tracejadas. No nó B, a equação $\Sigma F_x = 0$ fornece uma verificação para os cálculos.



Trabalho de deformação. Observamos que E é o mesmo para todas as barras, expressamos o trabalho de deformação da treliça por

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} \quad (1)$$

onde F_i é a força em uma certa barra, como indica a tabela abaixo, e onde o somatório é estendido a todas as barras da treliça.

Barra	F_i	L_i, m	A_i, m^2	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0,8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0,6	500×10^{-6}	$4219P^2$
AD	$+5P/4$	1,0	500×10^{-6}	$3125P^2$
BD	$-21P/8$	0,6	1000×10^{-6}	$4134P^2$
CD	0	0,8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1,5	500×10^{-6}	$10547P^2$
DE	$-17P/8$	1,7	1000×10^{-6}	$7677P^2$

$$\sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} = 29\,700P^2$$

Voltando à Eq. 1, obtemos $U = (1/2E)(29,7 \times 10^3 P^2)$

Princípio do trabalho e energia. Sabemos que o trabalho efetuado pela força P ao ser aplicada gradualmente à treliça é $\frac{1}{2} P \cdot y_E$. Igualando o trabalho realizado por P ao trabalho de deformação U , e lembrando que $E = 70$ GPa e $P = 40$ kN, temos

$$\frac{1}{2} P y_E = U \quad \frac{1}{2} P y_E = \frac{1}{2E} (29,7 \times 10^3 P^2)$$

ou

$$y_E = \frac{1}{E} (29,7 \times 10^3 P) = \frac{(29,7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{70 \times 10^9}$$

$$y_E = 16,97 \times 10^{-3} m$$

$$y_E = 16,97 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMAS

10.57 Um colar D de 5 kg desloca-se ao longo da barra uniforme AB e choca-se com uma pequena placa presa na extremidade A da barra, com uma velocidade $v_0 = 6$ m/s. Usando $E = 200$ GPa e sabendo-se que a tensão admissível na barra é de 250 MPa, determinar o maior diâmetro que pode ser usado para a barra.

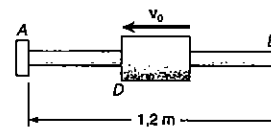


Fig. P10.57 e P10.58

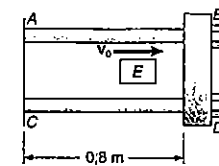


Fig. P10.59 e P10.60

10.58 Um colar D de 6 kg tem uma velocidade $v_0 = 4,5$ m/s, quando ele se choca com uma pequena placa presa na extremidade A da barra AB , de diâmetro 20 mm. Usando-se $E = 200$ GPa, determinar: (a) a carga estática equivalente para a barra; (b) a máxima tensão na barra; (c) a máxima deflexão na extremidade A .

10.59 O bloco E desloca-se com uma velocidade $v_0 = 3,6$ m/s quando choca-se perpendicularmente à placa BD que está presa na extremidade das barras AB e CD . Sabendo-se que as barras são feitas de um aço para o qual $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar o peso do bloco, para que o coeficiente de segurança seja quatro, em relação a deformação permanente das barras.

10.60 O bloco E de 5,4 kg está com uma velocidade v_0 quando bate perpendicularmente à placa BD que está presa na extremidade das barras AB e CD , de diâmetros iguais a 20 mm. Sabendo-se que as barras são feitas de um aço para o qual $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a máxima velocidade permissível v_0 , para que as barras não fiquem permanentemente deformadas.

10.61 O colar D é abandonado da posição mostrada e deixado cair sobre uma placa, presa à extremidade C da barra de bronze vertical ABC . Sabendo-se que $E = 105$ GPa e $\sigma_{adm} = 225$ MPa, determinar a maior massa admissível para o colar.

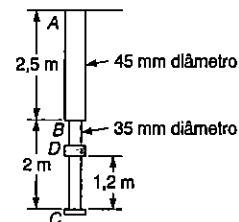


Fig. P10.61

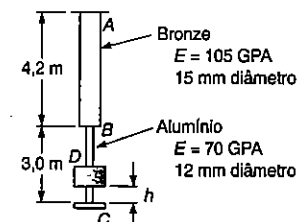


Fig. P10.62

10.62 O colar *D* de 9 kg é deixado cair de uma altura $h = 425$ mm sobre uma placa presa na extremidade *C* da barra vertical *ABC*. Determinar: (a) a máxima deflexão na extremidade *C*; (b) a carga estática equivalente; (c) a máxima tensão que ocorre na porção *BC* da barra.

10.63 Resolver o Prob. 10.62, assumindo-se que ambas as porções da barra *ABC* são feitas de bronze.

10.64 O colar *G* de 48 kg é abandonado da posição mostrada e deixado cair sobre a placa *BDF*, que está fixa a uma barra de aço *CD*, de 20 mm de diâmetro, e a duas outras barras de aço *AB* e *EF*, de 15 mm de diâmetro. Sabendo-se que o tipo de aço usado apresenta $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 180$ MPa, determinar a maior distância h admissível.

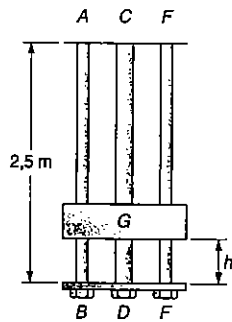


Fig. P10.64

10.65 Resolver o Prob. 10.64, assumindo que a barra *CD* de 20 mm de diâmetro é substituída por outra de igual diâmetro, feita de um tipo de alumínio, para o qual $E = 75$ GPa e $\sigma_{adm} = 150$ MPa.

10.66 Um bloco *C* de 11,5 kg move-se horizontalmente com uma velocidade v_0 até chocar-se com a coluna *AB*, como mostrado. Usando $E = 200$ GPa, determinar a maior velocidade v_0 , para que a tensão normal máxima na coluna não exceda a 125 MPa.

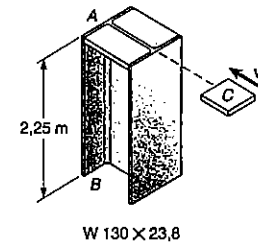


Fig. P10.66

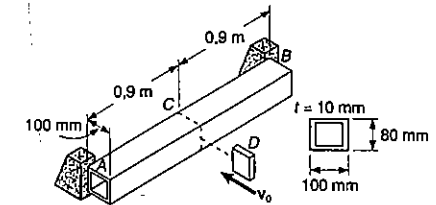


Fig. P10.68

10.67 Resolver o Prob. 10.66, assumindo que a coluna *AB* foi girada de 90° , em torno do eixo longitudinal.

10.68 Um tubo de alumínio com a seção transversal mostrada sofre em sua seção média o impacto de um bloco de 6 kg, que se move na horizontal com uma velocidade de 2 m/s. Usando $E = 70$ GPa, determinar: (a) a carga estática equivalente; (b) a máxima tensão na viga; (c) a máxima deflexão no ponto médio *C* da viga.

10.69 Resolver o Prob. 10.68, assumindo que o tubo foi substituído por uma barra maciça de alumínio com as mesmas dimensões externas do tubo.

10.70 O bloco *D* de 20 kg é abandonado de uma altura $h = 180$ mm, acima da viga de aço *AB*. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar: (a) a máxima deflexão no ponto *E*; (b) a máxima tensão na viga.

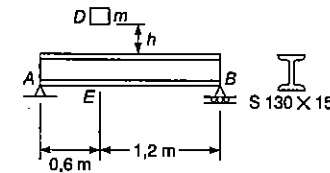


Fig. P10.70

10.71 Resolver o Prob. 10.70, assumindo que um perfil laminado de aço $W100 \times 19,3$ é usado, em substituição à viga *AB*.

10.72 e 10.73 O bloco *D* é abandonado da posição mostrada, sobre a extremidade de uma barra de aço quadrada, de 16 mm de lado. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar na barra: (a) a máxima deflexão em sua extremidade livre; (b) o máximo momento fletor; (c) a máxima tensão normal.

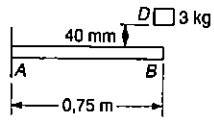
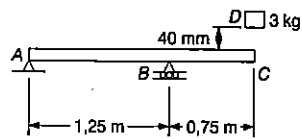


Fig. P10.72



P10.73

10.74 O bloco *E* de 1,8 kg é abandonado de uma altura $h = 38$ mm e choca-se na barra quadrada *BD*, de 25 mm de lado, que está presa às barras de aço *AB* e *CD*, de 9,5 mm de diâmetro. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar a máxima deflexão no ponto médio da barra.

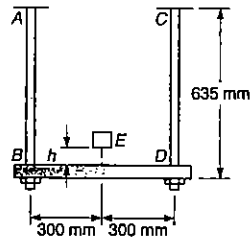


Fig. P10.74

10.75 Resolver o Prob. 10.74, assumindo que as barras *AB* e *CD* são substituídas por cabos de aço de 3,2 mm de diâmetro.

10.76 Um bloco de peso W é colocado em contato com a superfície de uma viga, em um certo ponto *D*, e então largado. Mostrar que a máxima deflexão resultante em *D* é duas vezes maior do que a deflexão devida a uma carga estática, aplicada em *D*, de mesmo valor W .

10.77 Um bloco de peso W é abandonado de uma altura h acima de uma viga horizontal *AB*, e choca-se com ela no ponto *D*. Pedese: (a) Mostrar que a máxima deflexão y_m no ponto *D* pode ser expressa por

$$y_m = y_{est} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{est}}} \right)$$

onde y_{est} representa a deflexão em *D* provocada por uma carga estática W aplicada nesse ponto, e onde a quantidade entre parênteses é chamada *coeficiente de impacto* ou *fator dinâmico*; (b) para a barra e carregamento do Prob. 10.72, calcular o fator dinâmico.

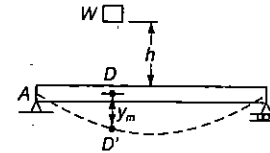


Fig. P10.77 e P10.78

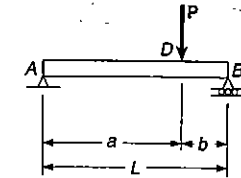


Fig. P10.79

10.78 Um bloco de peso W é abandonado de uma altura h acima de uma viga horizontal *AB* e choca-se com ela no ponto *D*. Pedese: (a) Denotando por y_m o valor exato da máxima deflexão em *D*, e por y'_m o valor obtido desprezando-se o efeito dessa deflexão na variação da energia potencial do bloco, mostrar que valor absoluto do erro relativo $(y'_m - y_m)/y_m$ nunca excede a $y'_m/2h$; (b) verificar o resultado obtido na parte a, resolvendo a parte a do Prob. 10.72, sem levar em conta y_m , na determinação da variação da energia potencial da carga. Comparar a resposta obtida por este caminho com a exata resposta daquele problema.

10.79 e 10.80 Usando o método do trabalho e energia, determinar a deflexão no ponto *D*, devido à carga P .

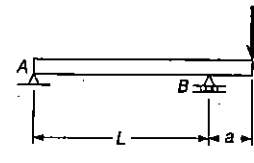


Fig. P10.80

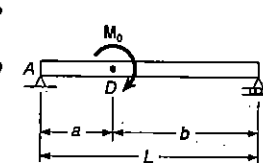


Fig. P10.81

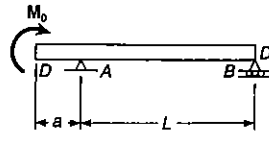


Fig. P10.82

10.81 e 10.82 Usando o método do trabalho e energia, determinar a declividade no ponto *D*, devida ao momento M_0 .

10.83 e 10.84 Usando o método do trabalho e energia, determinar a deflexão em *C*, provocada pela carga P .

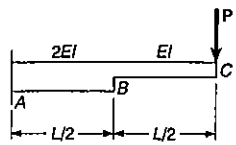


Fig. P10.83

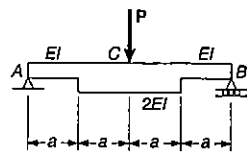


Fig. P10.84

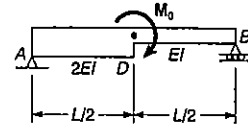


Fig. P10.85

10.85 Usando o método do trabalho e energia, determinar a declividade no ponto D, provocada pelo momento M_0 .

10.86 Dois eixos maciços de aço são conectados pelas engrenagens mostradas. Usando o método do trabalho e energia, determinar o ângulo de rotação da extremidade D, quando $T = 820 \text{ N} \cdot \text{m}$. Usar $G = 77 \text{ GPa}$.

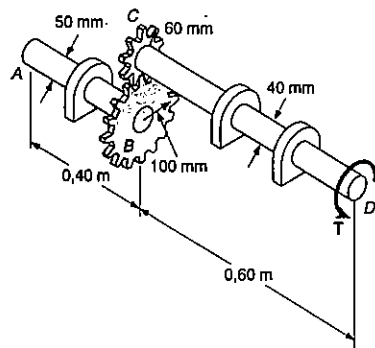


Fig. P10.86

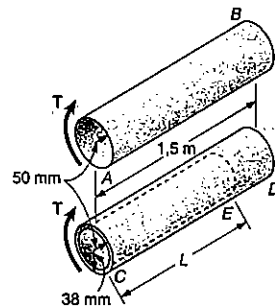


Fig. P10.87

10.87 Torques T de mesma intensidade são aplicados aos eixos de aço AB e CD. Usando o método do trabalho e energia, determinar o comprimento L da porção vazada do eixo CD, para que o ângulo da torção em C seja igual a 1,25 vezes o ângulo de torção em A.

10.88 Usando o método do trabalho e energia, resolver o Prob. 3.34.

10.89 A barra de aço BC, de diâmetro 20 mm, é presa à alavanca AB e ao apoio fixo C. A alavanca uniforme de aço tem 10 mm de espessura e 30 mm de largura. Usando o método do trabalho e energia, determinar a deflexão no ponto A, quando $L = 600 \text{ mm}$. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e $G = 77 \text{ GPa}$.

10.90 A barra de aço BC, de diâmetro 20 mm é presa à alavanca AB e ao apoio fixo C. A alavanca uniforme de aço tem 10 mm de espessura e 30 mm de largura. Usando o método do trabalho e energia, determinar o comprimento L da barra BC, para que a deflexão do ponto A seja 40 mm. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e $G = 77 \text{ GPa}$.

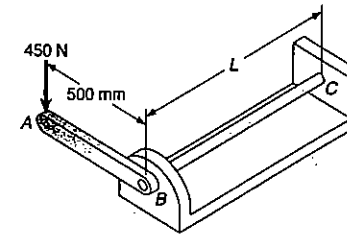


Fig. P10.89 e P10.90

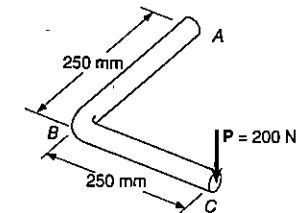


Fig. P10.91

10.91 Uma barra de aço de 15 mm de diâmetro foi dobrada como mostrado. Usando o método do trabalho e energia, determinar a deflexão na extremidade C, devida à força P de 200 N. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e $G = 77 \text{ GPa}$.

***10.92** O membro cilíndrico AB, vazado e de paredes finas, tem uma seção transversal não-circular e espessura não uniforme. Usando a expressão para τ dada na Eq. (3.53), da Sec. 3.13, e a expressão para a densidade de energia de deformação dada na Eq. (10.19), da Sec. 10.5, mostrar que o ângulo de torção do membro AB é:

$$\phi = \frac{TL}{4G^2} \oint \frac{ds}{t}$$

onde ds é um elemento da linha média da espessura da seção transversal e A é a área limitada por essa linha média.

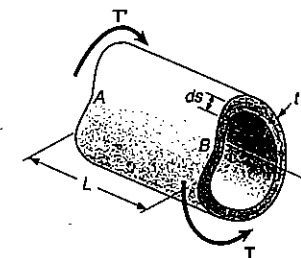


Fig. P10.92

10.93 Cada um dos membros da treliça mostrada tem seção transversal uniforme de área A . Usando-se o método do trabalho e energia, determinar a deflexão vertical do ponto de aplicação da carga P .

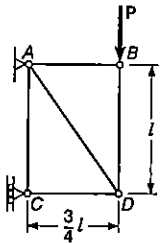


Fig. P10.93

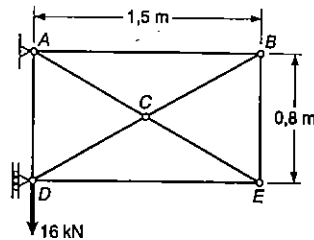


Fig. P10.94

10.94 Cada um dos membros da treliça mostrada é feita de aço e tem seção transversal de área igual a 400 mm^2 . Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a deflexão do ponto D , provocada pela carga de 16 kN .

10.95 Cada membro da treliça mostrada é feito de aço e tem uma seção transversal de área igual a 3230 mm^2 . Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a deflexão vertical do ponto B , provocada pela carga de 90 kN .

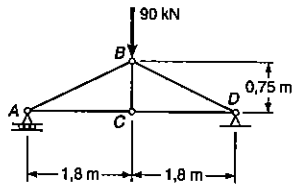


Fig. P10.95

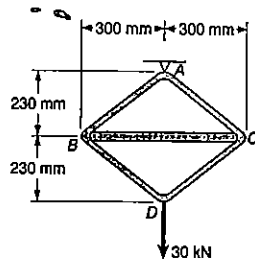


Fig. P10.96

10.96 Na montagem mostrada, o membro BC é uma barra maciça de aço de $25,4 \text{ mm}$ de diâmetro e todos os outros membros são feitos de aço de $12,7 \text{ mm}$. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a deflexão do ponto D , provocada pela carga de 30 kN .

10.97 Para a treliça e carregamento indicado no Prob. 10.27, determinar a deflexão vertical do ponto C .

10.98 Para a treliça e carregamento indicado no Prob. 10.28, determinar a deflexão vertical do ponto C .

10.99 Para a treliça e carregamento indicado no Prob. 10.29, determinar a deflexão vertical do ponto C .

*10.11 TRABALHO DE DEFORMAÇÃO PARA O CASO DE GRANDE NÚMERO DE CARGAS APLICADAS

Nesta seção veremos como o trabalho de deformação de uma estrutura submetida à ação de muitas cargas pode ser expresso em função das cargas e das deformações por elas provocadas.

Consideremos a viga elástica AB sujeita à ação das forças concentradas P_1 e P_2 . O trabalho de deformação da viga é igual ao trabalho realizado por P_1 e P_2 enquanto essas forças são aplicadas gradualmente à viga nos pontos C_1 e C_2 , respectivamente (Fig. 10.33). No entanto, para podermos calcular esse trabalho, precisamos inicialmente exprimir as deformações x_1 e x_2 em função das forças P_1 e P_2 .

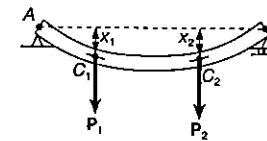


Fig. 10.33

Imaginemos somente a força P_1 aplicada à viga (Fig. 10.34). Vemos que tanto C_1 como C_2 sofrem deflexão e que suas deflexões são proporcionais à carga P_1 . Chamando essas deflexões de x_{11} e x_{21} , respectivamente, escrevemos

$$x_{11} = \alpha_{11} P_1 \qquad x_{21} = \alpha_{21} P_1 \qquad (10.54)$$

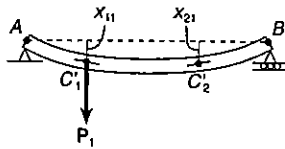


Fig. 10.34

onde α_{11} e α_{21} são constantes que vamos chamar de *coeficientes de influência*. Essas constantes representam as deflexões de C_1 e C_2 , respectivamente, quando uma força unitária é aplicada em C_1 , e se constituem em características da viga AB .

Imaginemos agora somente a carga P_2 aplicada à viga (Fig. 10.35). Chamando de x_{12} e x_{22} , respectivamente, às deflexões provocadas em C_1 e C_2 , escrevemos

$$x_{12} = \alpha_{12} P_2 \quad x_{22} = \alpha_{22} P_2 \quad (10.55)$$

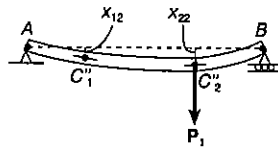


Fig. 10.35

onde α_{12} e α_{22} são os coeficientes de influência que representam as deflexões em C_1 e C_2 , respectivamente, provocadas pela aplicação de uma força unitária em C_2 . Aplicando o princípio da superposição, podemos expressar as deflexões x_1 e x_2 em C_1 e C_2 quando as duas forças são aplicadas (Fig. 10.33) por

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 \quad (10.56)$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 \quad (10.57)$$

Para calcularmos o trabalho realizado por P_1 e P_2 e o trabalho de deformação da viga, é conveniente que adotemos inicialmente apenas P_1 sendo aplicada gradualmente à viga em C_1 (Fig. 10.36a). Recorrendo à primeira das Eqs. 10.54, expressamos o trabalho da força P_1 por

$$\frac{1}{2} P_1 x_{11} = \frac{1}{2} P_1 (\alpha_{11} P_1) = \frac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 \quad (10.58)$$

observando que P_2 não realiza trabalho enquanto C_2 se move do valor x_{21} , uma vez que P_2 ainda não foi aplicada à viga.

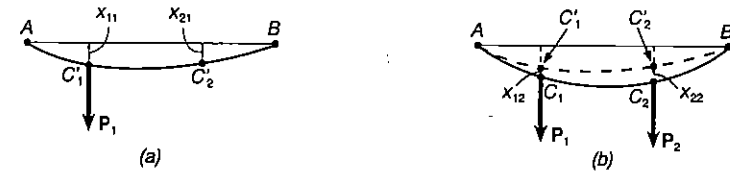


Fig. 10.36

Aplicamos então a força P_2 em C_2 (Fig. 10.36b); pela segunda das Eqs. 10.55, podemos expressar o trabalho da força P_2 por

$$\frac{1}{2} P_2 x_{22} = \frac{1}{2} P_2 (\alpha_{22} P_2) = \frac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2 \quad (10.59)$$

Mas, enquanto a força P_2 cresce gradualmente em C_2 , o ponto de aplicação de P_1 se desloca do valor x_{12} , de C'_1 até C_1 , de modo que a força P_1 realiza o trabalho. Uma vez que P_1 já está *totalmente aplicada* durante esse deslocamento (Fig. 10.37), o trabalho por ela realizado é igual a $P_1 x_{12}$ ou, recorrendo à primeira das Eqs. 10.55,

$$P_1 x_{12} = P_1 (\alpha_{12} P_2) = \alpha_{12} P_1 P_2 \quad (10.60)$$

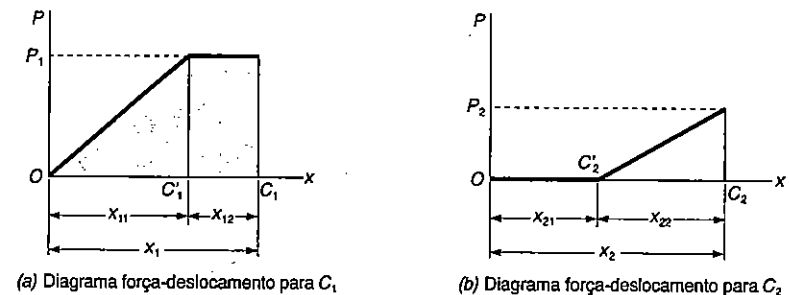


Fig. 10.37

Somando as expressões obtidas em (10.58), (10.59) e (10.60), obtemos o trabalho de deformação da viga sob a ação das forças P_1 e P_2

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \quad (10.61)$$

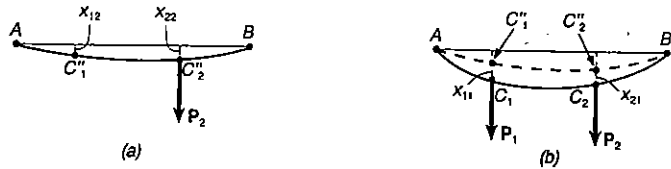


Fig. 10.38

Se tivéssemos inicialmente aplicado a força P_2 à viga (Fig. 10.38a), e depois a força P_1 (Fig. 10.38b), o trabalho realizado através de cada força seria aquele indicado na Fig. 10.39.

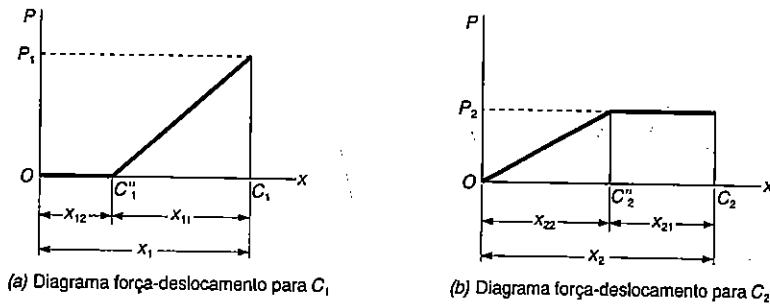


Fig. 10.39

Desenvolvendo cálculos semelhantes àqueles realizados acima, chegaríamos à expressão alternativa para o trabalho de deformação da viga:

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2) \quad (10.62)$$

Igualando as Eqs. 10.61 e 10.62, vemos que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, e assim concluímos que a deflexão produzida em C_1 por uma força unitária aplicada em C_2 é igual à deflexão produzida em C_2 por uma força unitária aplicada em C_1 . Essa conclusão é conhecida como *Teorema da reciprocidade* ou *Teorema de Maxwell* (físico britânico James Clerk Maxwell, 1831-1879).

Apesar de já podermos expressar o trabalho de deformação U de uma estrutura submetida a várias forças como uma função dessas forças, não podemos ainda usar o método da Sec. 10.10 para determinarmos a deformação dessa estrutura. Realmente, se calcularmos o trabalho de deformação por integração do trabalho específico de deformação u estendida a toda a estrutura, e igualarmos a expressão obtida com a Eq. 10.61, vamos obter apenas uma equação, que não pode fornecer os vários valores dos coeficientes α .

*10.12 TEOREMA DE CASTIGLIANO

Tomemos a expressão obtida anteriormente para o trabalho de deformação de uma estrutura elástica sujeita às cargas P_1 e P_2 :

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \quad (10.61)$$

α_{11} , α_{12} e α_{22} são os coeficientes de influência associados aos pontos de aplicação das forças, C_1 e C_2 . Derivando a Eq. 10.61 em relação a P_1 e recordando a Eq. 10.56, escrevemos

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1 \quad (10.63)$$

Derivando agora a Eq. 10.61 em relação a P_2 , lembrando que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2 \quad (10.64)$$

De uma maneira mais geral, se uma estrutura estiver submetida a n forças P_1, P_2, \dots, P_n , a deformação x_j do ponto de aplicação da força P_j , medida na direção da linha de ação de P_j , pode ser expressa como sendo a derivada parcial do trabalho de deformação da estrutura em relação à força P_j . Podemos escrever

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad (10.65)$$

Este é o Teorema de Castigliano, assim denominado por ter sido estabelecido pelo engenheiro Alberto Castigliano (1847-1884).

Lembrando que o trabalho realizado por um conjugado M é $\frac{1}{2} M\theta$, onde θ é o ângulo de rotação do ponto de aplicação do conjugado, vemos que o teorema de Castigliano pode ser usado na determinação da declividade da linha elástica de uma viga no ponto de aplicação de M_j . Temos

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad (10.68)$$

De maneira análoga, o ângulo de giro ϕ_j em uma seção de um eixo onde se aplica um momento torçor T_j é obtido derivando-se o trabalho de deformação do eixo em relação a T_j :

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \quad (10.69)$$

*10.13 DETERMINAÇÃO DE DEFLEXÕES PELO TEOREMA DE CASTIGLIANO

Vimos na seção precedente que a deflexão x_j de uma estrutura no ponto de aplicação da força P_j pode ser calculada efetuando-se a derivada parcial $\partial U/\partial P_j$ do trabalho de deformação U da estrutura. Recordamos das Secs. 10.4 e 10.5 que o trabalho de deformação é obtido por integração ou somatório, estendida a toda a estrutura, do trabalho de deformação de cada componente da estrutura. Vamos verificar que, na prática, o cálculo pelo teorema de Castigliano da deflexão x_j fica mais fácil se a derivação em relação à força P_j for efetuada antes da integração ou do somatório.

Por exemplo, no caso de uma viga, já vimos na Sec. 10.4 que

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (10.17)$$

e podemos determinar a deflexão x_j do ponto de aplicação do carregamento P_j escrevendo

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx \quad (10.70)$$

No caso de uma treliça constituída de n barras de comprimento L_j , área de seção transversal A_j e forças internas F_j , usamos a Eq. 10.14, exprimindo o trabalho de deformação da treliça por

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \quad (10.71)$$

A deflexão x_j do ponto de aplicação da força P_j se obtém derivando-se cada termo do somatório em relação a P_j . Temos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j} \quad (10.72)$$

EXEMPLO 10.12

A viga em balanço AB suporta uma carga uniformemente distribuída w e uma força concentrada P como indica a Fig. 10.40. Sabendo-se que $L=2$ m, $w = 4$ kN/m, $P = 6$ kN e $EI = 5$ MN \cdot m², determinar a flecha no ponto A .

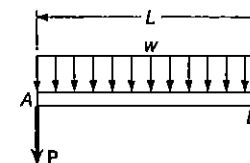


Fig. ex.10.40

Vamos usar a Eq. 10.70 para a determinação da flecha y_A onde se aplica a força P . Como P é vertical e dirigida para baixo, y_A representa uma deflexão vertical e é positiva se ocorrer para baixo. Temos

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad (10.73)$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -(Px + \frac{1}{2} wx^2) \quad (10.74)$$

e sua derivada parcial em relação a P é

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Substituindo os valores de M e $\partial M/\partial P$ na Eq. 10.73, escrevemos

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(Px^2 + \frac{1}{2} wx^3 \right) dx$$

$$y_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^3}{3} + \frac{wL^4}{8} \right) \quad (10.75)$$

Com os dados do problema, encontramos

$$y_A = \frac{1}{5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} \left[\frac{(6 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^3}{3} + \frac{(4 \times 10^3 \text{ N/m})(2 \text{ m})^4}{8} \right]$$

$$y_A = 4,8 \times 10^{-3} \text{ m} \quad y_A = 4,8 \text{ mm} \downarrow$$

Devemos observar que a derivada parcial $\partial M/\partial P$ não poderia ter sido calculada se o valor numérico de P houvesse sido substituído na expressão (10.74).

A aplicação direta do Teorema de Castigliano na determinação da deflexão x_j de uma estrutura em um certo ponto C_j só pode ser feita se a força P_j estiver aplicada com C_j na direção em que x_j vai ser determinada. Quando não existe carregamento aplicado em C_j , ou quando a carga está aplicada em uma direção que não coincide com a direção da deflexão desejada, poderemos usar o teorema de Castigliano se adotarmos o seguinte procedimento: aplicamos uma força fictícia Q_j no ponto C_j , na direção em que deve ser calculada a deflexão x_j , e usamos o teorema de Castigliano para obtermos a deflexão

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad (10.76)$$

devida à carga Q_j e às cargas reais. Em seguida fazemos $Q_j = 0$ na Eq. 10.76, e obteremos a deflexão em C_j na direção desejada sob as condições de carregamento dadas.

A declividade θ_j de uma viga em um ponto C_j pode ser determinada de maneira semelhante pela aplicação de um conjugado fictício M_j no ponto C_j , calculando-se então a derivada parcial $\partial U/\partial M_j$ e fazendo-se $M_j = 0$ na expressão obtida.

EXEMPLO 10.13

A viga em balanço AB suporta uma carga uniformemente distribuída w (Fig. 10.41). Determinar a flecha e a declividade em A .

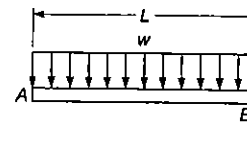


Fig. ex.10.41

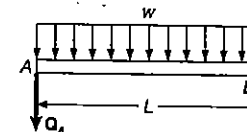


Fig. ex.10.42

Flecha no ponto A. Aplicamos ao ponto A a carga fictícia Q_A (Fig. 10.42) e escrevemos

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q_A} dx \quad (10.77)$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -Q_A x - \frac{1}{2} wx^2 \quad (10.78)$$

e sua derivada parcial em relação a Q_A vai ser

$$\frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x \quad (10.79)$$

Substituindo os valores de M e $\partial M/\partial Q_A$ das Eqs. 10.78 e 10.79 na Eq. 10.77, e fazendo $Q_A = 0$, vamos obter a flecha em A para a condição de carregamento dada:

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{1}{2} wx^2 \right) (-x) dx = + \frac{wL^4}{8EI}$$

Uma vez que a carga fictícia é dirigida para baixo, o sinal positivo no valor de y_A indica que

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI} \downarrow$$

Declividade da linha elástica em A. Aplicamos um conjugado fictício M_A na extremidade A (Fig. 10.43) escrevendo

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

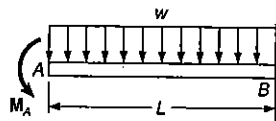


Fig. ex.10.43

Recorrendo à Eq. 10.17 temos

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} dx \quad (10.80)$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -M_A - \frac{1}{2}wx^2 \quad (10.81)$$

e sua derivada parcial em relação a M_A é

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1 \quad (10.82)$$

Substituindo os valores de M e $\partial M/\partial M_A$ na Eq. 10.80, e fazendo $M_A = 0$, vamos obter a declividade em A para a condição de carregamento dada:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{1}{2}wx^2\right)(-1) dx = + \frac{wL^3}{6EI}$$

Como o conjugado fictício aplicado tem sentido anti-horário, o sinal positivo da expressão acima indica que o ângulo θ_A também é medido no sentido anti-horário:

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI}$$

EXEMPLO 10.14

Duas barras de mesmo material e de seção transversal suportam a força P (Fig. 10.44). Determinar o deslocamento horizontal e vertical do ponto B.

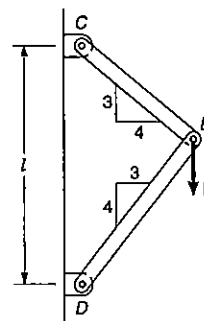


Fig. ex.10.44

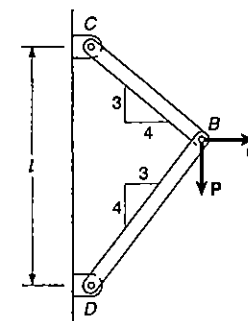


Fig. ex.10.45

Aplicamos uma carga fictícia Q no ponto B (Fig. 10.45). Do teorema de Castigliano temos

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \quad y_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$

A Sec. 10.4 nos dá a expressão (10.14) para o trabalho de deformação de uma barra. Escrevemos

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE}$$

onde F_{BC} e F_{BD} são as forças nas barras BC e BD, respectivamente. Obtemos, então,

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE} \frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE} \frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} \quad (10.83)$$

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE} \frac{\partial F_{BC}}{\partial P} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE} \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} \quad (10.84)$$

Do diagrama de corpo livre do pino B (Fig. 10.46) encontramos

$$F_{BC} = 0,6P + 0,8Q \quad F_{BD} = -0,8P + 0,6Q \quad (10.85)$$

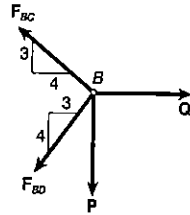


Fig. ex.10.46

Derivando essas expressões em relação a Q e a P, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} &= 0,8 & \frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} &= 0,6 \\ \frac{\partial F_{BC}}{\partial P} &= 0,6 & \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} &= -0,8 \end{aligned} \quad (10.86)$$

Substituímos agora (10.85) e (10.86) nas Eqs. 10.83 e 10.84, fazendo $Q = 0$. Observando que $BC = 0,6l$ e que $BD = 0,8l$, obtemos os deslocamentos horizontal e vertical do ponto B devido ao carregamento dado P:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{(0,6P)(0,6l)}{AE} (0,8) + \frac{(-0,8P)(0,8l)}{AE} (0,6) = -0,096 \frac{Pl}{AE} \\ y_B &= \frac{(0,6P)(0,6l)}{AE} (0,6) + \frac{(-0,8P)(0,8l)}{AE} (-0,8) = +0,728 \frac{Pl}{AE} \end{aligned}$$

Em relação às direções e sentidos dos deslocamentos, observando as forças P e Q, Concluimos que

$$x_B = 0,096 \frac{Pl}{AE} \leftarrow \quad y_B = 0,728 \frac{Pl}{AE} \downarrow$$

Verificamos que a expressão encontrada para o deslocamento vertical de B é a mesma obtida no Ex. 10.9.

*10.14 ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

O teorema de Castigliano pode ser usado na determinação das reações de apoio de estruturas estaticamente indeterminadas. No caso de uma estrutura com um grau de hiperestaticidade, por exemplo, escolhemos uma das reações como sendo superabundante e modificamos ou eliminamos o apoio correspondente. A reação superabundante é tratada então como um carregamento desconhecido, que, em conjunto com os outros carregamentos, deve produzir nos apoios deformações compatíveis. Calculamos inicialmente o trabalho de deformação U da estrutura devido à ação combinada dos carregamentos dados e da reação superabundante. Sabemos que a derivada parcial de U em relação à reação superabundante representa a deflexão (ou a rotação) do apoio que foi modificado ou eliminado. Igualamos a zero essa derivada parcial e resolvemos a equação obtida, encontrando o valor da reação superabundante⁴. As demais reações podem ser obtidas das equações da estática.

EXEMPLO 10.15

Determinar as reações de apoio da viga prismática com o carregamento indicado (Fig. 10.47).

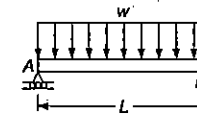


Fig. ex.10.47

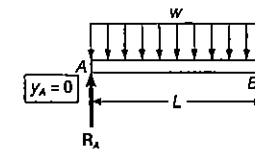


Fig. ex.10.48

A viga possui um grau de indeterminação. Escolhemos como superabundante a reação em A e retiramos esse apoio da viga. A reação R_A passa a ser considerada como uma carga desconhecida (Fig. 10.48) que será determinada com a condição de que a flecha y_A em A deve ser nula. Pelo teorema de Castigliano $y_A = \partial U / \partial R_A$, onde U é o trabalho de deformação da viga sob a ação da carga distribuída e da reação superabundante. Recorrendo à Eq. 10.70, escrevemos

⁴ Isso no caso de um apoio rígido que não admite deformações. Para outros tipos de apoio, a derivada parcial de U deve ser igualada à deformação permitida.

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx \quad (10.87)$$

O momento fletor à distância x de A é

$$M = R_A x - \frac{1}{2} \omega x^2 \quad (10.88)$$

e sua derivada parcial em relação a R_A vai ser

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \quad (10.89)$$

Substituindo os valores de M e $\partial M/\partial R_A$ na Eq. 10.87, obtemos

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{1}{2} \omega x^3 \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{\omega L^4}{8} \right)$$

Fazendo então $y_A = 0$ e resolvendo a equação, encontramos

$$R_A = \frac{3}{8} \omega L \quad R_A = \frac{3}{8} \omega L \uparrow$$

Das condições de equilíbrio da viga, concluímos que as reações em B são a força e o conjugado de valores:

$$R_B = \frac{5}{8} \omega L \uparrow \quad M_B = \frac{1}{8} \omega L^2$$

EXEMPLO 10.16

A força P é suportada no ponto B por três barras de mesmo material e de mesma área de seção transversal A (Fig. 10.49). Determinar a força em cada barra.

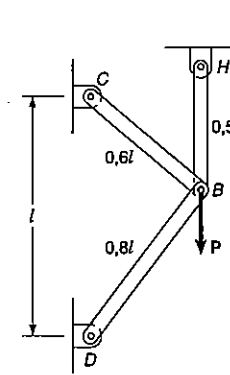


Fig. ex.10.49

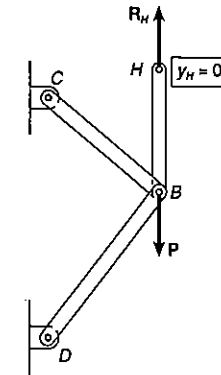


Fig. ex.10.50

A estrutura tem um grau de hiperestabilidade. Vamos considerar a reação em H como superabundante, retirando esse apoio da barra BH . A reação R_H passa a ser considerada como carga desconhecida (Fig. 10.50) que será determinada a partir da condição de que o deslocamento y_H do ponto H deve ser nulo. Do teorema de Castigliano temos $y_H = \partial U/\partial R_H$ onde U é o trabalho de deformação do sistema de três barras devido à força P e à reação superabundante R_H . Usando a Eq. 10.72, escrevemos

$$y_H = \frac{F_{BC}(BC)}{AE} \frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE} \frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} + \frac{F_{BH}(BH)}{AE} \frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} \quad (10.90)$$

A força na barra BH é igual a R_H ,

$$F_{BH} = R_H \quad (10.91)$$

A seguir, do diagrama de corpo livre do pino B (Fig. 10.51), obtemos

$$F_{BC} = 0,6P - 0,6R_H \quad F_{BD} = 0,8R_H - 0,8P \quad (10.92)$$

Derivando parcialmente em relação a R_H a expressão da força em cada barra, escrevemos

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} = -0,6 \quad \frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} = 0,8 \quad \frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} = 1 \quad (10.93)$$

Substituindo (10.91), (10.92) e (10.93) em (10.90), e tendo os comprimentos BC, BD e BH respectivamente iguais a 0,6l, 0,8l, 0,5l, escrevemos

$$y_H = \frac{1}{AE} [(0,6P - 0,6R_H)(0,6l)(-0,6) + (0,8R_H - 0,8P)(0,8l)(0,8) + R_H(0,5l)(1)]$$

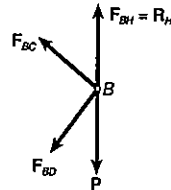


Fig. ex.10.51

Fazendo então $y_H = 0$, resulta

$$1,228R_H - 0,728P = 0$$

e resolvendo a equação

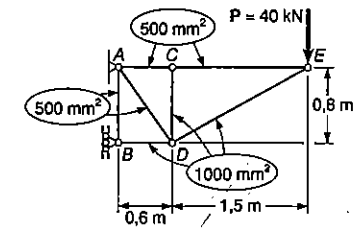
$$R_H = 0,593P$$

Levando esse valor às Eqs. 10.91 e 10.92, vamos encontrar os esforços nas três barras:

$$F_{BC} = +0,244P \quad F_{BD} = -0,326P \quad F_{BH} = +0,593P$$

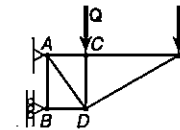
PROBLEMA RESOLVIDO 10.5

Determinar, para a treliça e o carregamento do Problema resolvido 10.4, o deslocamento vertical do ponto C.



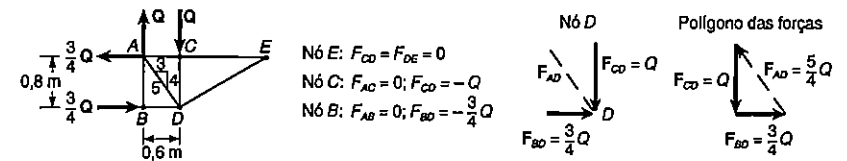
Teorema de Castigliano. Uma vez que não existe carga aplicada no nó C, aplicamos a ele a força Q. Usando o teorema de Castigliano e lembrando que E é constante, vamos obter

$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} \quad (1)$$



onde F_i é o esforço em uma barra devido ao efeito combinado das cargas P e Q.

Esforços nas barras. Estudando em seqüência o equilíbrio dos nós E, C, B e D, determinamos o esforço em cada barra devido à carga Q.



O esforço em cada barra devido à carga P já havia sido calculado no Prob. Resolvido 10.4. O esforço total em cada barra devido ao efeito combinado das forças P e Q é indicado na tabela abaixo. Calculamos $\partial F_i / \partial Q$ para cada barra e a seguir determinamos o termo $(F_i L_i / A_i)(\partial F_i / \partial Q)$ como mostra a tabela.

Barra	F_i	$\partial F_i / \partial Q$	L_i, m	A_i, m^2	$\left(\frac{F_i^2 L_i}{A_i}\right) \frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0,8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0,6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$5/4$	1,0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-3/4$	0,6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0,8	1000×10^{-6}	$+800Q$
CE	$+15P/8$	0	1,5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1,7	1000×10^{-6}	0

$$\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4306P + 4263Q$$

Deslocamento vertical em C. Substituindo o valor acima na Eq. 1, obtemos

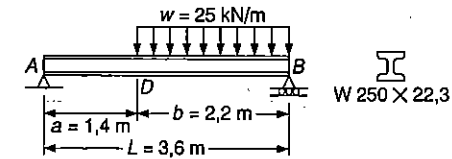
$$y_C = \frac{1}{E} \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} (4306P + 4263Q)$$

Uma vez que a força Q não faz parte do carregamento real da treliça, fazemos $Q = 0$. Substituindo os dados, $P = 40 \text{ kN}$ e $E = 70 \text{ GPa}$, encontramos

$$y_C = \frac{4306(40 \times 10^3 \text{ N})}{70 \times 10^9 \text{ Pa}} = 2,46 \times 10^{-3} \text{ m} \quad y_C = 2,46 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMA RESOLVIDO 10.6

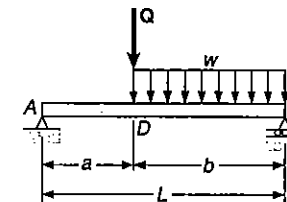
Determinar, para a viga e o carregamento indicados, a flecha no ponto D . Adotar $E = 200 \text{ GPa}$.



Teorema de Castigliano. Como o carregamento dado não inclui uma força aplicada no ponto D , aplicamos a esse ponto a força vertical Q , como indica a figura. Usando o Teorema de Castigliano e observando que a rigidez flexional da viga é constante, temos

$$y_D = \int \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right) dx = \frac{1}{EI} \int M \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right) dx \quad (1)$$

Vamos calcular a integral para os trechos AD e DB separadamente.



Reações. Usando o diagrama de corpo livre de toda a viga, obtemos

$$R_A = \frac{wb^2}{2L} + Q \frac{b}{L} \uparrow \quad R_B = \frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q \frac{a}{L} \uparrow$$

Trecho AD. Com o diagrama de corpo livre indicado, encontramos

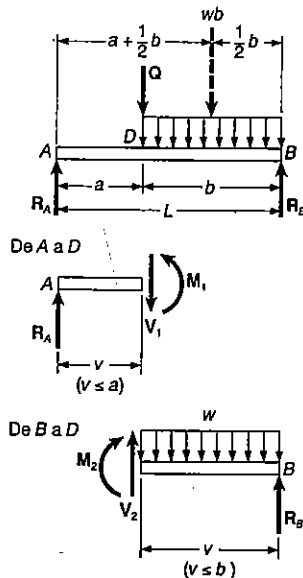
$$M_1 = R_A x = \left(\frac{wb^2}{2L} + Q \frac{b}{L} \right) x \quad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = + \frac{bx}{L}$$

Substituindo na Eq. 1 e integrando de A a D,

$$\frac{1}{EI} \int M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a R_A x \left(\frac{bx}{L} \right) dx = \frac{R_A a^3 b}{3EI}$$

Substituímos o valor de R_A e fazemos $Q = 0$, uma vez que essa força não faz parte do carregamento real.

$$\frac{1}{EI} \int M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dx = \frac{wa^3 b^3}{6EIL^2} \quad (2)$$



Trecho DB. Com o diagrama de corpo livre indicado, deduzimos que o momento fletor a uma distância y do ponto B é

$$M_2 = R_B v - \frac{wv^2}{2} = \left[\frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q \frac{a}{L} \right] v - \frac{v^2}{2} \quad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = + \frac{av}{L}$$

Substituindo na Eq. 1 e integrando do ponto B, onde $v = 0$, até o ponto D, onde $v = b$, obtemos

$$\frac{1}{EI} \int M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dv = \frac{1}{EI} \int_0^b \left(R_B v - \frac{wv^2}{2} \right) \left(\frac{av}{L} \right) dv = \frac{R_B ab^3}{3EI} - \frac{wab^4}{8EI}$$

Substituindo o valor de R_B e fazendo $Q = 0$,

$$\frac{1}{EI} \int M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dv = \left[\frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} \right] \frac{ab^3}{3EI} - \frac{wab^4}{8EI} = \frac{5a^2 b^4 + ab^5}{24EIL^2} w \quad (3)$$

Deslocamento no ponto D. Combinando os resultados das Eqs. 2 e 3 e usando a Eq. 1, obtemos

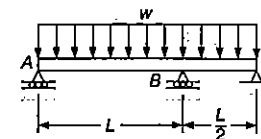
$$y_D = \frac{wab^3}{24EIL^2} (4a^2 + 5ab + b^2) = \frac{wab^3}{24EIL^2} (4a + b)(a + b) = \frac{wab^3}{24EIL} (4a + b)$$

Recorrendo ao Apêndice C, vemos que, para o perfil W250 x 22,3, $I = 28,7 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Substituindo os dados, temos

$$y_D = 5,86 \times 10^{-6} \text{ m} \quad y_D = 5,86 \text{ mm} \downarrow$$

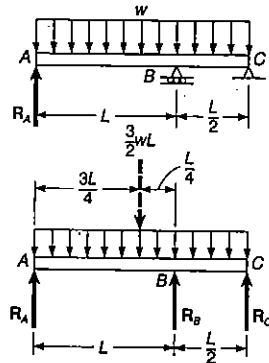
PROBLEMA RESOLVIDO 10.7

Determinar as reações dos apoios da viga de seção uniforme com o carregamento indicado.



Teorema de Castigliano. A viga possui um grau de hiperestaticidade e escolhemos a reação R_A como superabundante. Usando o Teorema de Castigliano, vamos determinar a deflexão em A devida à ação combinada da reação R_A e da carga distribuída. Como a rigidez flexional EI da viga é constante, escrevemos

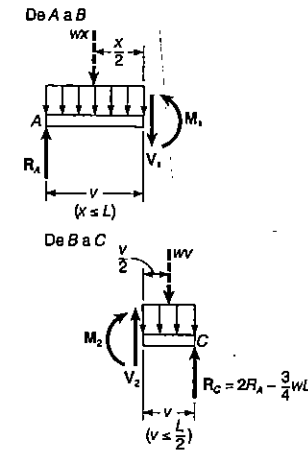
$$y_A = \int \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial R_A} \right) dx = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial R_A} dx \quad (1)$$



A integração se fará separadamente para os trechos AB e BC. Ao final, obteremos R_A igualando a zero o valor de y_A .

Corpo livre: toda a viga. Expressimos as reações de apoio R_B e R_C em função de R_A e da carga distribuída

$$R_B = \frac{3}{4}wL - 3R_A \quad R_C = 2R_A - \frac{3}{4}wL \quad (2)$$



Trecho AB. Com o diagrama de corpo livre indicado, encontramos a expressão do momento fletor M_1 e calculamos sua derivada parcial em relação a R_A .

$$M_1 = R_A x - \frac{wx^2}{2} \quad \frac{\partial M_1}{\partial R_A} = x$$

Substituindo na Eq. 1 e integrando de A a B, temos

$$\frac{1}{EI} \int M_1 \frac{\partial M_1}{\partial R_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{wx^3}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8} \right) \quad (3)$$

Trecho BC. Temos

$$M_2 = \left(2R_A - \frac{3}{4}wL \right) v - \frac{wv^2}{2} \quad \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = 2v$$

Substituindo na Eq. 1 e integrando de C, onde $v = 0$, até B, onde $v = \frac{1}{2}L$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int M_2 \frac{\partial M_2}{\partial R_A} dv &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(4R_A v^2 - \frac{3}{2}wLv^2 - wv^3 \right) dv \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{64} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

Reação em A. Somando as expressões obtidas em (3) e (4), determinamos y_A e igualamos a expressão a zero

$$y_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{\omega L^4}{8} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5\omega L^4}{64} \right) = 0$$

Calculando o valor de R_A , temos

$$R_A = \frac{13}{32} \omega L$$

$$R_A = \frac{13}{32} \omega L \uparrow$$

Reações em B e C. Substituindo R_A nas Eqs. 2, obtemos

$$R_B = \frac{33}{32} \omega L \uparrow$$

$$R_C = \frac{\omega L}{16} \uparrow$$

PROBLEMAS

10.100 a 10.102 Usando as informações fornecidas no Apêndice D, calcular o trabalho realizado pelas cargas, tal como elas são aplicadas na viga: (a) se a carga P é aplicada inicialmente; (b) se o momento M_0 é aplicado inicialmente.

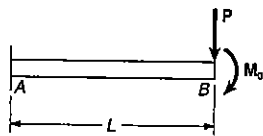


Fig. P10.100

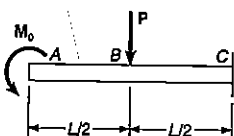


Fig. P10.101

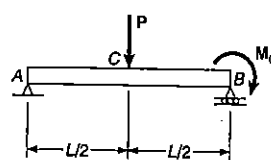


Fig. P10.102

10.103 a 10.105 Para a viga e carregamento mostrado, pede-se: (a) calcular o trabalho realizado pelas cargas, enquanto elas são aplicadas sucessivamente na viga, usando as informações do Apêndice D; (b) calcular a energia de deformação da viga, pelo método da Sec. 10.4, e mostrar que isto é igual ao trabalho obtido na parte a.

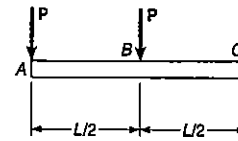


Fig. P10.103

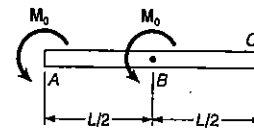


Fig. P10.104

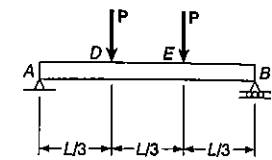


Fig. P10.105

10.106 e 10.107 Para a viga prismática mostrada, determinar a deflexão no ponto D.

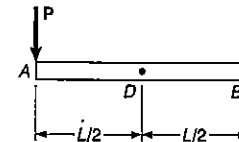


Fig. P10.106 e P10.108

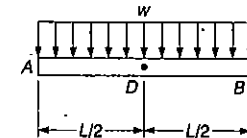


Fig. P10.107 e P10.109

10.108 e 10.109 Para a viga prismática mostrada, determinar a declividade no ponto D.

10.110 e 10.111 Para a viga prismática mostrada, determinar a deflexão no ponto D.

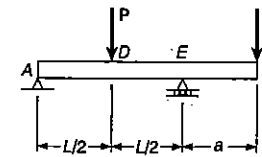


Fig. P10.110 e P10.112

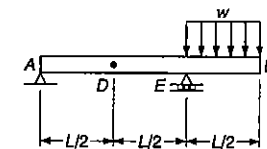


Fig. P10.111 e P10.113

10.112 e 10.113 Para a viga prismática mostrada, determinar a declividade no ponto D.

10.114 Para a viga prismática mostrada, determinar a deflexão na extremidade A.

10.115 Para a viga prismática mostrada, determinar: (a) a declividade na extremidade B; (b) a deflexão no ponto médio C.

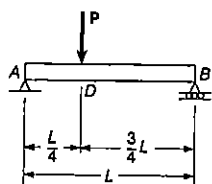


Fig. P10.114

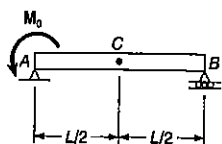


Fig. P10.115

10.116 Para a viga com o carregamento indicado, determinar: (a) a declividade no ponto C; (b) a deflexão no ponto C. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

10.117 Para a viga com o carregamento indicado, determinar: (a) a declividade no ponto B; (b) a deflexão no ponto B. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

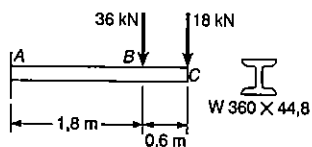


Fig. P10.116

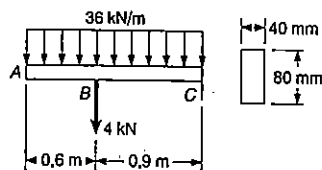


Fig. P10.117

10.118 Para a viga e o carregamento do Prob. 10.44, determinar a deflexão no ponto D.

10.119 Para a viga e o carregamento do Prob. 10.42, determinar a deflexão no ponto A.

10.120 e 10.121 Para a treliça e o carregamento mostrado, determinar a deflexão horizontal e vertical do nó C.

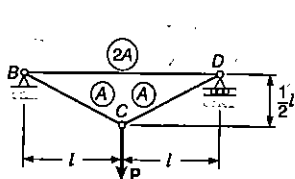


Fig. P10.120

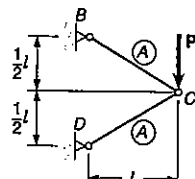


Fig. P10.121

10.122 Cada um dos membros da treliça mostrada é feita de aço e tem a área da seção transversal indicada. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a deflexão vertical do nó C.

10.123 Cada um dos membros da treliça mostrada é feita de aço e tem a área da seção transversal indicada. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a deflexão horizontal do nó C.

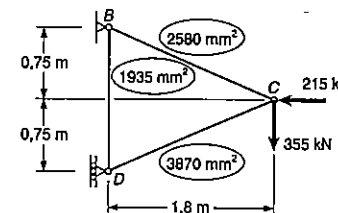


Fig. P10.122 e P10.123

10.124 Cada um dos membros da treliça mostrada é feita de alumínio e tem a área da seção transversal indicada. Usando $E = 70 \text{ GPa}$, determinar a deflexão horizontal do nó C.

10.125 Cada um dos membros da treliça mostrada é feita de alumínio e tem a área da seção transversal indicada. Usando $E = 70 \text{ GPa}$, determinar a deflexão vertical do nó C.

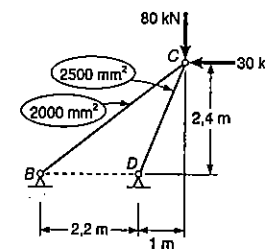


Fig. P10.124 e P10.125

*10.126 Para a barra uniforme com o carregamento mostrado e usando o teorema de Castigliano, determinar: (a) a deflexão horizontal no ponto B; (b) a deflexão vertical no ponto B.

*10.127 Para a barra uniforme e carregamento mostrado, e usando o teorema de Castigliano, determinar a deflexão no ponto B.

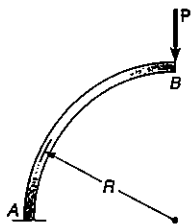


Fig. P10.126

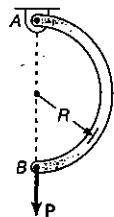


Fig. P10.127

*10.128 Três barras, todas com a mesma rigidez flexional EI , são soldadas para formar a estrutura ABCD. Para o carregamento mostrado, determinar: (a) a deflexão do ponto D; (b) o ângulo, em relação à vertical, formado pela estrutura, no ponto D.

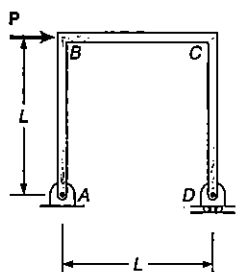


Fig. P10.128

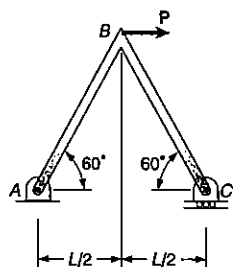


Fig. P10.129

10.130 a 10.133 Determinar a reação no apoio móvel e desenhar o diagrama de momento fletor, para a viga com o carregamento indicado.

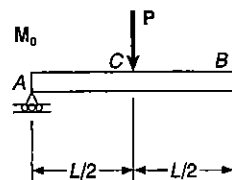


Fig. P10.130

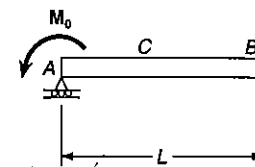


Fig. P10.131

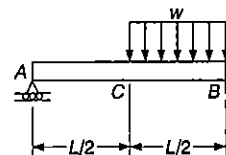


Fig. P10.132

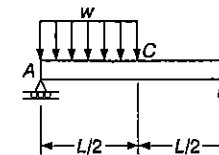


Fig. P10.133

10.134 a 10.135 Para a viga uniforme com o carregamento mostrado, determinar a reação em cada um dos apoios.

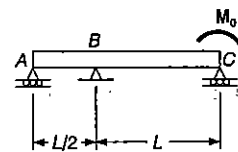


Fig. P10.134

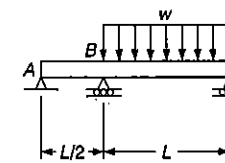


Fig. P10.135

10.136 e 10.137 Três membros de mesmo material e mesma área da seção transversal são usados para suportar a carga P. Determinar a força em cada membro, quando $\phi = 30^\circ$.

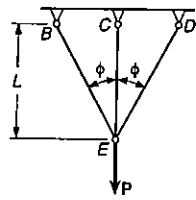


Fig. P10.136

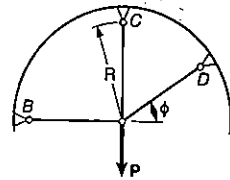


Fig. P10.137

10.138 Vários membros de mesmo material e mesma área da seção transversal são usados para suportar a carga P . Determinar a força no membro CF .

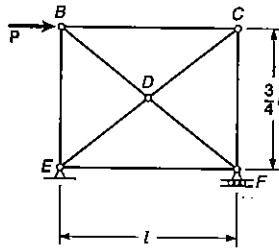


Fig. P10.138

10.139 Resolver o Prob. 10.138, assumindo que a carga P é deslocada ao longo de sua linha de ação e aplicada no ponto C .

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado para o estudo da energia de deformação e para os meios pelos quais esta pode ser usada para determinar as tensões e deformações nas estruturas, sujeitas conjuntamente a carregamentos estáticos e de impacto.

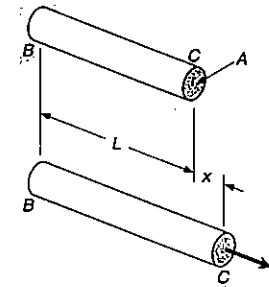


Fig. 10.1

Trabalho de deformação

Na Sec. 10.2 foi considerada uma barra uniforme submetida a uma carga axial P (Fig. 10.1), gradual e crescente. Notamos que a área sob o diagrama tensão-deformação (Fig. 10.3), representa o trabalho realizado pela carga P . Este trabalho é igual a *trabalho de deformação* da barra, associada com a deformação causada pela carga P :

$$\text{Trabalho de deformação} = U = \int_0^{x_1} P dx \quad (10.2)$$

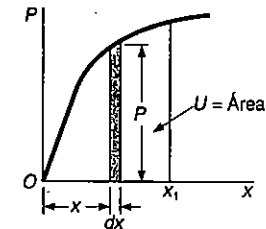


Fig. 10.3

Trabalho de deformação específico

Uma vez que a tensão é uniforme ao longo de toda a barra, podemos dividir a energia de deformação pelo volume da barra e obter a energia de deformação por unidade de volume, que foi definida como o *trabalho de deformação específico* do material (Sec. 10.3). Nós encontramos que:

$$\text{Trabalho de deformação específico} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x \quad (10.4)$$

e notamos que esse trabalho de deformação específico é igual à área sob o diagrama tensão-deformação do material (Fig. 10.6). Como vimos na Sec. 10.4, a Eq. (10.4) permanece válida quando as tensões não são uniformemente distribuídas, mas o trabalho de deformação específico, no entanto, irá variar de ponto para ponto. Se o material é descarregado, haverá uma deformação permanente ϵ_p e somente é recuperado o trabalho de deformação específico, correspondente à área do triângulo. O restante da energia foi dissipada na forma de calor, durante a deformação do material.

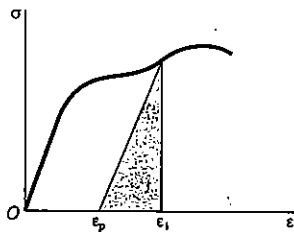


Fig. 10.6

Módulo de tenacidade

A área sob todo o diagrama tensão-deformação foi definida como *módulo de tenacidade* e é uma medida da energia total que pode ser absorvida pelo material.

Se a tensão normal σ permanece dentro do limite de proporcionalidade do material, nós podemos expressar a densidade de energia de deformação u como

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Módulo de resiliência

A área sob a curva tensão-deformação, desde a deformação zero até deformação ϵ_e de escoamento (Fig. 10.8), é denominada como o *módulo de resiliência* do material e representa a energia por unidade de volume que o material pode absorver, sem escoamento. Nós escrevemos:

$$u_e = \frac{\sigma_e^2}{2E} \quad (10.8)$$

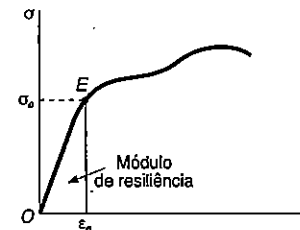


Fig. 10.8

Energia de deformação devido à carga axial

Na Sec. 10.4 nós consideramos a energia de deformação associada com *tensões normais*. Nós vimos que se uma barra de comprimento L e de *seção transversal de área variável* A , é submetida em sua extremidade a uma carga axial centrada P_1 , a energia de deformação da barra é

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx \quad (10.13)$$

Energia de deformação devido à flexão

Se a barra é de *seção transversal uniforme* de área A , a energia de deformação é

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (10.14)$$

Nós vimos que para uma viga submetida a cargas transversais (Fig. 10.14), a energia de deformação associada com tensões normais é

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (10.17)$$

onde M é o momento fletor e EI a rigidez flexional da viga.

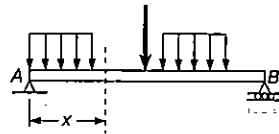


Fig. 10.14

Energia de deformação devido a tensões de cisalhamento

A energia de deformação associada com as *tensões de cisalhamento* foram analisadas na Sec. 10.5. Nós encontramos que a densidade de energia de deformação para um material, em cisalhamento puro, é:

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{10.19}$$

onde τ_{xy} é a tensão de cisalhamento e G é o módulo de elasticidade transversal do material.

Energia de deformação devido à torção

Para um eixo de comprimento L e seção transversal uniforme, submetido em suas extremidades e torques de intensidade T (Fig. 10.18), a energia de deformação encontrada é:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \tag{10.22}$$

onde J é o momento de inércia polar de área da seção transversal do eixo.

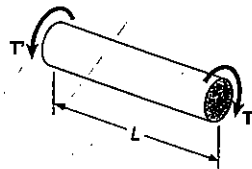


Fig. RS10.18

Estado geral de tensões

Na Sec. 10.6, consideramos a energia de deformação de um material isotrópico elástico sob um estado geral de tensões e foi expressa a densidade de energia de deformação em um dado ponto, em termos das tensões principais σ_a , σ_b e σ_c naquele ponto:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \tag{10.27}$$

A densidade de energia de deformação em um dado ponto, foi dividida em duas partes: u_v , associada com uma variação no volume do material naquele ponto, e u_d , associada com uma distorção do material naquele mesmo ponto. Nós escrevemos $u = u_v + u_d$, onde

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \tag{10.32}$$

e

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \tag{10.33}$$

Usando a expressão obtida para u_d , nós obtemos o critério da máxima energia de distorção, que foi usado na Sec. 6.7 para predizer se um material iria escoar sob um dado estado plano de tensões ou não.

Carregamento de impacto

Na Sec. 10.7 nós consideramos o *carregamento de impacto* em uma estrutura elástica, devido ao choque de uma massa que se move a uma dada velocidade. Foi assumido que a energia cinética da massa é transferida integralmente à estrutura e definido a *carga estática equivalente* como sendo a carga que poderá causar as mesmas deformações e tensões, do que causa um carregamento de impacto.

Carga estática equivalente

Depois da discussão de vários exemplos, nós notamos que uma estrutura projetada para resistir, com eficiência, a uma carga de impacto, deverá ter a forma de tal maneira que as tensões sejam distribuídas uniformemente por toda a estrutura, e que o material usado deverá ter um *baixo* módulo de elasticidade e uma *alta* tensão de escoamento (Sec. 10.8).

Membros sujeitos a uma única carga

A energia de deformação de membros estruturais submetidos a uma única carga foram analisados na Sec. 10.9. No caso da viga e carregamento da Fig. 10.25, encontramos que a energia de deformação da viga é

$$U = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \quad (10.46)$$

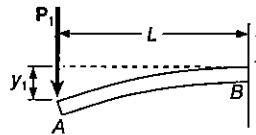


Fig. RS10.25

Observando que o trabalho realizado pela carga P é igual a $\frac{1}{2}P_1 y_1$, nós comparamos o trabalho da carga com a energia de deformação da viga e determinamos a deflexão y_1 , do ponto de aplicação da carga (Sec. 10.10 e Exemplo 10.10).

O método descrito há pouco é de valor limitado, visto que é restrito para estruturas submetidas a uma única carga concentrada e para a determinação da deflexão do ponto de aplicação dessa carga. Nas seções restantes deste capítulo foi apresentada um método mais geral, que pode ser usado para determinar deflexões, em vários pontos de estrutura, sujeita a várias cargas.

Teorema de Castigliano

Na Sec. 10.11, discutimos a energia de deformação em uma estrutura submetida a várias cargas e na Sec. 10.12 foi introduzido o *teorema de Castigliano*, o qual diz que a deflexão x_j , do ponto de aplicação da carga P_j , medida ao longo da linha de ação de P_j , é igual à derivada parcial da energia de deformação da estrutura, em relação à carga P_j . Escrevemos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad (10.65)$$

Também vimos que o teorema de Castigliano pode ser usado para determinar a *declividade* de uma viga no ponto de aplicação de um momento M_j , escrevendo-se:

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad (10.68)$$

e o *ângulo de torção*, numa seção de um eixo onde um torque T_j é aplicado, escrevendo-se:

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \quad (10.69)$$

Na Sec. 10.13, o teorema de Castigliano foi aplicado para determinação de deflexões e declividades em vários pontos de uma dada estrutura. O uso de cargas "fictícias" permite incluir pontos onde não há carga real aplicada. Nós também observamos que o cálculo de uma deflexão x_j foi simplificada quando a derivada em relação a carga P_j foi efetuada antes da integração. No caso de uma viga, lembrando da Eq. (10.17), nós escrevemos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx \quad (10.70)$$

Semelhantemente, para uma treliça, constituída de n membros, a deflexão x_j do ponto de aplicação da carga P_j foi encontrada escrevendo-se:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j} \quad (10.72)$$

Estruturas indeterminadas

O capítulo termina (Sec. 10.14) com a aplicação do teorema de Castigliano para a análise de *estruturas estaticamente indeterminadas* (Prob. Resolvido 10.7, Exemplos 10.15 e 10.16).

PROBLEMAS DE REVISÃO

10.140 Um mergulhador de 670 N salta de uma altura igual a 635 mm, sobre a extremidade A de uma prancha de trampolim, de seção transversal uniforme, como mostrado. Assumindo que as pernas do mergulhador permaneçam rígidas, e usando $E = 11,7$ GPa para a prancha, determinar: (a) a máxima deflexão no ponto A; (b) a máxima tensão de flexão na prancha; (c) a carga estática equivalente.

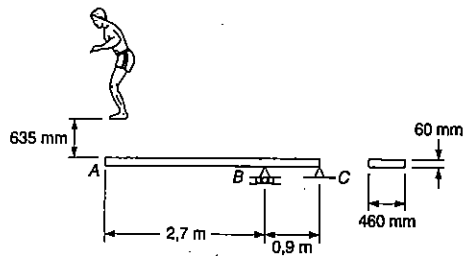


Fig. P10.140

10.141 Resolver o Prob. 10.140, assumindo que a porção *AB* da prancha de trampolim tem 2,85 m de comprimento e que a porção *BC* tem 0,75 m de comprimento.

10.142 A barra de aço *ABC* tem uma seção transversal de 20 × 20 mm e é submetida a uma carga $P = 270$ N. Usando $E = 200$ GPa, determinar a deflexão vertical do ponto *C*.

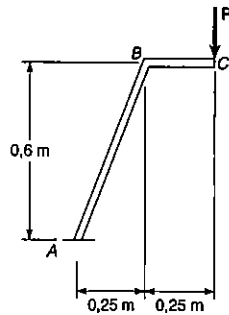


Fig. P10.142

10.143 Para a barra e o carregamento do Prob. 10.142, determinar a deflexão horizontal do ponto *C*.

10.144 Duas barras de aço maciças, cada uma com 56 mm de diâmetro, são soldadas juntas para formar o suporte mostrado. Usando $E = 200$ GPa e $G = 77$ GPa, determinar a deflexão vertical do ponto *C*.

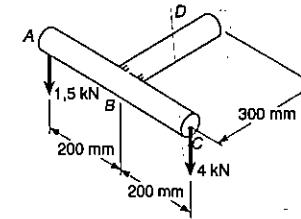


Fig. P10.144

10.145 Para o suporte e o carregamento do Prob. 10.144, determinar a deflexão do ponto *A*.

10.146 Duas placas de cobertura são soldadas a uma viga de perfil laminado de aço, como mostrado. Usando-se $E = 200$ GPa, determinar a declividade e a deflexão do ponto *A*.

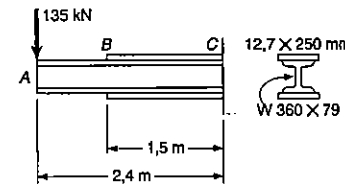


Fig. P10.146

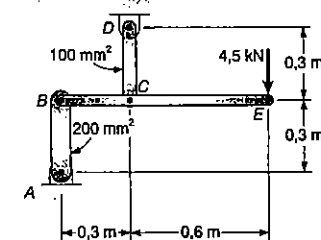


Fig. P10.148 e P10.149

10.147 Resolver o Prob. 10.146, assumindo que o comprimento *BC* das placas de cobertura é reduzido para 1,2 m.

10.148 As barras *AB* e *CD* são feitas de aço e tem as áreas da seção transversal mostrada. Considerando que a alavanca *BCE* é rígida e usando $E = 200$ GPa, determinar a deflexão do ponto *E*.

10.149 As barras *AB* e *CD* tem as áreas da seção transversal como mostrado e a alavanca *BCE* tem uma seção transversal quadrada de 24 mm de lado. Sabendo-se que todas as partes são feitas de aço e usando $E = 200$ GPa, determinar a deflexão do ponto *E*.

10.150 A montagem ABC é feita de um aço para o qual $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 320 \text{ MPa}$. Sabendo-se que uma energia de deformação de 5 J deve ser absorvida pela montagem, assim que a carga axial P é aplicada, determinar o coeficiente de segurança, em relação à deformação permanente, quando: (a) $x = 200 \text{ mm}$; (b) $x = 600 \text{ mm}$.

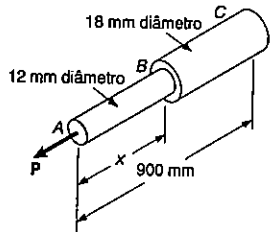


Fig. P10.150

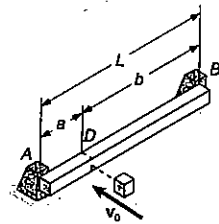


Fig. P10.151

10.151 A viga AB é simplesmente apoiada sobre um impacto em D devido a um bloco de massa m, que se desloca horizontalmente com uma velocidade v_0 . Mostrar que a tensão normal máxima resultante σ_m na viga, devido à flexão, é independente da localização do ponto D.

Os problemas que se seguem são para serem resolvidos com auxílio de um computador.

10.C1 Uma barra constituída de n elementos, cada um sendo homogêneo e de seção transversal uniforme, é sujeita a uma carga P aplicada na extremidade livre. O comprimento do elemento i é denotado por L_i , e seu diâmetro por d_i . Pedese: (a) Denotando por E o módulo de elasticidade do material usado na barra, escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a energia de deformação absorvida pela barra e a deformação medida na extremidade livre; (b) Usar este programa para resolver os Probs. 2.15a, 10.9a e 10.10a.

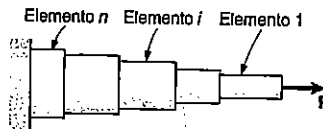


Fig. P10.C1

10.C2 Duas placas de cobertura de $6,35 \times 150 \text{ mm}$ são soldadas a um perfil laminado de aço W150 \times 29,8 da viga, como mostrado. O bloco F de 450 kg é abandonado de uma

altura $h = 30 \text{ mm}$ sobre a viga. Pedese: (a) Escrever um programa de computador, e usá-lo no cálculo da máxima tensão normal das seções transversais, imediatamente à esquerda de D e no centro da viga, para os valores de a, desde 0 até 1000 mm, em intervalos de 100 mm; (b) Dos valores considerados na parte a, selecionar a distância a, para que a máxima tensão normal seja tão pequena quanto possível. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

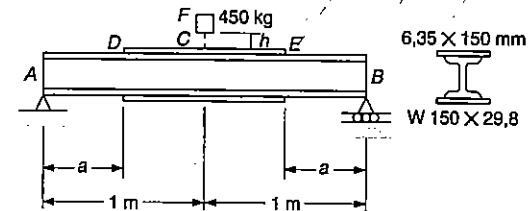


Fig. P10.C2

10.C3 O bloco D de 12 kg é abandonado de uma altura h sobre a extremidade livre da barra de aço AB. Para o aço usado, $\sigma_{adm} = 105 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$. Pedese: (a) Escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a máxima altura h admissível, para valores do comprimento L, desde 100 até 900 mm, em intervalos de 100 mm; (b) Dos valores de L considerados na parte a, selecionar o comprimento correspondente à maior altura admissível.

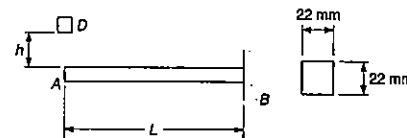


Fig. P10.C3

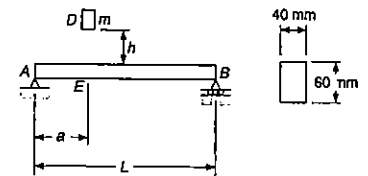


Fig. P10.C4

10.C4 O bloco D de massa $m = 10 \text{ kg}$ é abandonado de uma altura $h = 4540 \text{ mm}$, sobre uma viga de alumínio AB. Sabendo-se que $E = 70 \text{ GPa}$, escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a máxima deflexão no ponto E e a máxima tensão normal na viga, para valores de a, desde 100 até 600 mm, em intervalos de 100 mm.

Capítulo 11

FLAMBAGEM DE COLUNAS

11.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, nós tivemos duas preocupações principais: (1) a resistência da estrutura, ou seja, a sua capacidade para suportar um certo carregamento, sem ocorrer tensões excessivas no material; (2) a capacidade da estrutura para suportar um determinado carregamento, sem sofrer deformações inaceitáveis. Neste capítulo, iremos nos preocupar com a *estabilidade* da estrutura, ou seja, sua capacidade para suportar uma dada carga, sem sofrer uma brusca mudança em sua configuração. Nossa discussão estará voltada principalmente para colunas, isto é, para a análise e projeto de membros prismáticos verticais suportando cargas axiais.

Antes de se estudar a estabilidade de colunas, iremos analisar, na Sec. 11.2, a estabilidade de um modelo simplificado, consistindo de duas barras rígidas conectadas por um pino e uma mola, e suportando uma carga P . Nós iremos notar que, se seu equilíbrio é perturbado, o sistema retornará a sua posição original de equilíbrio, desde que a carga P não exceda a um certo valor P_{cr} , denominado *carga crítica*. No entanto, se $P > P_{cr}$, o sistema irá se deslocar desde sua posição original até uma nova posição de equilíbrio. No primeiro caso, o sistema é dito ser *estável*; no segundo, é dito ser *instável*.

Na Sec. 11.3, iremos começar nosso estudo de *estabilidade de colunas elásticas*, considerando uma coluna bi-articulada, submetida a uma carga axial centrada. A *fórmula de Euler* para a carga crítica de coluna será desenvolvida e por este fórmula nós determinaremos a correspondente tensão normal crítica na coluna. Pela aplicação de um coeficiente de segurança à carga crítica, estaremos aptos a determinar a carga admissível que pode ser aplicada a uma coluna biarticulada.

Na Sec. 11.4, estenderemos nosso estudo para a análise da estabilidade de colunas com diferentes condições de extremidades. Iremos simplificar esta análise aprendendo como determinar o *comprimento efetivo* de uma coluna, isto é, o comprimento de uma coluna bi-articulada tendo a mesma carga crítica.

Na Sec. 11.5, iremos considerar colunas suportando cargas axiais excêntricas; estas colunas têm deflexões transversais para qualquer intensidade de carga. Derivaremos uma expressão, para a máxima deflexão devido a uma dada carga, que será usada para determinar a máxima tensão normal na coluna. Finalmente, a *fórmula da secante*, que relaciona as tensões máxima e média em uma coluna, será desenvolvida.

Nas principais seções do capítulo, cada uma das colunas é assumida ser inicialmente um prisma reto homogêneo. No final do capítulo, iremos considerar colunas reais que são analisadas e projetadas usando fórmulas empíricas, de quatro associações que tratam do assunto. Na Sec. 11.6, serão apresentadas fórmulas para as tensões admissíveis em colunas feitas de aço, alumínio ou madeira, e submetidas a uma carga axial centrada. Na última seção do capítulo (Sec. 11.7), iremos considerar o projeto de colunas sujeitas a uma carga axial excêntrica.

11.2 ESTABILIDADE DAS ESTRUTURAS

Vamos supor que temos de dimensionar a coluna AB de comprimento L que vai suportar a força dada P (Fig. 11.1). A coluna estará ligada em suas extremidades por meio de pinos, sendo então articulada nas extremidades, e a carga P é supostamente centrada. Podemos concluir que a coluna estará bem dimensionada se a área A da seção transversal for escolhida de modo que o valor $\sigma = P/A$ da tensão em qualquer seção transversal fique abaixo da tensão admissível σ_{adm} do material usado, e se a deformação $\delta = PL/AE$ se mantiver dentro de especificações recomendadas. No entanto, pode ocorrer o fenômeno da *flambagem* quando a força P é aplicada; em vez de permanecer com seu eixo retilíneo, a coluna se torna subitamente bastante encurvada (Fig. 11.2). É claro que uma coluna que flamba sob o carregamento especificado no cálculo não está dimensionada corretamente.

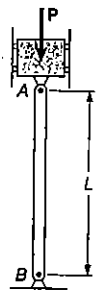


Fig. 11.1



Fig. 11.2

Antes de iniciarmos a análise propriamente dita da estabilidade das colunas elásticas, vamos tentar uma compreensão maior do problema considerando um modelo simplificado que consiste em duas barras rígidas, AC e BC, ligadas em C por um pino e uma mola de torção de constante K (Fig. 11.3).

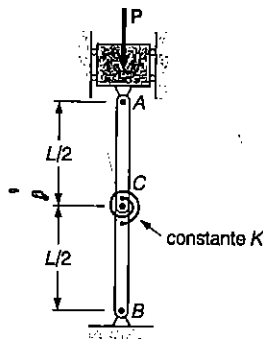


Fig. 11.3

Se as duas barras e as duas forças P e P' estão perfeitamente alinhadas, o sistema permanece em equilíbrio enquanto não ocorrerem perturbações (Fig. 11.4a). Mas, suponhamos que movemos o ponto C ligeiramente para a direita, de forma que cada barra forme com a vertical um pequeno ângulo $\Delta\theta$, indicado na Fig. 11.4b. O sistema, nessas condições, volta à sua posição de equilíbrio, ou continua se movendo para fora dessa posição? No primeiro caso, o sistema é chamado de *estável*, e, no segundo caso, é chamado de *instável*.

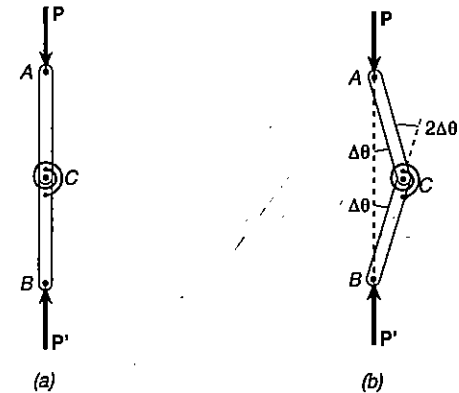


Fig. 11.4

Para determinarmos se o sistema formado pelas duas barras é estável ou instável, vamos considerar as forças que agem na barra AC (Fig. 11.5). Os esforços nessa barra se constituem de dois conjugados, o conjugado formado pelas forças P e P', de momento igual a $P(L/2) \text{ sen } \Delta\theta$, que tende a afastar a barra da vertical, e o conjugado M exercido pela mola, que tende a levar a barra de volta à sua posição vertical. Como o ângulo de deflexão da mola é de $2\Delta\theta$, o conjugado M tem momento de valor $M = K(2\Delta\theta)$. Se a intensidade do segundo conjugado é maior do que a intensidade do primeiro, o sistema tende a retornar à posição de equilíbrio original; o sistema é estável. Se a intensidade do primeiro conjugado for maior que a do segundo, o sistema tende a se afastar da posição de equilíbrio inicial; o sistema é instável. O valor da carga para o qual os dois conjugados se equilibram é chamado de *carga crítica* e é designado por P_{cr} . Temos

$$P_{cr}(L/2) \text{ sen } \Delta\theta = K(2\Delta\theta) \tag{11.1}$$

ou, sendo $\text{sen } \Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$P_{cr} = 4K/L \tag{11.2}$$

Fica claro que o sistema é estável para $P < P_{cr}$, quer dizer, para valores do carregamento menores que o valor crítico, e instável para $P > P_{cr}$.

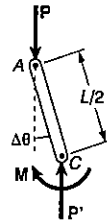


Fig. 11.5

Vamos imaginar que a força $P > P_{cr}$ foi aplicada às duas barras da Fig. 11.3 e que o sistema sofreu alguma perturbação. Como $P > P_{cr}$, o sistema se afasta da vertical e, após algumas oscilações, atinge uma nova posição de equilíbrio (Fig. 11.6a). Considerando o equilíbrio do corpo livre AC (Fig. 11.6b), vamos encontrar uma equação semelhante à Eq. 11.1, mas envolvendo um ângulo θ , que é

$$P(L/2) \operatorname{sen} \theta = K(2\theta)$$

ou

$$\frac{PL}{4K} = \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (11.3)$$

O valor de θ correspondente à posição de equilíbrio da Fig. 11.6 é obtido por tentativas, a partir da Eq. 11.3. Observamos, no entanto, que para qualquer valor positivo de θ , temos $\operatorname{sen} \theta < \theta$. Assim, a Eq. 11.3 leva a uma solução θ diferente de zero somente quando o primeiro membro da equação é maior que um. Esse é exatamente o caso, uma vez que adotamos $P > P_{cr}$. Mas, se tivéssemos adotado $P < P_{cr}$, não existiria a segunda posição de equilíbrio indicada na Fig. 11.6, e a única posição de equilíbrio seria a posição correspondente a $\theta = 0$. Verificamos então que, para $P < P_{cr}$, a posição $\theta = 0$ é estável.

Esta conclusão se aplica de modo geral às estruturas e a sistemas mecânicos, e será aplicada na próxima seção, onde discutiremos a estabilidade de colunas elásticas.

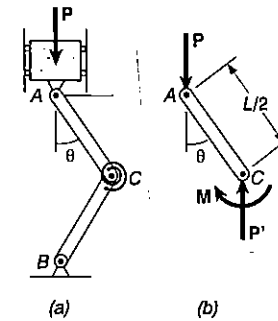


Fig. 11.6

11.3 FÓRMULA DE EULER PARA COLUNAS COM EXTREMIDADES ARTICULADAS

Voltando a estudar a coluna AB da seção anterior (Fig. 11.1), queremos determinar o valor crítico da carga P , quer dizer, o valor P_{cr} para o qual a situação indicada na Fig. 11.1 deixa de ser estável. Se $P > P_{cr}$, o menor desalinhamento ou perturbação provoca a flambagem da coluna, que assume a configuração deformada da Fig. 11.2.

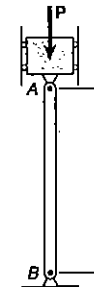


Fig. 11.1 (repetida)



Fig. 11.2 (repetida)

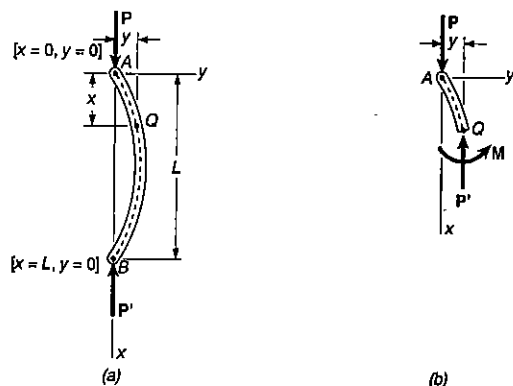


Fig. 11.7

Para isso, vamos determinar sob quais condições a configuração da Fig. 11.2 é possível. Uma coluna pode ser considerada como uma viga colocada em posição vertical e submetida a uma força axial. Assim, procedendo como no Cap. 8, vamos chamar de x a distância da extremidade A da coluna até um ponto Q de sua linha elástica, e de y a deflexão desse ponto (Fig. 11.7a). Segue daí que o eixo x é vertical com orientação de cima para baixo e que o eixo y é horizontal e orientado para a direita. Considerando o equilíbrio da parte AQ (Fig. 11.7b), vemos que o momento fletor em Q é $M = -P \cdot y$. Substituindo esse valor de M na Eq. 8.4 da Sec. 8.3, escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad (11.4)$$

ou, transpondo o último termo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad (11.5)$$

Essa é uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea, com coeficientes constantes. Fazendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (11.6)$$

escrevemos a Eq. 11.5 na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \quad (11.7)$$

que é a mesma equação diferencial que descreve o movimento harmônico simples, exceto pela variável independente, que agora é a coordenada x e não o tempo t . A solução geral da Eq. 11.7 é

$$y = A \text{ sen } px + B \text{ cos } px \quad (11.8)$$

o que pode ser verificado facilmente, calculando-se a expressão d^2y/dx^2 e substituindo-a, juntamente com y , na Eq. 11.7.

Pelas condições de contorno que devem ser satisfeitas nos pontos A e B da coluna (Fig. 11.7a), fazemos inicialmente $x = 0, y = 0$ na Eq. 11.8, encontrando $B = 0$. Substituindo a seguir $x = L, y = 0$, encontramos

$$A \text{ sen } pL = 0 \quad (11.9)$$

Essa equação é satisfeita para $A = 0$ ou para $\text{sen } pL = 0$. Se a primeira das condições for tomada, a Eq. 11.8 se reduz a $y = 0$ e a coluna tem eixo reto (Fig. 11.1). Para que a segunda condição seja satisfeita, devemos ter $pL = n\pi$ ou, substituindo p pelo valor dado em (11.6), e resolvendo a equação em P ,

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \quad (11.10)$$

O menor valor de P definido pela Eq. 11.10 correspondente a $n = 1$. Temos, então,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2} \quad (11.11)$$

A expressão encontrada é conhecida como *fórmula de Euler*, devida ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Levando essa expressão de P à Eq. 11.6, e daí levando o valor de p obtido à Eq. 11.8, encontramos, para $B = 0$,

$$y = A \text{ sen } \frac{\pi x}{L} \quad (11.12)$$

que é a equação da linha elástica depois que a coluna flamba (Fig. 11.2). Vemos que o valor da deflexão máxima $y_m = A$ fica indeterminado. Isto se dá pelo fato de que a equação diferencial (11.5) é uma aproximação linearizada da equação diferencial real que descreve a linha elástica¹.

1 Lembramos que a equação $d^2y/dx^2 = M/EI$ foi obtida (Sec. 8.3) adotando-se que a declividade dy/dx da viga poderia ser desprezada, de modo que a expressão exata dada na Eq. 8.3 poderia ser substituída por $1/\rho = d^2y/dx^2$.

Se $P < P_{cr}$, a condição $\sin pL$ não pode ser satisfeita, e a solução dada por (11.12) não existe. Devemos ter nesse caso $A = 0$, e a única configuração possível para a coluna é a configuração de eixo reto. Assim, quando $P < P_{cr}$, a configuração da Fig. 11.1 é estável.

No caso de colunas com seção transversal quadrada ou circular, o momento de inércia I da seção transversal em relação a qualquer eixo centroidal é o mesmo, de modo que a coluna pode flambar em qualquer plano, dependendo apenas de restrições que possam ser colocadas pelas ligações das extremidades. Para seções transversais de outras formas, a carga crítica deve ser calculada para $I = I_{\min}$ a ser adotado na Eq. 11.11. Se a flambagem ocorrer, ela acontecerá em um plano perpendicular ao eixo principal de inércia correspondente.

O valor da tensão que corresponde à carga crítica é chamado *tensão crítica* e designado por σ_{cr} . Recorrendo à Eq. 11.11 e fazendo $I = Ar^2$, onde A é a área da seção transversal e r o raio de giração, temos

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E A r^2}{AL^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (11.13)$$

A relação L/r é chamada *índice de esbeltez* da coluna. Em vista do que frisamos no último parágrafo, devemos usar o valor mínimo do raio de giração r na determinação do índice de esbeltez e da tensão crítica de uma coluna.

A Eq. 11.13 mostra que a tensão crítica é proporcional ao módulo de elasticidade do material e inversamente proporcional ao quadrado do índice de esbeltez da coluna. O gráfico de σ_{cr} em função de L/r está desenhado na Fig. 11.8, para o aço estrutural, com $E = 200$ GPa e $\sigma_s = 250$ MPa. Devemos ter em mente que não foi usado nenhum coeficiente de segurança para o valor de σ_{cr} nesse gráfico. Devemos ter em mente também que, se o valor obtido para σ_{cr} da Eq. 11.13 ou do próprio gráfico for maior que σ_s , esse valor não tem interesse nenhum para nós, uma vez que a tensão de escoamento foi atingida e o material deixa de ser elástico antes de se iniciar a flambagem.

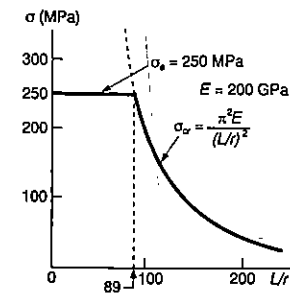


Fig. 11.8

Nesta análise do comportamento de uma coluna, adotamos a hipótese de que a força é perfeitamente centrada e a coluna perfeitamente alinhada, o que raramente ocorre na prática. A Sec. 11.5 analisará o caso de cargas excêntricas. Essa maneira de apresentar a questão levará a uma transição mais fácil do caso de flambagem de colunas longas, esbeltas, para o caso da ruptura por compressão de colunas curtas, rígidas. Ela fornece também uma visão real da relação entre o índice de esbeltez de uma coluna e a carga que produz sua ruptura.

EXEMPLO 11.1

Uma coluna de extremidades articuladas tem seção transversal quadrada e 2 m de comprimento. Ela é constituída de uma qualidade de pinho para a qual $E = 13,0$ GPa, $\sigma_{adm} = 12$ MPa para compressão na direção paralela às fibras. Usando um coeficiente de segurança de 2,5 no cálculo da carga crítica de Euler para a flambagem, determinar a dimensão da seção transversal, de modo que a coluna possa resistir com segurança a: (a) uma força de 100 kN; (b) uma força de 200 kN.

(a) Para a força de 100 kN. Usando o coeficiente de segurança dado, fazemos

$$P_{cr} = 2,5(100 \text{ kN}) = 250 \text{ k} \quad L = 2 \text{ m} \quad E = 13,0 \text{ GPa}$$

levando esses valores à fórmula de Euler. Calculamos então o valor de I . Temos

$$I = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^2}{\pi^2 (13,0 \times 10^9 \text{ Pa})} = 7,794 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Para uma seção quadrada, temos $I = a^4/12$, e escrevemos

$$\frac{\alpha^4}{12} = 7,794 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad \alpha = 98,3 \text{ mm} = 100 \text{ mm}$$

Verificamos então o valor da tensão normal na coluna:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \text{ kN}}{(0,100 \text{ m})^2} = 10 \text{ MPa}$$

Como σ é menor que a tensão admissível, uma seção transversal de $100 \times 100 \text{ mm}$ é aceitável.

(b) Para a força de 200 kN. Fazemos agora $P_{cr} = 2,5(200) = 500 \text{ kN}$, e resolvemos novamente a Eq. 11.11 para determinarmos o valor de I . Obtemos

$$I = 15,588 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad \frac{\alpha^4}{12} = 15,588 \times 10^{-6} \quad \alpha = 116,95 \text{ mm}$$

A tensão normal na coluna é

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200 \text{ kN}}{(0,11695 \text{ m})^2} = 14,62 \text{ MPa}$$

Como esse valor é maior que a tensão admissível, a dimensão obtida não é aceitável, e devemos dimensionar a seção transversal baseando-nos na resistência à compressão. Escrevemos

$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{200 \text{ kN}}{12 \text{ MPa}} = 16,67 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\alpha^2 = 16,67 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \alpha = 129,1 \text{ mm}$$

Uma seção transversal de $130 \times 130 \text{ mm}$ é aceitável.

11.4 FÓRMULA DE EULER PARA COLUNAS COM OUTRAS CONDIÇÕES DE EXTREMIDADE

A fórmula de Euler (11.11) foi deduzida na seção anterior para uma coluna com as duas extremidades articuladas. Vamos ver agora como determinar a carga crítica para outras condições de vínculo nas extremidades de uma coluna.

No caso de uma coluna com uma extremidade livre A , onde se aplica a força P , e a outra extremidade B engastada (Fig. 11.9a), observamos que a coluna se comporta como a parte de uma coluna com extremidades articuladas (Fig. 11.9b). A carga crítica para a coluna da Fig. 11.9a é a mesma da coluna da Fig. 11.9b e é obtida da fórmula de Euler (11.11) usando um comprimento para a coluna igual ao dobro do comprimento L real. Dizemos que o *comprimento efetivo de flambagem* L_e da coluna da Fig. 11.9 é igual a $2L$ e substituímos $L_e = 2L$ na fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (11.11')$$

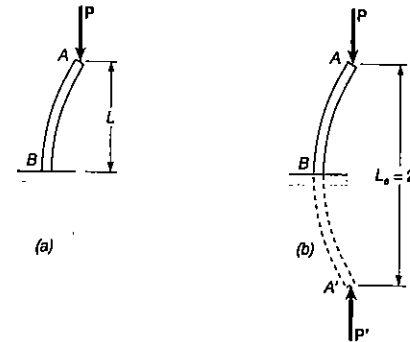


Fig. 11.9

A tensão crítica é obtida de maneira semelhante pela fórmula

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \quad (11.13)$$

A grandeza L_e/r é chamada *índice efetivo de esbeltez* da coluna e, no caso considerado, é igual a $2L/r$.

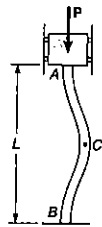


Fig. 11.10

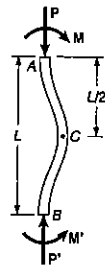


Fig. 11.11

Consideremos em seguida uma coluna com duas extremidades engastadas *A* e *B* que suporta a força *P* (Fig. 11.10). A coluna, seu carregamento e os apoios são simétricos em relação a um eixo horizontal que passa pelo ponto médio *C*. Essa simetria leva às condições de que a força cortante em *C* deve se nula, bem como as componentes horizontais das reações em *A* e *B* (Fig. 11.11).

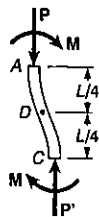


Fig. 11.12

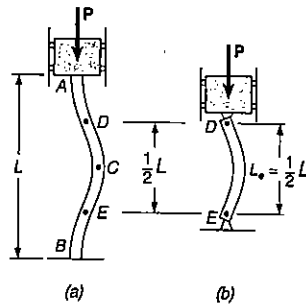


Fig. 11.13

Desse modo, as restrições impostas à parte *AC* pelo apoio em *A* e pela parte inferior da coluna em *B* são idênticas (Fig. 11.12). A parte *AC* deve ser simétrica em relação a seu ponto médio *D*, e esse ponto deve ser um ponto de inflexão, onde o momento fletor é nulo. Pela mesma razão, o momento fletor no ponto médio *E* da parte inferior da coluna também deve ser nulo (Fig. 11.13a). Sabemos que o momento fletor nas extremidades de uma coluna articulada deve ser igual a zero, e podemos dizer que a parte *DE* da coluna da Fig. 11.13a deve ter o mesmo comportamento de uma coluna biarticulada (Fig. 11.13b). Concluímos assim que o comprimento de flambagem de uma coluna com as duas extremidades engastadas é $L_e = L/2$.



Fig. 11.14

No caso de uma coluna com uma extremidade engastada *B* e uma extremidade articulada *A* que suporta a força *P* (Fig. 11.14), devemos montar e resolver a equação diferencial da linha elástica para determinarmos o comprimento de flambagem referente a esse caso. Tomando como corpo livre toda a coluna (Fig. 11.15), vemos inicialmente que aparece a força horizontal *V* na extremidade *A*, juntamente com a carga *P*, e que *V* é estaticamente indeterminada. Considerando só a parte *AQ* da coluna (Fig. 11.16), e estudando seu diagrama de corpo livre, verificamos que o momento fletor em *Q* vale

$$M = -Py - Vx$$

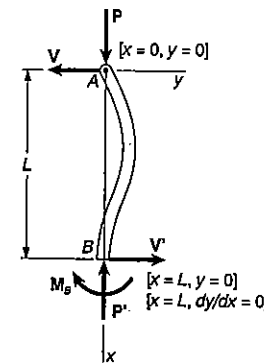


Fig. 11.15

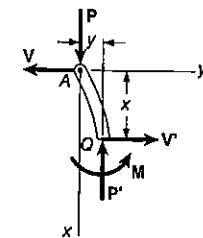


Fig. 11.16

Levando esse valor à Eq. 8.4 da Sec. 8.3 escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x$$

Como fizemos na Sec. 11.3, transpomos o termo que contém y e adotamos

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (11.6)$$

escrevendo

$$\frac{d^2x}{dx^2} + p^2y = -\frac{V}{EI}x \quad (11.14)$$

Essa é uma equação linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes. Vemos que os dois primeiros membros das Eqs. 11.7 e 11.4 são iguais, portanto podemos dizer que a solução geral da Eq. 11.14 é obtida somando-se uma solução particular de (11.14) à solução (11.8) que foi encontrada para a Eq. 11.7. É fácil ver que uma solução particular para a Eq. 11.14 é

$$y = -\frac{V}{p^2EI}x$$

ou, recorrendo a (11.6),

$$y = -\frac{V}{P}x \quad (11.15)$$

Somando as soluções (11.8) e (11.15), obtemos a solução geral da Eq. 11.14:

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - \frac{V}{P}x \quad (11.16)$$

As condições de contorno da Fig. 11.15 permitem encontrar o valor das constantes A e B e a intensidade da força incógnita V . Inicialmente fazemos $x = 0$ e $y = 0$ na Eq. 11.16, encontrando $B = 0$. A seguir, tomando $x = L$ e $y = 0$, obtemos

$$A \operatorname{sen} pL = \frac{V}{P}L \quad (11.17)$$

Finalmente, calculando

$$\frac{dy}{dx} = Ap \cos px - \frac{V}{P}$$

e fazendo $x = L$, $dy/dx = 0$, temos

$$Ap \cos pL = \frac{V}{P} \quad (11.18)$$

Dividimos agora membro a membro as expressões (11.17) e (11.18), concluindo que só existe uma solução da forma da expressão (11.16) se

$$\operatorname{tg} pL = pL \quad (11.19)$$

Por tentativas, verificamos que o menor valor para o qual se verifica a equação acima é

$$pL = 4,4934 \quad (11.20)$$

Levamos o valor de p definido por (11.20) à Eq. 11.6. Encontramos para a carga crítica da coluna o valor

$$P_{cr} = \frac{20,19EI}{L^2} \quad (11.21)$$

Determinamos então o comprimento de flambagem da coluna da Fig. 11.14 igualando o primeiro membro das Eqs 11.11' e 11.21:

$$\frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{20,19EI}{L^2}$$

Assim, para uma coluna com uma extremidade engastada e outra articulada, o comprimento efetivo de flambagem pode ser determinado pela equação acima, encontrando-se $L_e = 0,699L \approx 0,7L$.

A Fig. 11.17 indica os vários casos de condição de extremidade considerados nesta seção e os correspondentes comprimentos efetivos de flambagem.

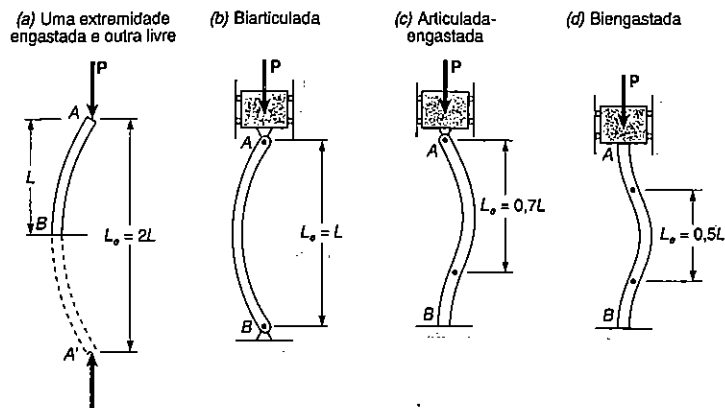
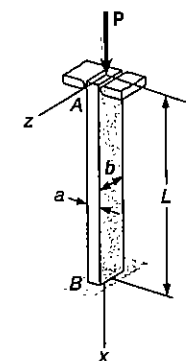


Fig. 11.17 Comprimento efetivo de flambagem para várias situações de extremidade.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.1

Uma coluna de alumínio de seção transversal retangular tem comprimento L e extremidade engastada B . A coluna suporta uma carga centrada em sua extremidade A . Na extremidade A da coluna existem duas placas lisas de cantos arredondados que impedem essa extremidade de se movimentar em um dos planos verticais de simetria da coluna, mas não impedem movimentos na direção do outro plano. (a) Determinar a relação a/b entre os lados da seção transversal que corresponde à solução de projeto mais eficiente contra a flambagem. (b) Dimensionar a seção transversal mais eficiente para a coluna, sabendo-se que $L = 500$ mm, $E = 70$ GPa, $P = 20$ kN e que o coeficiente de segurança deve ser de 2,5.



Flambagem no plano xy . Recorrendo à Fig. 11.17, vemos que o comprimento efetivo de flambagem referente a esse plano é $L_e = 0,7L$. A seguir obtemos o raio de giração da seção, r_z , fazendo

$$I_z = \frac{1}{12} b a^3 \quad A = ab$$

e, sendo $I_z = A r_z^2$, $r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12} b a^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \quad r_z = a/\sqrt{12}$

O índice efetivo de esbelteza da coluna com relação à flambagem no plano xy é

$$\frac{L_e}{r_z} = \frac{0,7L}{a/\sqrt{12}} \tag{1}$$

Flambagem no plano xz . O comprimento de flambagem referente a esse plano é $L_e = 2L$, e o raio de giração correspondente é $r_y = b/\sqrt{12}$. Assim,

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} \tag{2}$$

(a) **Dimensionamento mais eficiente.** O dimensionamento mais eficiente é aquele para o qual as tensões que correspondem aos dois modos possíveis de

flambagem são iguais. Recorrendo à Eq. 11.13', verificamos que isso se consegue no caso em que os valores dos índices efetivos de esbeltez obtidos sejam iguais. Podemos escrever

$$\frac{0,7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

e calculando a relação a/b , $\frac{a}{b} = \frac{0,7}{2} = 0,35$

(b) Dimensionamento para os dados do problema. Para o coeficiente de segurança exigido igual a 2,5,

$$P_{cr} = (C.S.)P = (2,5)(20kN) = 50 kN$$

Usando $a = 0,35b$, temos $A = ab = 0,35b^2$ e

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{50 \times 10^3 N}{0,35b^2}$$

Fazendo $L = 0,500$ m na Eq. 2, encontramos $L_e/r_y = 3,464/b$. Substituindo na Eq. 11.13', temos

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} = \frac{50 \times 10^3 N}{0,35b^2} = \frac{\pi^2(70 \times 10^9 Pa)}{(3,464/b)^2}$$

$b = 39,7$ mm $a = 0,35b = 13,9$ mm

PROBLEMAS

11.1 Sabendo-se que a mola em A é de constante k e que a barra AB é rígida, determinar a carga crítica P_{cr} .

11.2 Sabendo-se que a mola torcional em B é de constante k e que a barra AB é rígida, determinar a carga crítica P_{cr} .

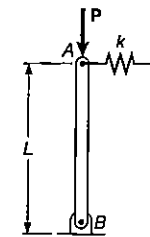


Fig. P11.1

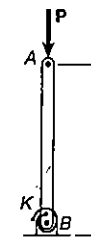


Fig. P11.2

11.3 Duas barras rígidas AC e BC são conectadas a uma mola de constante k , como mostrado. Sabendo-se que a mola pode atuar tanto à tração quanto à compressão, determinar a carga crítica P_{cr} para o sistema.

11.4 Duas barras rígidas AC e BC são conectadas por um pino C, como mostrado. Sabendo-se que a mola de torção em B é de constante k , determinar a carga crítica P_{cr} para o sistema.

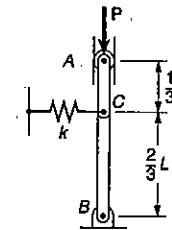


Fig. P11.3

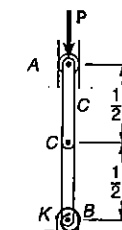


Fig. P11.4

11.5 A barra rígida AD é fixa a duas molas de constante k e está em equilíbrio na posição mostrada. Sabendo-se que as cargas P e P' são iguais e opostas e permanecem verticais, determinar a intensidade P_{cr} da carga crítica para o sistema. Cada uma das molas pode atuar tanto à tração quanto à compressão.

11.6 A barra rígida AB é fixa a uma articulação em A e a duas molas, cada uma de constante $k = 260$ kN/m. Se $h = 0,75$ m, determinar a carga crítica. Cada uma das molas pode atuar tanto à tração quanto à compressão.

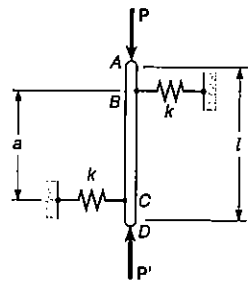


Fig. P11.5

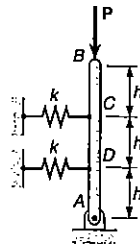


Fig. P11.6

11.7 Se $m = 150 \text{ kg}$, $h = 500 \text{ mm}$ e a constante de cada uma das molas é $k = 2,5 \text{ kN/m}$, determinar a variação dos valores da distância d para que o equilíbrio da barra rígida AB seja estável na posição mostrada. Cada uma das molas pode atuar à tração ou à compressão.

11.8 Um quadro consiste de quatro membros em forma de L , conectadas por quatro molas de torção, cada uma de constante k . Sabendo-se que iguais forças P são aplicadas nos pontos A e D , como mostrado, determinar a carga crítica P_{cr} para o sistema.

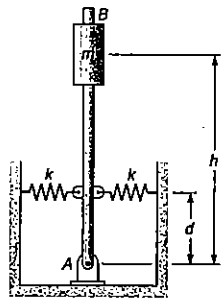


Fig. P11.7

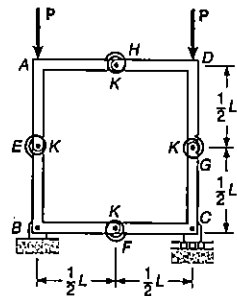


Fig. P11.8

11.9 A barra BC é fixa à barra rígida AB e ao suporte fixo em C . Sabendo-se que $G = 77 \text{ GPa}$, determinar o diâmetro d da barra BC para que a carga crítica P_{cr} do sistema seja 335 N .

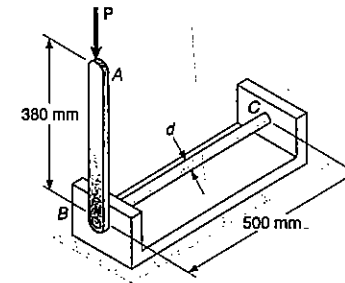


Fig. P11.9 e P11.10

11.10 A barra de aço BC é fixa à barra rígida AB e ao suporte fixo em C . Sabendo-se que $G = 77 \text{ GPa}$, determinar a carga crítica P_{cr} para o sistema, quando $d = 12,7 \text{ mm}$.

11.11 Determinar a carga crítica de um sarrafo de madeira, que tem $0,90 \text{ m}$ de comprimento e seção transversal retangular de $4,8 \times 32 \text{ mm}$. Usar $E = 12 \text{ GPa}$.

11.12 Determinar a carga crítica de uma régua de madeira, que tem uma seção transversal de $4 \times 28 \text{ mm}$. Usar $E = 12 \text{ GPa}$.

11.13 Determinar a carga crítica de uma respiga redonda de madeira que tem 900 mm de comprimento e um diâmetro de: (a) 10 mm ; (b) 15 mm . Usar $E = 12 \text{ GPa}$.

11.14 Determinar a carga crítica de um tubo de alumínio que tem $1,5 \text{ m}$ de comprimento, um diâmetro externo de 20 mm e uma espessura de $3,2 \text{ mm}$. Usar $E = 70 \text{ GPa}$.

11.15 Determinar: (a) a carga crítica para a coluna de alumínio; (b) a dimensão d para que a coluna de aço tenha a mesma carga crítica; (c) expressar o peso da coluna de alumínio como uma porcentagem do peso da coluna de aço.

11.16 Determinar a dimensão d para que a coluna de alumínio e a de aço tenham o mesmo peso e, calcule a carga crítica para cada uma das colunas.

11.17 Determinar o raio da estrutura redonda para que as colunas, redonda e quadrada, tenham a mesma área da seção transversal também calcular a carga crítica para cada uma das colunas. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

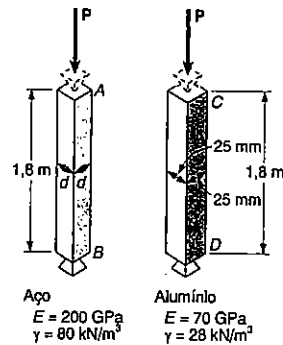


Fig. P11.15 e P11.16

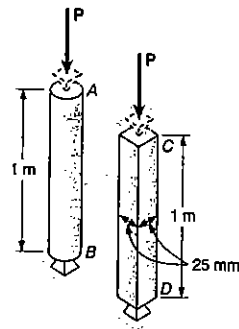


Fig. P11.17 e P11.18

11.18 Determinar: (a) a carga crítica para a coluna quadrada; (b) o raio da coluna redonda, para que ambas as colunas tenham a mesma carga crítica; (c) expressar a área da seção transversal da coluna quadrada como uma porcentagem da área da seção transversal da coluna redonda. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

11.19 Pede-se determinar: (a) a carga crítica de uma barra vazada de alumínio, que tem 0,9 m de comprimento, 50 mm de diâmetro externo e 6,35 mm de espessura; (b) a carga crítica para uma barra reprojitada, em que a área da seção transversal é reduzida para 50%, enquanto que o comprimento e o diâmetro externo ficam inalterados. Usar $E = 70 \text{ GPa}$.

11.20 O projeto de uma barra vazada de aço requer uma área da seção transversal de 1000 mm^2 . Sabendo-se que o comprimento efetivo da barra é de 2 m, determinar a carga crítica quando a razão entre o diâmetro externo e o diâmetro interno é de: (a) 2,00; (b) 1,50. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

11.21 Um membro em compressão, de comprimento efetivo igual a 2 m, consiste de uma barra maciça de latão, de diâmetro igual a 40 mm. Para reduzir de 25% o peso do membro, a barra maciça é substituída por uma barra vazada de seção transversal, como mostrado. Determinar: (a) a porcentagem de redução da carga crítica; (b) o valor da carga crítica para a barra vazada. Usar $E = 105 \text{ GPa}$.

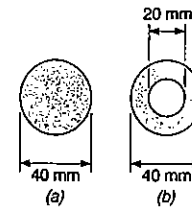


Fig. P11.21

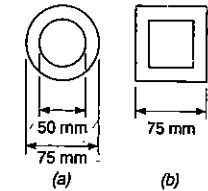


Fig. P11.22

11.22 Duas barras de latão usadas como membros em compressão, cada uma delas com 1,8 m de comprimento efetivo, tem as seções transversais mostradas. Determinar: (a) a espessura da parede da barra vazada quadrada, para que as barras tenham a mesma área da seção transversal; (b) a carga crítica para cada barra, usando $E = 105 \text{ GPa}$.

11.23 e 11.24 Uma coluna de comprimento efetivo L pode ser confeccionada, pregando-se firmemente as pranchas idênticas, tal como mostrado. Para a espessura das pranchas indicadas, determinar a razão entre a carga crítica usando o arranjo a, e a carga crítica usando o arranjo b.

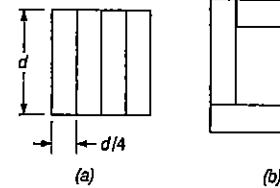


Fig. P11.23

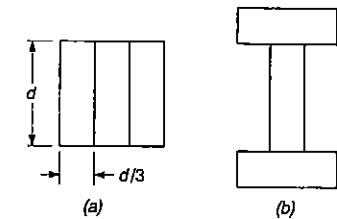


Fig. P11.24

11.25 Os apoios A e B da coluna biarticulada mostrada estão fixos a uma distância L , um do outro. Sabendo-se que em uma temperatura T_0 a força na coluna é zero, e que a flambagem ocorre quando a temperatura é $T_1 = T_0 + \Delta T$, pede-se expressar ΔT em termos de b , L e do coeficiente de expansão térmica α .

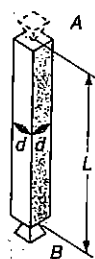


Fig. P11.25

11.26 Uma coluna de aço biarticulada, de 100 × 100 mm de seção transversal é apoiada como mostrado no Prob. 11.25. Sabendo-se que inicialmente a força na coluna é zero, determinar o comprimento L necessário, se a flambagem deve ocorrer para um aumento de temperatura $\Delta T = 25^\circ\text{C}$. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

11.27 e 11.28 Um membro em compressão, de comprimento efetivo igual a 3,6 m, é feito soldando-se juntos dois perfis laminados de aço L100 × 75 × 6,35 mm, como mostrado. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível para o membro, se um coeficiente de segurança de 2,5 é desejado.

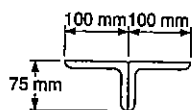


Fig. P11.27

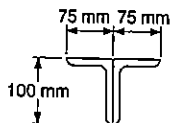


Fig. P11.28

11.29 Uma coluna de 6 m de comprimento efetivo será feita com três placas, como mostrado. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar o coeficiente de segurança, em relação a flambagem, para uma carga centrada de 16 kN.

11.30 Uma coluna de 2,5 m de comprimento efetivo é feita da metade de um perfil laminado de aço W200 × 52. Usando-se as propriedades geométricas da seção transversal mostrada, determinar o coeficiente de segurança, se a carga centrada admissível é 1150 kN. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

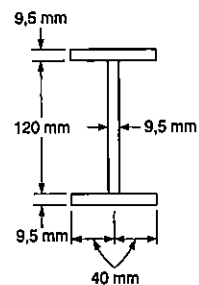


Fig. P11.29

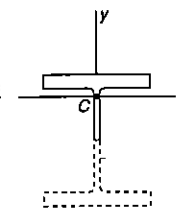


Fig. P11.30

$$A = 3325 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 8,865 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 11,557 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

11.31 Uma coluna de comprimento efetivo igual a 3,5 m é feita soldando-se juntos dois perfis laminados L89 × 64 × 6,4 mm, como mostrado. Usando $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível, se um coeficiente de segurança de 2,8 é desejado.

11.32 Uma coluna de comprimento efetivo igual a 4,8 m será fabricada soldando-se juntos dois perfis laminados de aço C150 × 15,6. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível, se um coeficiente de segurança de 2,8 é desejado.

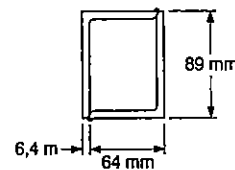


Fig. P11.31

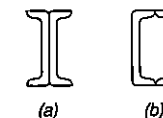


Fig. P11.32

11.33 e 11.34 Sabendo-se que um coeficiente de segurança de 2,6 é desejado, determinar a maior carga P que pode ser aplicada a estrutura mostrada. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e considerar somente a flambagem no plano da estrutura.

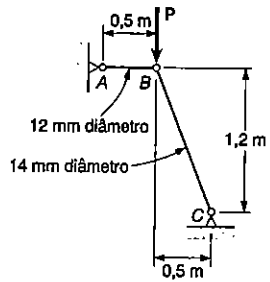


Fig. P11.33

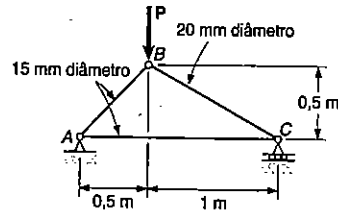


Fig. P11.34

11.35 Sabendo-se que um coeficiente de segurança de 2,5 é desejado, determinar a maior carga P que pode ser aplicada para a estrutura, quando $\alpha = 75^\circ$. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e considerar somente a flambagem no plano da estrutura.

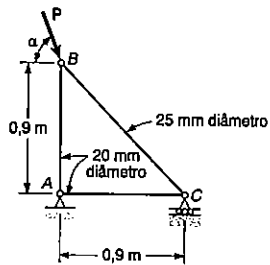


Fig. P11.35

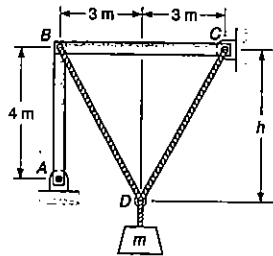


Fig. P11.37

11.36 Para a estrutura do Prob. 11.35, determinar: (a) o ângulo α para que o coeficiente de segurança, em relação à flambagem, seja máximo; (b) o correspondente coeficiente de segurança para $P = 7120 \text{ N}$.

11.37 Os membros articulados AB e BC consistem de tubos de alumínio, cujas seções tem 120 mm de diâmetro externo e 10 mm de espessura. Sabendo-se que um coeficiente de segurança de 3,5 é desejado, determinar a maior massa m do bloco, que pode ser suportado pelo arranjo mostrado, quando $h = 4 \text{ m}$. Usar $E = 70 \text{ GPa}$ e considerar somente a flambagem no plano da estrutura.

11.38 Para a estrutura do Prob. 11.37, determinar: (a) a distância h para que o coeficiente de segurança em relação à flambagem seja máximo; (b) o correspondente coeficiente de segurança para $m = 7500 \text{ kg}$.

11.39 Os membros AB e CD são de barras de aço com 30 mm de diâmetro. Quando o esticador é apertado, o membro diagonal AC torna-se tracionado. Sabendo-se que um coeficiente de segurança em relação à flambagem de 3,2 é desejado, determinar a maior tração admissível em AC , quando $h = 2,4 \text{ m}$. Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e considerar somente flambagem no plano da estrutura.

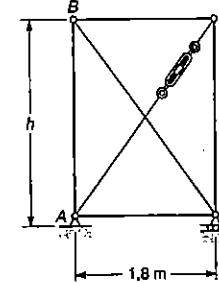


Fig. P11.39

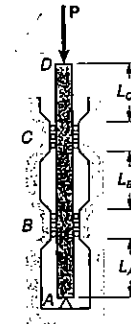


Fig. P11.41

11.40 Para a estrutura do Prob. 11.39, determinar: (a) a distância h para que o coeficiente de segurança, em relação à flambagem, seja o mesmo para cada um dos quatro membros; (b) a correspondente tração admissível no membro AC , se o coeficiente de segurança é 2,8.

11.41 Uma coluna quadrada de alumínio, de 25 mm de lado, é mantida na posição mostrada, por um pino em A e por uma série de roletes em B e C , que impedem a rotação da coluna no plano da figura. Sabendo-se que $L_{AB} = 0,9 \text{ m}$, $L_{BC} = 1,2 \text{ m}$ e $L_{CD} = 0,3 \text{ m}$, determinar a carga admissível P , usando um coeficiente de segurança em relação à flambagem de 3,2. Considerar somente a flambagem no plano da figura e usar $E = 77 \text{ GPa}$.

11.42 Para a coluna do Prob. 11.41, sabendo-se que $L_{AB} = 0,9 \text{ m}$, determinar: (a) os maiores comprimentos de L_{BC} e L_{CD} que podem ser usados, se a carga admissível P deve ser tanto maior quanto possível; (b) a intensidade da correspondente carga admissível.

11.43 Um bloco rígido de massa m pode ser suportado por duas colunas, em um dos quatro modos mostrados. Cada uma das colunas consiste de um tubo de alumínio que tem um diâmetro externo de 44 mm e uma espessura de 4 mm. Usando $E = 77 \text{ GPa}$ e um coeficiente de segurança de 2,8, determinar a carga admissível para cada uma das condições de apoio.

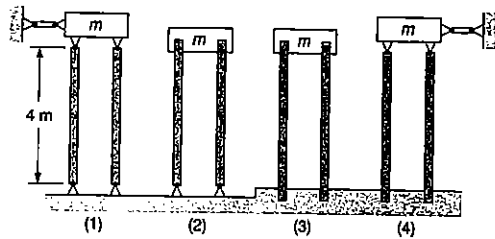


Fig. P11.43

11.44 Cada uma das cinco colunas mostradas consiste de uma barra maciça de aço. Pede-se: (a) sabendo-se que a coluna da Fig. (1) tem 20 mm de diâmetro, determinar o coeficiente de segurança em relação à flambagem para o carregamento mostrado; (b) determinar o diâmetro em cada uma das outras estruturas, para que o coeficiente de segurança seja o mesmo que o coeficiente de segurança obtido na parte a. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

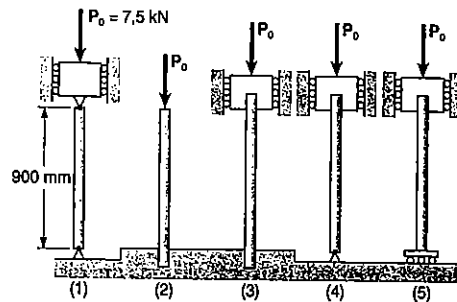


Fig. P11.44

11.45 A barra uniforme de alumínio AB tem uma seção transversal retangular de $20 \times 36 \text{ mm}$ e é suportada por garfos e pinos, como mostrado. Cada uma das extremidades da barra pode girar livremente em torno de um eixo horizontal ao longo do pino, mas a rotação em torno de um eixo vertical é impedida pelos garfos. Usando-se $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível P , se um coeficiente de segurança de 2,5 é desejado.

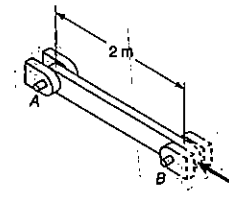


Fig. P11.45

11.46 A coluna ACB tem uma seção transversal uniforme e é contraventada no plano xz , em seu ponto médio C . Pede-se: (a) determinar a relação b/d , para que o coeficiente de segurança, em relação à flambagem no plano xz e no plano yz , seja o mesmo; (b) usando-se a relação encontrada na parte a, projetar a seção transversal da coluna para que o coeficiente de segurança seja igual a 3,0, quando: $P = 4400 \text{ N}$, $L = 1 \text{ m}$ e $E = 200 \text{ GPa}$.

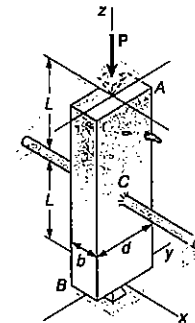


Fig. P11.46 e P11.47

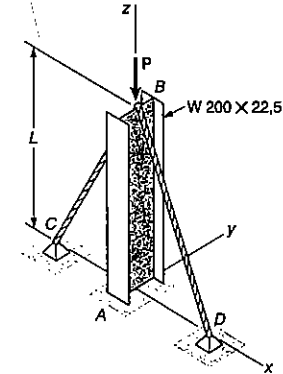


Fig. P11.48

11.47 A coluna de aço ACB tem uma seção retangular uniforme com $b = 12 \text{ mm}$ e $d = 22 \text{ mm}$. A coluna é contraventada no plano xz , em seu ponto médio C e suporta uma carga centrada P de intensidade 3800 N . Sabendo-se que um coeficiente de segurança de 3,2 é desejado, determinar o maior comprimento admissível L . Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

11.48 Uma coluna AB suporta uma carga centrada de intensidade 65 kN . Os cabos BC e BD são esticados e impedem o movimento do ponto B no plano xz . Usando a fórmula de Euler e um coeficiente de segurança de 2,2 e desprezando a tração nos cabos, determinar o máximo comprimento admissível L . Usar $E = 200 \text{ GPa}$.

11.49 Um perfil laminado de aço W200 x 22,5 é usado com o apoio fixo e os cabos mostrados no arranjo do Prob. 11.48. Sabendo-se que $L = 7,2$ m, determinar a carga centrada admissível P , se um coeficiente de segurança de 2,2 é desejado. Usar $E = 200$ GPa.

*11.5 CARGA EXCÊNTRICA: A FÓRMULA DA SECANTE

Vamos analisar nesta seção o problema da flambagem de colunas de um outro modo, levando em conta que a força P aplicada a uma coluna nunca é perfeitamente centrada. Chamemos de e à excentricidade da carga, quer dizer, à distância entre a linha de ação de P e o eixo da coluna (Fig. 11.18a). Vamos substituir a carga excêntrica dada por uma carga centrada P e um conjugado M_A de momento igual a $M_A = Pe$ (Fig. 11.18b). Fica claro que, por menor que sejam a carga P e a excentricidade e , o conjugado M_A sempre irá provocar alguma flexão na coluna (Fig. 11.19). Se a carga excêntrica aumentar, aumentam também a carga centrada P e o conjugado M_A , o que provoca uma majoração da flexão na coluna. Analisando desta maneira, o problema da flambagem não é mais uma questão de se determinar até que ponto uma coluna se mantém reta e estável sob a ação de uma carga crescente, mas sim uma questão de se determinar até que ponto se pode permitir a majoração da flexão pelo aumento da carga, sem exceder a tensão admissível ou a deflexão $y_{máx}$ permitida.

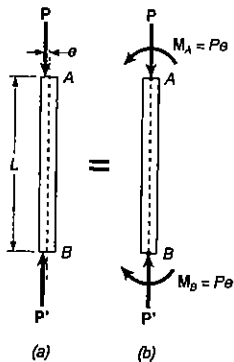


Fig. 11.18

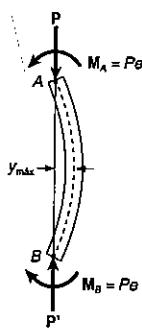


Fig. 11.19

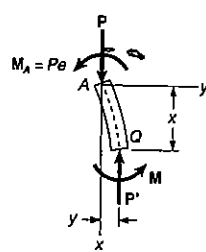


Fig. 11.20

Vamos inicialmente montar e resolver a equação diferencial da linha elástica da mesma maneira como foi feito nas Secs. 11.2 e 11.3. Desenhando o diagrama de corpo livre da parte AQ da coluna e escolhendo os eixos coordenados como indica a Fig. 11.20, verificamos que o momento fletor em Q é

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe \quad (11.22)$$

Substituindo o valor de M na Eq. 8.4 da Sec. 8.2, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI}$$

Transpondo o termo que contém y e fazendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (11.6)$$

temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e \quad (11.23)$$

O primeiro membro desta equação é igual ao da Eq. 11.7, que foi resolvida na Sec. 11.2. Escrevemos então a solução geral da Eq. 11.23 como sendo

$$y = A \text{ sen } px + B \text{ cos } px - e \quad (11.24)$$

onde o último termo é uma solução particular da Eq. 11.23.

As constantes A e B são obtidas das condições de contorno indicadas na Fig. 11.21. Fazendo inicialmente $x = 0$ e $y = 0$ na Eq. 11.24, obtemos

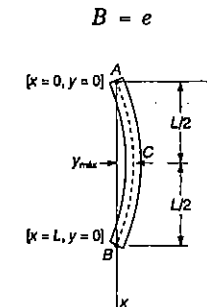


Fig. 11.21

Fazendo a seguir $x = L$ e $y = 0$, escrevemos

$$A \operatorname{sen} pL = e(1 - \cos pL) \quad (11.25)$$

Lembrando que

$$\operatorname{sen} pL = 2 \operatorname{sen} \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$$

e

$$1 - \cos pL = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{pL}{2}$$

e substituindo na Eq. 11.25, encontramos, após algumas transformações,

$$A = e \operatorname{tg} \frac{pL}{2}$$

Levamos os valores de A e B à Eq. 11.24, escrevendo a equação da linha elástica:

$$y = e \left(\operatorname{tg} \frac{pL}{2} \operatorname{sen} px + \cos px - 1 \right) \quad (11.26)$$

Para obtermos o valor da deflexão máxima, vamos fazer $x = L/2$ na Eq. 11.26. Temos

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= e \left(\operatorname{tg} \frac{pL}{2} \operatorname{sen} \frac{pL}{2} + \cos \frac{pL}{2} - 1 \right) \\ &= e \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{pL}{2} + \cos^2 \frac{pL}{2}}{\cos \frac{pL}{2}} - 1 \right) \\ y_{\text{máx}} &= e \left(\sec \frac{pL}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (11.27)$$

Recorrendo à Eq. 11.6, escrevemos

$$y_{\text{máx}} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (11.28)$$

A expressão acima mostra que y assume um valor infinito quando

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (11.29)$$

Embora a deflexão realmente não atinja um valor infinito ela se torna inaceitavelmente grande. Assim, a carga P não deve atingir o valor crítico que satisfaz à Eq. 11.29. Dessa equação calculamos

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (11.30)$$

que é o mesmo valor para o caso de carga centrada na Sec. 11.3. Calculamos o valor EI na Eq. 11.30 e o substituímos na Eq. 11.28, expressando a deflexão máxima em uma forma alternativa:

$$y_{\text{máx}} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1 \right) \quad (11.31)$$

A tensão máxima $\sigma_{\text{máx}}$ ocorre na seção da coluna em que atua o maior momento fletor, isto é, na seção transversal pelo ponto C . Essa tensão é obtida pela soma da tensão normal devida à força axial e da tensão normal devido ao momento fletor que age naquela seção (cf. Sec. 4.13). Temos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}} c}{I} \quad (11.32)$$

Do diagrama de corpo livre da parte AC da coluna (Fig. 11.22), vemos que

$$M_{\text{máx}} = Py_{\text{máx}} + M_A = P(y_{\text{máx}} + e)$$

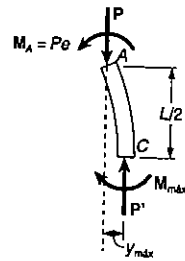


Fig. 11.22

Substituímos esse valor em (11.32), lembrando que $I = Ar^2$:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{\text{máx}} + e)c}{r^2} \right] \quad (11.33)$$

Substituindo $y_{\text{máx}}$ pelo valor obtido em (11.28) podemos escrever

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right] \quad (11.34)$$

Uma outra forma pode ser obtida se substituirmos $y_{\text{máx}}$ dado por (11.31) na Eq. 11.33. Temos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} \right) \quad (11.35)$$

A equação acima pode ser usada em qualquer caso de condição de apoio, desde que se aplique a expressão apropriada para a carga crítica (cf. Sec. 11.4).

A tensão $\sigma_{\text{máx}}$ não varia linearmente com a carga P , de modo que não deve ser aplicado o princípio da superposição para a determinação das tensões provocadas por várias cargas aplicadas simultaneamente. Devemos primeiramente calcular a resultante dos carregamentos, para depois passarmos à aplicação das Eqs. 11.34 ou 11.35 no cálculo das tensões. Pela mesma razão, qualquer coeficiente de segurança deve ser aplicado ao carregamento e não à tensão.

Na Eq. 11.34, fazendo $I = Ar^2$ e resolvendo a equação resultante para a relação P/A , escrevemos

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)} \quad (11.36)$$

onde o comprimento efetivo de flambagem é usado para tornar a fórmula aplicável para quaisquer condições de extremidade. Essa fórmula é conhecida como *fórmula da secante*: ela define uma força por unidade de área, P/A , que causa uma certa tensão $\sigma_{\text{máx}}$ em uma coluna de índice de esbeltez conhecido, L_e/r , para um certo valor da relação ec/r^2 , onde e é a excentricidade da carga aplicada. Ela é uma equação transcendente, uma vez que P/A aparece nos dois membros, e deve ser resolvida por tentativas para que se obtenha o valor de P/A correspondente à coluna e ao carregamento dados.

A Eq. 11.36 foi usada para o desenho das curvas indicadas na Fig. 11.23, relativas a uma coluna de aço com $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$. Essas curvas tornam possível a determinação da carga por unidade de área, P/A , que provoca escoamento na coluna de valores L_e/r e ec/r^2 conhecidos.

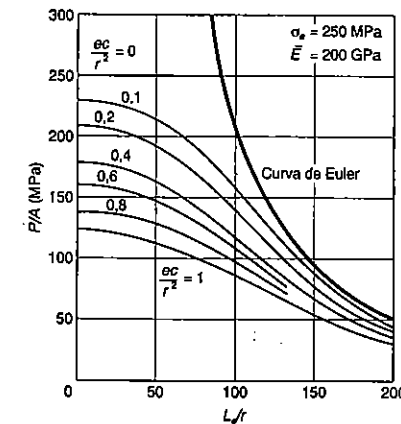


Fig. 11.23 Carga por unidade de área, P/A , que provoca escoamento em uma coluna de aço.

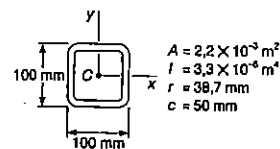
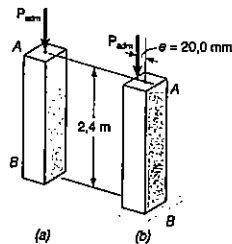
Para valores pequenos de L_e/r , a secante é aproximadamente igual a 1, e a Eq. 11.36 pode ser escrita assim:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \frac{ec}{r^2}} \quad (11.37)$$

expressão essa que pode ser obtida pelo método da Sec. 4.13 se desprezarmos o efeito da deflexão lateral da coluna. Por outro lado, a Fig. 11.23 mostra que, para valores altos de L_e/r , as curvas que correspondem aos vários valores de ec/r^2 se aproximam bem da curva de Euler dada pela Eq. 11.13', de modo que o efeito da excentricidade do carregamento sobre o valor de P/A se torna desprezível. A fórmula da secante é usada principalmente para valores intermediários de L_e/r . No entanto, seu uso efetivo só é possível quando se conhece o valor da excentricidade e da carga, o que raramente é possível de se conseguir com grau de exatidão necessário.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.2

A coluna de seção uniforme indicada é constituída de um tubo com 2,4 m de comprimento. (a) Determinar, pela fórmula de Euler e com um coeficiente de segurança igual a 2, a carga centrada admissível para a coluna e a tensão normal correspondente. (b) Supondo-se que o valor de carga admissível encontrado em a é aplicado a um ponto 20,0 mm fora do eixo geométrico da coluna, determinar o deslocamento horizontal do topo da coluna e a tensão normal máxima que ocorre. Usar $E = 200$ GPa.



$A = 2,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
 $I = 3,3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
 $r = 38,7 \text{ mm}$
 $c = 50 \text{ mm}$

Comprimento efetivo de flambagem. A coluna tem uma extremidade livre e outra engastada, e seu comprimento efetivo de flambagem é

$$L_e = 2(2,4 \text{ m}) = 4,8 \text{ m}$$

Carga crítica. Pela fórmula de Euler, escrevemos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9 \text{ N/m}^2) (3,3 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(4,8 \text{ m})^2}$$

$$P_{cr} = 282,7 \text{ kN}$$

(a) **Carga admissível e tensão normal.** Para o coeficiente de segurança 2, obtemos

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{C.S.} = \frac{282,7 \text{ kN}}{2} \quad P_{adm} = 141,36 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma = \frac{P_{adm}}{A} = \frac{141,36 \text{ kN}}{2,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \quad \sigma = 64,25 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(b) **Carga excêntrica.** A coluna AB e seu carregamento são idênticos à parte superior da coluna da Fig. 11.18, da qual foi deduzida a fórmula da secante. Desse modo, as fórmulas da Sec. 11.5 se aplicam diretamente ao caso em estudo. Sabendo-se que $P_{adm}/P_{cr} = 1/2$ e usando-se a Eq. 11.31, chega-se ao valor do deslocamento horizontal em A.

$$y_m = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

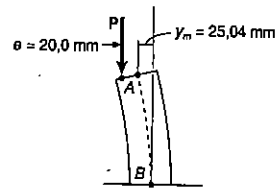
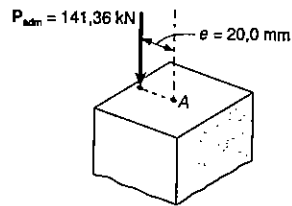
$$y_m = (20,0 \text{ mm}) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right]$$

$$y_m = (20,0)(2,252 - 1) \quad y_m = 25,04 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

A tensão normal máxima obtém-se da Eq. 11.35:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(20,0 \text{ mm})(50,0 \text{ mm})}{(38,7 \text{ mm})^2} \sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{141,36 \text{ kN}}{2,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \left[1 + \frac{(20,0 \text{ mm})(50,0 \text{ mm})}{(38,7 \text{ mm})^2} \sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= (64,25 \text{ MPa})[1 + 0,667(2,252)] \end{aligned}$$

$$\sigma_m = 160,86 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMAS

11.50 Uma carga axial P é aplicada a uma barra de aço AB , de diâmetro 35 mm, como mostrado. Quando $P = 90$ kN, observa-se na barra uma deflexão horizontal de 0,75 mm, no seu ponto médio C . Usando-se $E = 200$ GPa, determinar: (a) a excentricidade e da carga; (b) a máxima tensão na barra.

11.51 A carga axial P é aplicada em um ponto localizado sobre o eixo x , a uma distância e do eixo geomérico do perfil laminado de aço $W250 \times 58$ da coluna BC . Quando $P = 350$ kN, nela é observado que a deflexão horizontal no topo da coluna é de 5 mm. Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a excentricidade e da carga; (b) a máxima tensão na coluna.

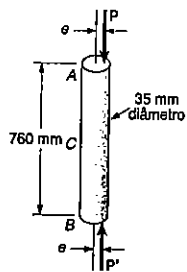


Fig. P11.50

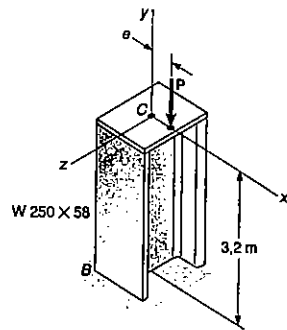


Fig. P11.51

11.52 Uma carga axial de intensidade $P = 15$ kN é aplicada em um ponto D , que está a 4 mm do eixo geomérico da barra de alumínio BC de seção quadrada. Usando $E = 70$ GPa, determinar: (a) a deflexão horizontal da extremidade C ; (b) a máxima tensão na barra.

11.53 A linha de ação de uma carga axial P , de intensidade 265 kN, é paralela ao eixo geomérico da coluna AB e intercepta o eixo x em $x = 20$ mm. Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a deflexão do ponto médio C da coluna; (b) a máxima tensão na coluna.

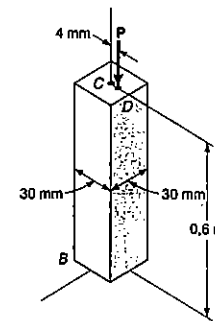


Fig. P11.52

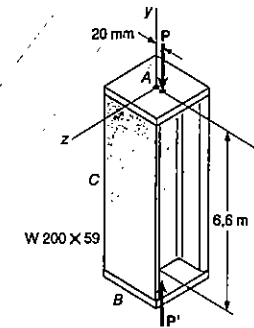


Fig. P11.53 e P11.54

11.54 A linha de ação de uma carga axial P é paralela ao eixo geomérico da coluna AB e intercepta o eixo x , em $x = 20$ mm. Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a carga P para que a deflexão horizontal do ponto médio C da coluna seja igual a 12,7 mm; (b) a correspondente tensão máxima na coluna.

11.55 Uma carga axial P é aplicada em um ponto localizado sobre o eixo x , a uma distância $e = 12,7$ mm do eixo geomérico do perfil laminado de aço $W10 \times 39$ da coluna BC . Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a carga P para que a deflexão horizontal do topo da coluna seja de 15 mm; (b) a correspondente tensão máxima na coluna.

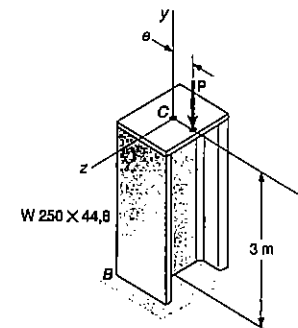


Fig. P11.55

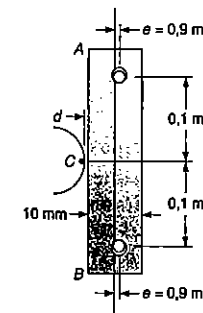


Fig. P11.56 e P11.57

11.56 A barra de aço AB tem uma seção transversal quadrada de 10×10 mm, e é mantida por pinos que estão separados por uma distância fixa de $0,2$ m, e afastados de $e = 0,9$ mm do eixo geométrico da barra. Sabendo-se que na temperatura T_0 os pinos estão em contato com a barra, e que a força na barra é zero, determinar o aumento de temperatura para que a barra estabeleça o contato com o ponto C , se $d = 0,3$ mm. Usar $E = 200$ GPa e o coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

11.57 Para a barra do Prob. 11.56, determinar a distância d necessária para que a barra estabeleça o contato com o ponto C , quando a temperatura aumenta de 60°C .

11.58 Um tubo de 3 m tem a seção transversal mostrada e é usado como uma coluna. Para o tipo de aço usado $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa. Sabendo-se que um coeficiente de segurança, em relação à deformação permanente, de $2,8$ é desejado, determinar a carga admissível P quando a excentricidade e é: (a) $12,20$ mm; (b) $7,60$ mm. (Sugestão: Como o coeficiente de segurança deve ser aplicado para a carga P , e não para a tensão, usar a Fig. 11.23 para determinar P_e .)

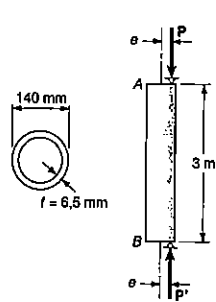


Fig. P11.58 e P11.59

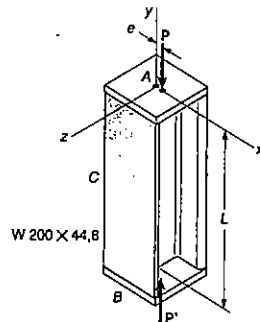


Fig. P11.60 e P11.61

11.59 Resolver o Prob. 11.58, assumindo que o comprimento da coluna é aumentado para $4,2$ m.

11.60 Cargas axiais de intensidade P são aplicadas paralelamente ao eixo geométrico da coluna AB e interceptam o eixo x , a uma distância $e = 12$ mm do eixo geométrico. Para o tipo de aço usado $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa. Sabendo-se que um coeficiente de segurança, em relação a deformação permanente, de $2,5$ é desejado, determinar: (a) a intensidade P da carga admissível quando o comprimento L é $4,25$ m; (b) a relação entre a carga encontrada na parte a e a intensidade da carga centrada admissível para a coluna. (Ver sugestão no Prob. 11.58.)

11.61 Resolver o Prob. 11.60, assumindo que o comprimento da coluna é reduzido para $2,75$ m.

11.62 Uma carga axial P de 250 kN é aplicada ao perfil laminado de aço $W200 \times 35,9$ da coluna BC , que está livre em sua extremidade C e engastada em B . Sabendo-se que a excentricidade da carga é $e = 6$ mm, determinar o maior comprimento permissível L , se a tensão admissível na coluna é de 80 MPa. Usar $E = 200$ GPa.

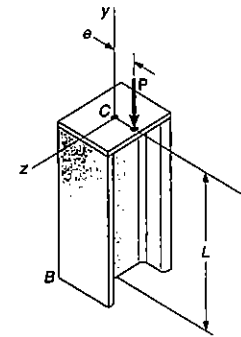


Fig. P11.62 e P11.63

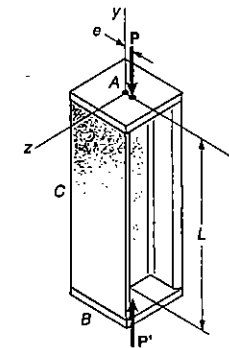


Fig. P11.64 e P11.65

11.63 Uma carga axial P de 100 kN é aplicada ao perfil laminado $W150 \times 18$ da coluna BC , que está livre em sua extremidade C e engastada em sua base B . Sabendo-se que a excentricidade da carga é $e = 6$ mm, determinar o maior comprimento permissível L , se a tensão admissível na coluna é de 80 MPa. Usar $E = 200$ GPa.

11.64 Cargas axiais de intensidade $P = 90$ kN são aplicadas paralelamente ao eixo geométrico do perfil laminado de aço $W200 \times 22,5$ da coluna AB e interceptam o eixo x a uma distância e do eixo geométrico. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 170$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar o maior comprimento permissível L , quando: (a) $e = 6,35$ mm; (b) $e = 12,7$ mm.

11.65 Cargas axiais de intensidade $P = 90$ kN são aplicadas paralelamente ao eixo geométrico do perfil laminado de aço $W250 \times 80$ da coluna AB e interceptam o eixo x a uma distância e do eixo geométrico. Sabendo-se que $\sigma_{adm} = 170$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar o maior comprimento permissível L , quando: (a) $e = 6,35$ mm; (b) $e = 12,7$ mm.

11.66 Uma carga axial de 60 kN será aplicada com uma excentricidade $e = 8$ mm em uma barra circular de aço BC , que está livre em seu topo C e engastada em sua base B . Sabendo-se que as barras disponíveis para uso têm diâmetros desde 40 mm até 80 mm, em intervalos de 4 mm, determinar a barra mais leve que pode ser usada, se $\sigma_{adm} = 120$ MPa. Usar $E = 200$ GPa.

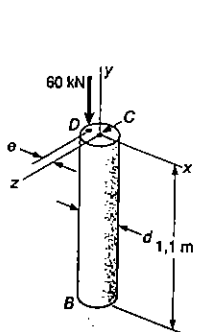


Fig. P11.66 e P11.67

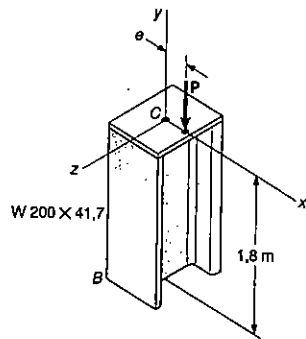


Fig. P11.68 e P11.69

11.67 Resolver o Prob. 11.66, assumindo que a carga de 60 kN seja aplicada na barra com uma excentricidade $e = 1/2 d$.

11.68 Uma carga axial P é aplicada em um ponto localizado sobre o eixo x , a uma distância $e = 15,2$ mm do eixo geométrico do perfil laminado de aço W200 x 41,7 da coluna BC . Sabendo-se que a coluna está livre em seu topo C e engastada em sua base B e que $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a carga admissível P se um coeficiente de segurança, em relação ao escoamento, de 2,5 é desejado. (Sugestão: Como o coeficiente de segurança deve ser aplicado à carga P , e não às tensões, usar a Fig. 11.23 para determinar P_e .)

11.69 Uma carga axial P de intensidade 220 kN é aplicada em um ponto localizado sobre o eixo x , a uma distância $e = 6,35$ mm do eixo geométrico do perfil laminado de aço W200 x 41,7 da coluna BC . Sabendo-se que a coluna está livre em seu topo C e engastada em sua base B e que $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar o coeficiente de segurança, em relação ao escoamento. (Ver sugestão no Prob. 11.68.)

11.6 PROJETO DE COLUNAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO CENTRADO

Nas seções anteriores, determinamos a carga crítica de uma coluna, pela fórmula de Euler, e usamos a fórmula da secante para a determinação das tensões e deformações provocadas em colunas carregadas com carregamento excêntrico. Nos dois casos, admitimos que as tensões permaneciam abaixo do limite de proporcionalidade e que a coluna era um prisma homogêneo de eixo inicialmente reto. Poucos casos da prática se enquadram nessa idealização, e o projeto de coluna na prática se baseia em fórmulas empíricas, que refletem os resultados obtidos de ensaios numerosos.

Ao longo do último século, foram testadas muitas colunas de aço, aplicando-se a elas forças centradas que tinham sua intensidade aumentada gradualmente até que se desse a ruptura da coluna. A Fig. 11.24 apresenta os resultados desses testes; cada ponto é locado com sua ordenada igual à tensão normal de ruptura σ_{cr} , e com sua abscissa igual ao valor correspondente do índice de esbeltez L_e/r . Embora haja uma certa dispersão nos resultados, podemos observar regiões que correspondem a três tipos de ruptura. Para colunas longas, com valor alto de L_e/r , a ruptura se dá como prediz a fórmula de Euler, e o valor de σ_{cr} só depende do valor de E , não dependendo do valor da tensão de escoamento σ_e . Para colunas muito curtas ou blocos comprimidos, a ruptura ocorre essencialmente como resultado do escoamento, e temos $\sigma_{cr} = \sigma_e$. As colunas de comprimento intermediário compreendem os casos em que a ruptura depende ao mesmo tempo de E e de σ_e . Nessa faixa de valores, a ruptura é um fenômeno complexo, onde o desenvolvimento de especificações e fórmulas de dimensionamento surgiram de resultados de testes numerosos.

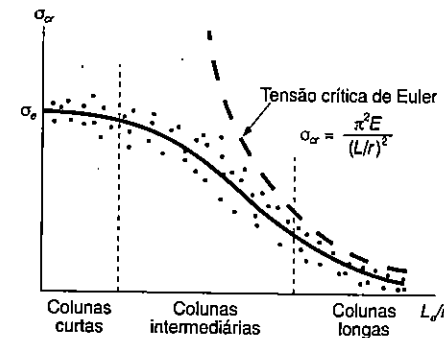


Fig. 11.24

Há cerca de um século atrás foram apresentadas fórmulas empíricas que expressam a tensão admissível ou a tensão crítica em termos do índice de esbeltez. Essas fórmulas têm, desde então, passado por um processo de melhoria e refinamento. A Fig. 11.25 indica algumas fórmulas empíricas típicas, deduzidas a partir de aproximação de curvas de dados experimentais. Como uma única expressão normalmente não consegue descrever o comportamento dos dados de testes, em toda a gama de valores de índice de esbeltez, foram desenvolvidas diversas fórmulas, cada qual aplicável para um certo intervalo de valores. Tais fórmulas foram desenvolvidas para diversos materiais. Em cada caso, devemos verificar se a fórmula escolhida se aplica ao valor do índice de esbeltez da coluna em estudo. Devemos ainda verificar se a fórmula fornece diretamente o valor da tensão admissível para a coluna, ou se ela fornece o valor da tensão crítica, quando é necessária a aplicação de um coeficiente de segurança apropriado.

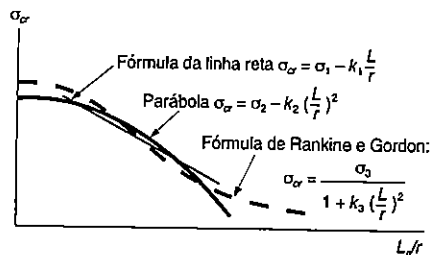


Fig. 11.25

Vamos analisar agora fórmulas específicas para três materiais típicos, que são usadas no dimensionamento de colunas com carga centrada construídas com estes materiais.

Aço estrutural. As especificações do American Institute of Steel Construction (AISC) trazem fórmulas de utilização corrente do dimensionamento de colunas sob a ação de forças centradas². Como veremos, é utilizada uma expressão parabólica para o valor de σ_{adm} em colunas curtas e intermediárias, sendo adotada uma expressão do tipo da fórmula de Euler para as colunas longas. Essas relações são desenvolvidas em duas etapas:

1. Obtém-se inicialmente uma curva representativa da variação de σ_{cr} com L/r (Fig. 11.26). Essa curva não incorpora nenhum coeficiente de segurança. A parte AB dessa curva é um arco de parábola com equação da forma

$$\sigma_{cr} = \sigma_0 - k \left(\frac{L}{r} \right)^2 \quad (11.38)$$

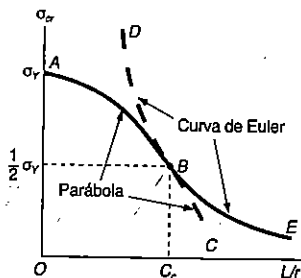


Fig. 11.26

² Manual of Steel Construction, 9ª ed., AISC, Nova Iorque, 1989.

enquanto a parte BE pertence à curva de Euler BDE, definida pela equação

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (11.39)$$

A figura mostra que $\sigma_{cr} = \sigma_e$ quando $L/r = 0$, de modo que a constante σ_0 na Eq. 11.38 é igual a σ_e . As especificações do AISC, bem como várias outras³, admitem que o ponto B, ponto de tangência entre a parábola e a curva de Euler, ocorre para a tensão crítica com valor igual à metade de σ_e .

Vamos denotar por C_c o valor de L/r nesse ponto. A Eq. 11.38 fica

$$\frac{1}{2} \sigma_e = \sigma_e - k C_c^2$$

com $k = \sigma_e / 2 C_c^2$. Substituindo na Eq. 11.38 os valores de σ_0 e k , encontramos:

$$\text{Para } L/r \leq C_c: \quad \sigma_{cr} = \sigma_e \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2 C_c^2} \right] \quad (11.40)$$

e, recorrendo à Eq. 11.39,

$$\text{Para } L/r \geq C_c: \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (11.41)$$

Na Eq. 11.41, para $\sigma_{cr} = 1/2 \sigma_e$ e $L/r = C_c$, encontramos

$$C_c^2 = \frac{2 \pi^2 E}{\sigma_e} \quad (11.42)$$

2. Devemos introduzir um coeficiente de segurança para a obtenção das fórmulas finais de dimensionamento do AISC, que definem σ_{adm} como função de L/r . Para $L/r \geq C_c$, que é o caso de colunas longas, adota-se um coeficiente de segurança constante de valor 1,92. Dividindo-se o valor de σ_{cr} obtido pela Eq. 11.41 por este fator de segurança, e tendo em mente que o AISC não permite o uso de colunas em que o coeficiente L/r exceda o valor 200, podemos escrever⁴:

$$C_c \leq \frac{L}{r} \leq 200: \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{C.S.} = \frac{\pi^2 E}{1,92(L/r)^2} \quad (11.43)$$

³ American Association of State Higways Officials.

⁴ Na verdade, o AISC especifica $\sigma_{adm} = \frac{12 \pi^2 E}{23(L/r)^2}$.

Para colunas curtas e intermediárias, é aplicada a fórmula abaixo para a obtenção do coeficiente de segurança:

$$C.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{L/r}{C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^3 \quad (11.44)$$

Aplicando este coeficiente de segurança ao valor de σ_{cr} obtido na Eq. 11.40, vamos obter:

$$\frac{L}{r} < C_c < 200: \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{C.S.} = \frac{\sigma_e}{C.S.} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^2 \right] \quad (11.45)$$

As fórmulas acima podem ser usadas com unidades do Sistema Internacional ou do Sistema Inglês.

Pela utilização das Eqs. 11.42, 11.43, 11.44 e 11.45, vamos determinar a tensão admissível para uma determinada qualidade de aço e para um dado valor de L/r . Nesse procedimento, devemos inicialmente calcular o valor de C_c , substituindo o valor conhecido de σ_e na Eq. 11.42. Para valores de L/r maiores que C_c , aplicamos a Eq. 11.43 para a determinação de σ_{adm} . Para valores de L/r menores que C_c , σ_{adm} é obtido nas Eqs. 11.44 e 11.45. Por conveniência, o AISC, *Manual of Steel Construction*, traz tabelas com os valores de tensão admissível para diferentes qualidades de aços, com valores do coeficiente de esbelteza variando de 1 a 200. A Fig. 11.27 indica a variação de σ_{adm} com L/r para três tipos de aços estruturais.

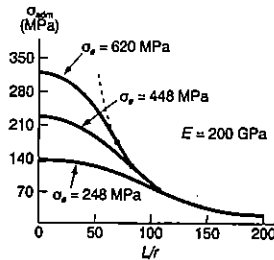


Fig. 11.27

EXEMPLO 11.2

Calcular o maior comprimento sem travamento que pode ser usado para o perfil S100 x 11,5, para que este suporte a força centrada indicada com segurança. O perfil é de aço, com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 290$ MPa.

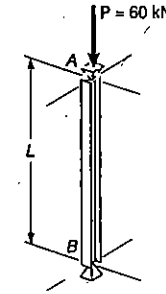


Fig. ex.11.28

Para o perfil dado, o Apêndice C apresenta as seguintes propriedades:

$$A = 1452 \text{ mm}^2 \quad r_x = 41,6 \text{ mm} \quad r_y = 14,75 \text{ mm}$$

Para que a carga de 60 kN seja suportada com segurança, devemos ter

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{1452 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 41,3 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Por outro lado, para a tensão de escoamento dada, encontramos:

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_e} = \frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{290 \times 10^6} = 13,61 \times 10^3 \quad C_c = 116,7$$

Adotando $L/r \geq C_c$, utilizamos a Eq. 11.43, escrevendo

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{1,92(L/r)^2} = \frac{\pi^2(200 \times 10^9 \text{ Pa})}{1,92(L/r)^2} = \frac{1,028 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Igualamos então essa expressão ao valor necessário da tensão admissível, obtendo

$$\frac{1,028 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2} = 41,3 \times 10^6 \text{ Pa} \quad L/r = 157,8$$

Nossa hipótese de que $L/r \geq C_c$ estava correta. Tomando o menor dos valores dos raios de giração, temos

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14,75 \times 10^{-3} \text{ m}} = 157,8 \quad L = 2,33 \text{ m}$$

Alumínio. Existem muitas ligas de alumínio que podem ser usadas em estruturas ou na construção de máquinas. Para cada uma dessas ligas, a Aluminum Association⁵ fornece três fórmulas para se chegar ao valor da tensão admissível de colunas submetidas a carregamento centrado. A Fig. 11.29 mostra a variação de σ_{adm} com L/r definida por essas fórmulas. Para as colunas curtas, σ_{adm} é constante. Para as colunas intermediárias adota-se uma relação linear entre σ_{adm} e L/r , e para as colunas longas a fórmula de Euler define a relação entre essas grandezas. A seguir apresentam-se fórmulas específicas para uso no projeto de estruturas, para duas qualidades de liga de alumínio comumente empregadas. As fórmulas são apresentadas no Sistema Internacional de Unidades e no Sistema Inglês.

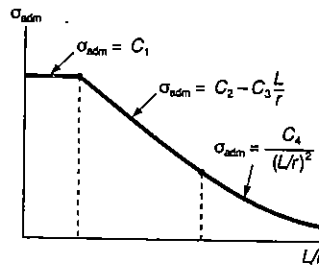


Fig. 11.29

Liga 6061-T6

$$L/r \leq 9,5: \quad \sigma_{adm} = 19 \text{ ksi} = 131 \text{ MPa} \quad (11.46)$$

$$9,5 < L/r < 66: \quad \sigma_{adm} = [20,2 - 0,126(L/r)] \text{ ksi} \quad (11.47)$$

$$= [139 - 0,868(L/r)] \text{ MPa} \quad (11.47')$$

$$L/r \geq 66: \quad \sigma_{adm} = \frac{51.000 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{351 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2} \quad (11.48)$$

5 Especificações para estruturas de alumínio, Washington, D.C., Aluminum Association, Inc., 1986.

Liga 2014-T6 (Alclad)

$$L/r \leq 12: \quad \sigma_{adm} = 28 \text{ ksi} = 193 \text{ MPa} \quad (11.49)$$

$$12 < L/r < 55: \quad \sigma_{adm} = [30,7 - 0,23(L/r)] \text{ ksi} \quad (11.50)$$

$$= [212 - 1,585(L/r)] \text{ MPa} \quad (11.50')$$

$$(11.51)$$

$$L/r \geq 55: \quad \sigma_{adm} = \frac{54.000 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

Madeira. Para o projeto de colunas de madeira sob ação de cargas centradas, o American Institute of Timber Construction⁶ especifica fórmulas da tensão admissível para colunas curtas, intermediárias e longas.

Para uma coluna com uma seção transversal *retangular* de lados b e d , onde $d < b$, a variação da σ'_{adm} com L/d é mostrada na Fig. 11.30.

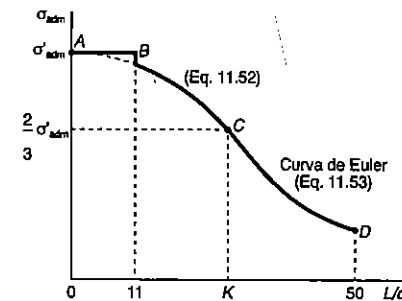


Fig. 11.30

A σ_{adm} para colunas curtas é constante e igual a tensão admissível à compressão paralela às fibras σ'_{adm} . Para $L/d = 11$, que é a demarcação entre as colunas curtas e intermediárias, a AITC especifica uma pequena descontinuidade no ponto B como mostra a Fig. 11.30.

Para colunas intermediárias, a variação da σ_{adm} com L/d é definida pela seguinte equação:

6 Timber Construction Manual, Nova Iorque, American Institute of Timber Construction, John Wiley & Sons, 1985.

$$\sigma_{adm} = \sigma'_{adm} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/d}{K} \right)^4 \right] \quad (11.52)$$

onde K corresponde ao valor de L/d no ponto C .

Para colunas longas, o valor de σ_{adm} é o previsto pela Fórmula de Euler com um coeficiente de segurança de 2,74. Lembrando que o raio de giração de uma seção quadrada de lado d é $r = d/\sqrt{12}$, escrevemos:

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{2,74 (L/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{2,74 (12L^2/d^2)}$$

$$\therefore \sigma_{adm} = \frac{0,3 \cdot E}{(L/d)^2} \quad (11.53)$$

As colunas em que L/d excede 50 não são permitidas pelas especificações da AITC.

Como mostra a Fig. 11.30, as especificações da AITC estabelecem que no ponto C , onde a curva BC intercepta a curva de Euler CD , a tensão admissível seja igual a $2/3$ da tensão admissível σ'_{adm} paralela às fibras. Levando $L/d = K$ e $\sigma_{adm} = \frac{2}{3} \cdot \sigma'_{adm}$ na Eq. (11.53), escrevemos:

$$\frac{2}{3} \sigma'_{adm} = \frac{0,3E}{K^2}$$

Explicitando K , vem:

$$K = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\sigma'_{adm}}} \quad (11.54)$$

NOTA: Na discussão anterior, consideramos que as colunas têm uma seção retangular, sendo essas colunas as mais comumente usadas. Uma apresentação mais geral, aplicada a qualquer coluna de seção transversal arbitrária, poderá ser tratada pelas fórmulas seguintes, onde σ_{adm} é expressa em termos do índice de esbeltez L/r da coluna.

$$0 < \frac{L}{r} < 38 : \quad \sigma_{adm} = \sigma'_{adm} \quad (11.55)$$

$$38 < \frac{L}{r} < K' : \quad \sigma = \sigma'_{adm} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/r}{K'} \right)^4 \right] \quad (11.56)$$

$$K' < \frac{L}{r} < 173 : \quad \sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{2,74 (L/r)^2} \quad (11.57)$$

onde

$$K' = 2,324 \sqrt{\frac{E}{\sigma'_{adm}}} \quad (11.58)$$

EXEMPLO 11.3

Sabendo-se que o comprimento efetivo de flambagem da coluna AB (Fig. 11.31) é 4,2 m, e que deve suportar com segurança uma carga de 140 kN, projetar a coluna usando uma seção transversal quadrada. A madeira a ser usada tem $E = 12,4$ GPa e $\sigma'_{adm} = 9,3$ MPa paralela às fibras.

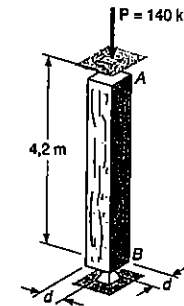


Fig. ex.11.31

Inicialmente calculamos o valor de K correspondente aos valores dados de E e σ'_{adm} . Usando a Eq. (11.54), escrevemos:

$$K = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\sigma'_{adm}}} = 0,671 \sqrt{\frac{12,4 \times 10^9}{9,3 \times 10^6}} = 24,5$$

Sendo que o lado d da seção quadrada da coluna não é conhecido, um valor de L/d deve ser assumido; iremos assumir $L/d > K$ e, usando a Eq. (11.53), escrevemos:

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{0,3E}{(L/d)^2}$$

Substituindo os dados numéricos,

$$\begin{aligned} P &= 140 \text{ kN} & E &= 12,4 \text{ GPa} \\ L &= 4,2 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\frac{(140 \times 10^3)}{d^2} = \frac{0,3(12,4 \times 10^9)}{(4,2/d)^2}$$

resolvendo para d , vem:

$$d^4 = 6,98 \times 10^{-4} \quad d = 0,16 \text{ m}$$

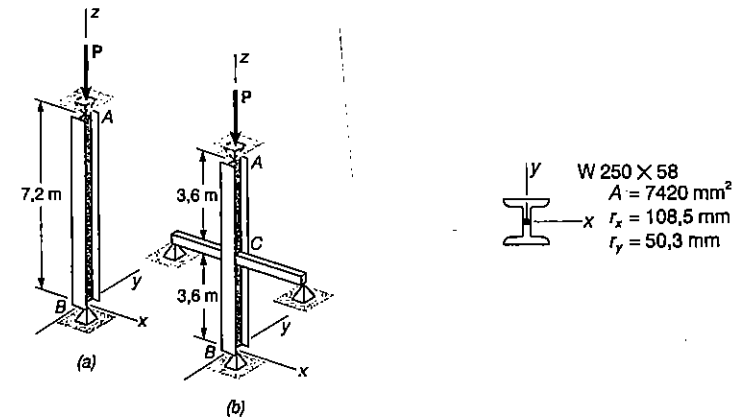
Para $d = 0,16 \text{ m}$, escrevemos:

$$\frac{L}{d} = \frac{4,2}{0,16} = 26,25 > K$$

Assumimos corretamente.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.3

A coluna AB é feita com um perfil laminado $W250 \times 58$ que apresenta as seguintes propriedades: $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$. Pode-se determinar a força centrada P que pode ser aplicada: (a) se o comprimento de flambagem é de $7,2 \text{ m}$ em todas as direções; (b) se um travamento é colocado no ponto médio C para evitar movimento deste ponto no plano xz . (Considerar que o travamento não impede o movimento do ponto C no plano yz .)



Solução. Calculamos inicialmente o valor C_c correspondente à tensão de escoamento $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$.

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_e} = \frac{2\pi^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{250 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 15,79 \times 10^3$$

$$C_c = 125,7$$

a) **Comprimento de flambagem = $7,2 \text{ m}$.** Como $r_y < r_x$, a flambagem ocorre no plano xz . O índice de esbeltez para $L = 7,2 \text{ m}$ e $r = r_y = 50,3 \times 10^{-3} \text{ m}$ é

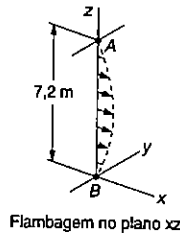
$$\frac{L}{r_y} = \frac{7,2 \text{ m}}{50,3 \times 10^{-3} \text{ m}} = 143$$

Uma vez que $L/r > C_c$, usamos a Eq. 11.43, com $E = 200 \text{ GPa}$

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{1,92(L/r)^2} = \frac{\pi^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{1,92(143)^2} = 50,3 \text{ MPa}$$

$$P_{adm} = \sigma_{adm} \cdot A = (50,3 \text{ MPa})(7420 \times 10^{-6} \text{ m}^2)$$

$$P_{adm} = 373 \text{ kN}$$



b) **Travamento no ponto médio C.** O travamento evita movimento no ponto C apenas no plano xz, de modo que devemos calcular o índice de esbeltez correspondente à flambagem no plano yz, determinando qual é o maior.

Plano xz: Comprimento efetivo de flambagem = 3,6 m

$$r = r_y = 50,3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

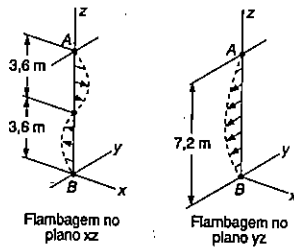
$$L/r = (3,6 \text{ m}) / (50,3 \times 10^{-3} \text{ m}) = 71,6$$

Plano yz: Comprimento efetivo de flambagem = 7,2 m

$$r = r_x = 108,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$L/r = (7,2 \text{ m}) / (108,5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 66,3$$

Uma vez que o índice de esbeltez maior corresponde a uma carga admissível menor, adotamos $L/r = 71,6$. Para $L/r < C_c$, temos uma coluna intermediária, e usaremos as Fórm. 11.44 e 11.45. Vamos calcular inicialmente o coeficiente de segurança, depois a tensão admissível e finalmente a carga admissível P.



$$C.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{L/r}{C_c} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^3 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{71,6}{125,7} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{71,6}{125,7} \right)^3 = 1,86$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{C.S.} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^2 \right] = \frac{250}{1,86} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{71,6}{125,7} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{adm} = 112,6 \text{ MPa}$$

$$P_{adm} = \sigma_{adm} \cdot A = (112,6)(7420 \times 10^{-6} \text{ m}^2) \quad P_{adm} = 835 \text{ kN}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.4

Usando a liga de alumínio 2014-T6, pede-se determinar o menor diâmetro que pode ser adotado para a barra, de modo que esta suporte com segurança uma carga centrada de 60 kN, quando: (a) $L = 750 \text{ mm}$; (b) $L = 300 \text{ mm}$.

Solução. A seção singular maciça leva às seguintes expressões:

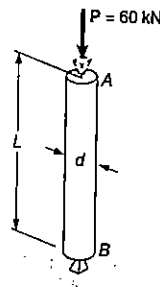
$$I = \frac{\pi}{4} c^4 \quad A = \pi c^2 \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

(a) **Comprimento de 750 mm.** Não é conhecido o diâmetro da barra. Vamos então adotar um valor para L/r ; vamos adotar que $L/r > 55$ e usar a Eq. 11.51. Para a carga centrada P encontramos

$$\frac{P}{A} = \sigma_{adm} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{372 \times 10^9 \text{ Pa}}{\left(\frac{0,750 \text{ m}}{c/2} \right)^2}$$

$$c^4 = 115,5 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \quad c = 18,44 \text{ mm}$$



Com $c = 18,44$ mm, obtemos o índice de esbeltez

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{(c/2)} = \frac{750 \text{ mm}}{(18,44 \text{ mm})/2} = 81,3 > 55$$

Nossa hipótese está correta, e podemos calcular o diâmetro para $L = 750$ mm, que é

$$d = 2c = 2(18,44 \text{ mm}) \approx d = 36,9 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

(b) Comprimento de 300 mm. Vamos adotar novamente que $L/r > 55$. Com o mesmo procedimento usado na parte a, encontramos em c o valor 11,66 mm e para L/r o valor 51,5. Uma vez que L/r resultou menor que 55, nossa hipótese está errada; vamos adotar então que $12 < L/r < 55$ e usar a Eq. 11.50 para o dimensionamento da barra.

$$\frac{P}{A} = \sigma_{adm} = \left[212 - 1,585 \left(\frac{L}{r} \right) \right] \text{ MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \left[212 - 1,585 \left(\frac{0,3 \text{ m}}{c/2} \right) \right] 10^6 \text{ Pa}$$

$$c = 12,00 \text{ mm}$$

Com $c = 12,00$ mm, obtemos o índice de esbeltez

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{(c/2)} = \frac{300 \text{ mm}}{(12,00 \text{ mm})/2} = 50$$

Nossa segunda hipótese está correta, pois $12 < L/r < 55$. Para $L = 300$ mm, o diâmetro necessário é

$$d = 2c = 2(12,00 \text{ mm}) \quad d = 24,0 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

11.70 Determinar a carga centrada admissível para uma coluna de 6 m de comprimento efetivo, que é feita do seguinte perfil laminado de aço: (a) W200 x 35,9; (b) W200 x 86. Usar $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

11.71 Determinar a carga centrada admissível para uma coluna de 7,0 m de comprimento efetivo, que é feita do seguinte perfil laminado de aço: (a) W310 x 143. Usar $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

11.72 Uma coluna com a seção transversal mostrada tem um comprimento efetivo de 4,0 m. Sabendo-se que $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a maior carga centrada que pode ser aplicada na coluna.

11.73 Um tubo estrutural retangular tem a seção transversal mostrada e é usado como uma coluna de 5 m de comprimento efetivo. Sabendo-se que $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a maior carga centrada que pode ser aplicada na coluna.

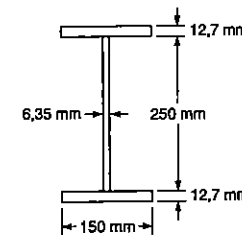


Fig. P11.72

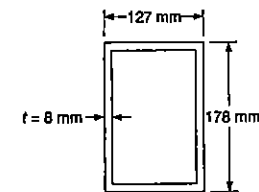


Fig. P11.73

11.74 Um tubo de aço tem a seção transversal mostrada e é usado como uma coluna. Sabendo-se que $\sigma_e = 320$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a carga centrada admissível, se o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 6 m; (b) 4 m.

11.75 Um tubo de aço tem a seção transversal mostrada e é usado como uma coluna. Sabendo-se que $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a carga centrada admissível, se o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 6 m; (b) 4 m.

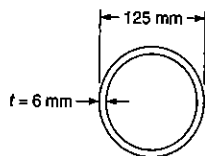


Fig. P11.74 e P11.75

11.76 Um tubo quadrado com a seção transversal mostrada é usado como uma coluna. Sabendo-se que $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a carga centrada admissível, se o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 9,6 m; (b) 7,2 m.

11.77 Uma coluna é feita de metade de um perfil laminado de aço W200 x 59, cuja seção tem as propriedades geométricas indicadas. Sabendo-se que $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a carga centrada admissível, se o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 3,60 m; (b) 2,25 m.

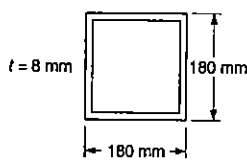


Fig. P11.76

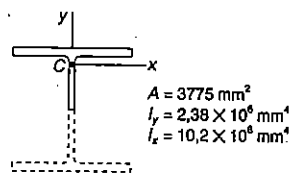


Fig. P11.77

11.78 Um perfil laminado de aço W200 x 59 é usado para formar uma coluna de 7,2 m de comprimento efetivo. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar a carga centrada admissível, se o limite de escoamento do tipo de aço usado é: (a) $\sigma_e = 250$ MPa; (b) $\sigma_e = 345$ MPa.

11.79 Resolver o Prob. 11.78, assumindo que o comprimento efetivo da coluna é alterado para 4,5 m.

11.80 Um perfil laminado de aço W250 x 67 é usado para formar uma coluna de 5 m de comprimento efetivo. Sabendo-se que $E = 200$ GPa, determinar a carga centrada admissível, se o limite de escoamento do tipo de aço usado é: (a) $\sigma_e = 250$ MPa; (b) $\sigma_e = 345$ MPa.

11.81 Resolver o Prob. 11.80, assumindo que o comprimento efetivo da coluna é alterado para 7,5 m.

11.82 e 11.83 Quatro pranchas de madeira, cada uma de 38 x 190 mm de seção transversal, são firmemente pregadas juntas, como mostrado, para formar uma coluna. Sabendo-se que para o tipo de madeira usado $E = 12$ GPa e que a tensão admissível à compressão, na direção paralela às fibras, é de 10 MPa, determinar a carga centrada admissível quando o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 7 m; (b) 3 m.

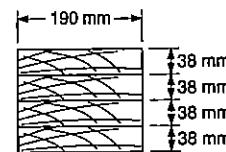


Fig. P11.82

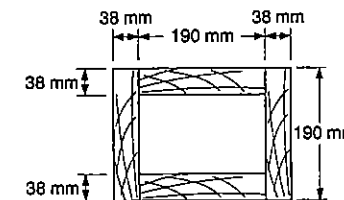


Fig. P11.83

11.84 e 11.85 Três pranchas de madeira, cada uma de 38 x 190 mm de seção transversal, são pregadas juntas firmemente, como mostrado, para formar uma coluna. Sabendo-se que para o tipo de madeira, usada $E = 12$ GPa e que a tensão admissível à compressão, na direção paralela às fibras, é de 10 MPa, determinar a carga centrada admissível, quando o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 2,4 m; (b) 4,35 m.

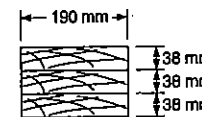


Fig. P11.84

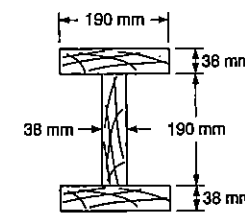


Fig. P11.85

11.86 Quatro pranchas de madeira, cada uma de 38 x 190 mm de seção transversal, são firmemente pregadas juntas, como mostrado, para formar uma coluna. Sabendo-se que para o tipo de madeira usada $E = 12$ GPa e que a tensão admissível à compressão, na direção paralela às fibras, é de 10 MPa, determinar a carga centrada admissível, quando o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 3,2 m; (b) 1,6 m.

11.87 Três pranchas de madeira, cada uma de 38 x 140 mm de seção transversal, são pregadas juntas firmemente, como mostrado, para formar uma coluna. Sabendo-se que para o tipo de madeira usada $E = 12 \text{ GPa}$ e que a tensão admissível à compressão, na direção paralela às fibras, é de 10 MPa, determinar a carga centrada admissível, quando o comprimento efetivo da coluna é de: (a) 4,8 m; (b) 1,2 m.

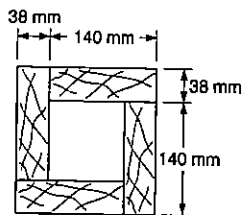


Fig. P11.86

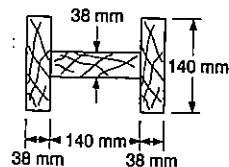


Fig. P11.87



Fig. P11.88

11.88 Uma coluna de comprimento efetivo igual a 6 m é obtida pela conexão de dois perfis laminados de aço C180 x 14,6, como indicado. Sabendo-se que $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível para a coluna.

11.89 Uma coluna de 5,4 m de comprimento efetivo é obtida pela conexão de quatro perfis laminados de aço L76 x 76 x 9,5, com barras de travessamento, como indicado. Sabendo-se que $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível para a coluna.

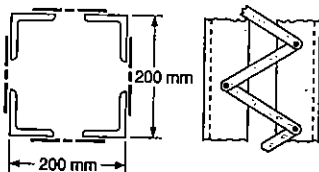


Fig. P11.89

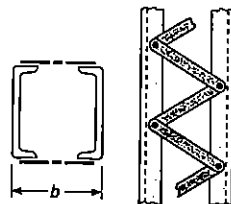


Fig. P11.90

11.90 Uma coluna de comprimento efetivo igual a 7 m é obtida pela conexão de dois perfis laminados de aço C250 x 37, com barras de travessamento, como indicado. Sabendo-se que $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível para a coluna, quando $b = 180 \text{ mm}$.

11.91 Para a coluna do Prob. 11.90, determinar: (a) a menor distância b para que a tensão normal admissível σ_{adm} seja tanto maior quanto possível; (b) a correspondente carga centrada admissível para a coluna.

11.92 e 11.93 Um membro em compressão de 3 m de comprimento efetivo é feito, aparafusando-se juntos dois perfis laminados de aço L102 x 76 x 6,4, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível para este membro comprimido.

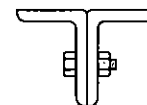


Fig. P11.92

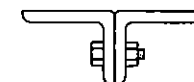


Fig. P11.93

11.94 e 11.95 Um membro em compressão de comprimento efetivo igual a 9 m é obtido soldando-se duas placas de aço de 10 mm de espessura a um perfil laminado de aço W250 x 80, como mostrado. Sabendo-se que $\sigma_c = 320 \text{ MPa}$ e $E = 200 \text{ GPa}$, determinar a carga centrada admissível para o membro em compressão.

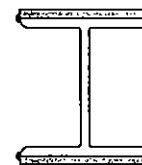


Fig. P11.94

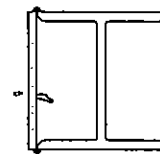


Fig. P11.95

11.96 Uma barra de 9,5 mm de diâmetro, feita de liga de alumínio 6061-T6 é usada como uma coluna. Determinar a carga centrada admissível para a coluna, quando o comprimento efetivo for: (a) 115 mm; (b) 230 mm.

11.97 A barra AB é livre em sua extremidade A e engastada em sua base B. Determinar a carga centrada admissível P, quando a liga de alumínio usada é: (a) 6061-T6; (b) 2014-T6.

11.98 Um membro em compressão tem a seção transversal mostrada e um comprimento efetivo de 1,5 m. Sabendo-se que a liga de alumínio usada é 6061-T6, determinar a carga centrada admissível.

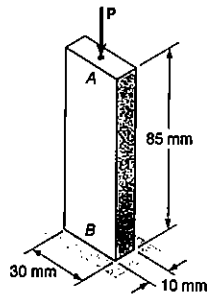


Fig. P11.97

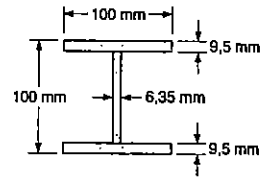


Fig. P11.98

11.99 Resolver o Prob. 11.98, assumindo que o comprimento efetivo do membro comprimido é aumentado para 2,0 m.

11.100 Um membro em compressão tem a seção transversal mostrada e um comprimento efetivo de 2 m. Sabendo-se que a liga de alumínio usada é 2014-T6, determinar a carga centrada admissível.

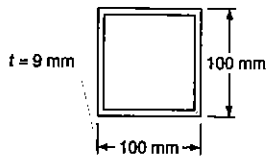


Fig. P11.100

11.101 Resolver o Prob. 11.100, assumindo que o comprimento efetivo do membro comprimido é aumentado para 2,75 m.

11.102 Uma coluna de 8,4 m de comprimento efetivo deve suportar uma carga centrada de 780 kN. Sabendo-se que $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, selecionar o perfil laminado de aço, com abas largas e de dimensão nominal 250 mm, que poderá ser usado.

11.103 Uma coluna de 7,8 m de comprimento efetivo deve suportar uma carga centrada de 1100 kN. Sabendo-se que $\sigma_c = 345$ MPa e $E = 200$ GPa, selecionar o perfil laminado de aço, com abas largas e de dimensão nominal 300 mm, que poderá ser usado.

11.104 Uma coluna de comprimento efetivo 4,4 m deve suportar uma carga centrada de 1150 kN. Sabendo-se que $\sigma_c = 350$ MPa e $E = 200$ GPa, selecionar o perfil laminado de aço, com abas largas, de dimensão nominal 360 mm, que poderá ser usado.

11.105 Uma coluna de comprimento efetivo 7,5 m deve suportar uma carga centrada de 220 kN. Sabendo-se que $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, selecionar o perfil laminado de aço, com abas largas, de dimensão nominal 200 mm, que poderá ser usado.

11.106 Um tubo estrutural quadrado tem a seção transversal mostrada e é usado como uma coluna de 7,8 m de comprimento efetivo para suportar uma carga centrada de 290 kN. Sabendo-se que os tubos disponíveis para uso são feitos com espessuras de parede desde 6,5 até 20 mm, em incrementos de 1,5 mm, determinar o tubo mais leve que pode ser usado. Usar $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

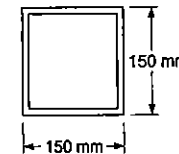


Fig. P11.106

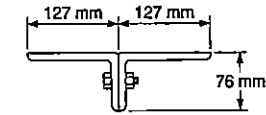


Fig. P11.108

11.107 Resolver o Prob. 11.106, assumindo que o comprimento efetivo da coluna é diminuído para 6 m.

11.108 Dois perfis laminados de aço L127 x 76 x 12,7 são aparafusados juntos, como indicado, para serem usados como uma coluna de 3 m de comprimento efetivo, suportando uma carga centrada de 165 kN. Sabendo-se que os perfis disponíveis para uso são feitos com espessuras de 6,4 mm, 9,5 mm e 12,7 mm, determinar o perfil mais leve que pode ser usado. Usar $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

11.109 Uma carga centrada P deve ser suportada pela barra de aço AB. Sabendo-se que $\sigma_c = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determinar a menor dimensão d da seção transversal que pode ser usada, quando: (a) P = 60 kN; (b) P = 30 kN.

11.110 Para uma barra feita da liga de alumínio 2014-T6, selecionar a seção quadrada que pode ser usada, se a barra suporta uma carga centrada de 245 kN.

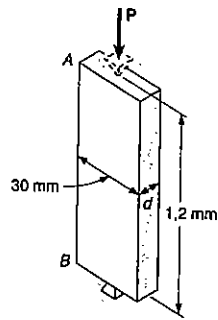


Fig. P11.109

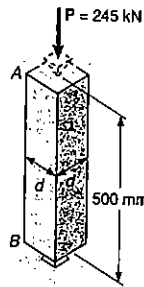


Fig. P11.110

11.111 Um tubo estrutural com a seção transversal mostrada é usado como uma coluna para suportar uma carga centrada de 155 kN. Determinar o maior comprimento efetivo admissível do tubo, quando a liga de alumínio usada é: (a) 6061-T6; (b) 2014-T6.

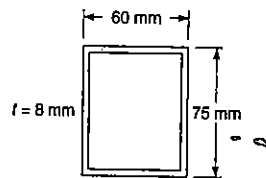


Fig. P11.111

11.112 Um tubo de alumínio de 75 mm de diâmetro externo e 2 m de comprimento efetivo, deve suportar uma carga centrada de 95 kN. Sabendo-se que os tubos disponíveis para uso são feitos da liga 6061-T6 e têm espessuras de parede a partir de 12 mm, em incrementos de 2 mm, determinar o tubo mais leve que pode ser usado.

11.113 Usando a liga de alumínio 2014-T6, determinar o maior comprimento admissível da barra de alumínio AB para uma carga centrada P de intensidade igual a : (a) 150kN; (b) 90 kN; (c) 25 kN.

11.114 Uma carga centrada de 65 kN é aplicada a um poste de 5 m, que está livre em seu topo A e engastado em sua base B. Usando uma madeira para a qual $E = 11 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 9 MPa, determinar o menor diâmetro do poste, que pode ser usado.

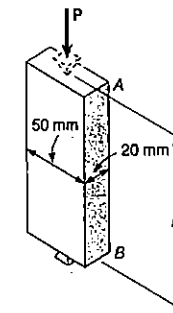


Fig. P11.113

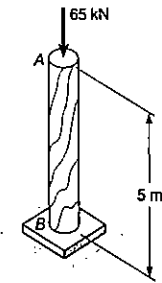


Fig. P11.114

11.115 Uma coluna de 3 m de comprimento efetivo será feita pregando-se juntas tábuas de $24 \times 100 \text{ mm}$ de seção transversal. Sabendo-se que $E = 11 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 9 MPa, determinar o número de tábuas que devem ser usadas para suportar a carga centrada mostrada, quando: (a) $P = 30 \text{ kN}$; (b) $P = 40 \text{ kN}$.

11.116 Uma carga centrada de 200 kN é aplicada a uma coluna de madeira de 4,8 m de comprimento efetivo. Usando um tipo de madeira para a qual $E = 12 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 10 MPa, determinar a menor seção transversal quadrada que pode ser usada.

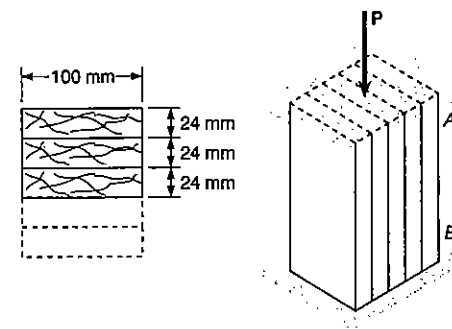


Fig. P11.115

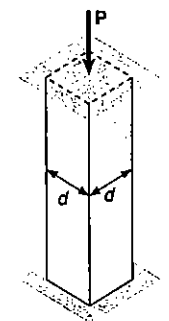


Fig. P11.116

11.117 Resolver o Prob. 11.116, assumindo que o comprimento efetivo da coluna é de : (a) 3,6 m; (b) 1,2 m.

11.7 PROJETO DE COLUNAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO EXCÊNTRICO

Nesta seção, vamos analisar o projeto de colunas submetidas a uma carga excêntrica. Veremos de que maneira modificar as fórmulas empíricas desenvolvidas na seção anterior, para o caso de carga centrada, a fim de usá-las no caso de uma força P aplicada a uma coluna com excentricidade e conhecida.

Vamos inicialmente recordar que, na Sec. 4.13, vimos que uma carga axial excêntrica P aplicada em um plano de simetria de uma coluna pode ser substituída por uma força centrada P e por um conjugado M de momento $M = Pe$. Na Fig. 11.32 vemos que e é a distância da linha de ação da força P ao eixo longitudinal da coluna.

As tensões normais que agem em uma seção transversal da coluna podem ser obtidas por superposição das tensões devidas à força centrada P e ao conjugado M, respectivamente (Fig. 11.32). Essa suposição pode ser feita desde que a seção transversal em estudo não esteja muito próxima de uma das extremidades da coluna, e desde que as tensões encontradas não excedam o limite de proporcionalidade do material. Desse modo, as tensões normais devidas a uma força P excêntrica podem ser calculadas por

$$\sigma = \sigma_{\text{centrada}} + \sigma_{\text{flexão}} \tag{11.59}$$

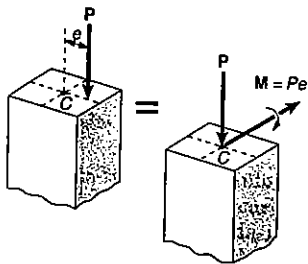


Fig. 11.32

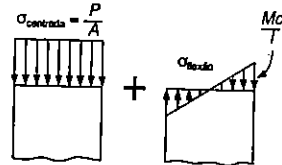


Fig. 11.33

Recorrendo aos resultados obtidos na Sec. 4.12, sabemos que a tensão máxima de compressão na coluna é

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{11.60}$$

Em uma coluna projetada corretamente, a tensão máxima definida pela Eq. 11.60 não deve exceder a tensão admissível da coluna. Podemos abordar o problema de duas maneiras, visando satisfazer essa especificação. As maneiras são o método da tensão admissível e o método de interação.

(a) **Método da tensão admissível.** Esse método se baseia na hipótese de que a tensão é a mesma que para uma coluna com carga centrada. Desse modo, devemos ter $\sigma_{\text{máx}} \leq \sigma_{\text{adm}}$, sendo σ_{adm} a tensão admissível sob carga centrada. Substituindo na Eq. 11.60, temos

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{adm}} \tag{11.61}$$

A tensão admissível é obtida pelas fórmulas da Sec. 11.6, as quais, para um certo material, exprimem a tensão σ_{adm} em função do índice de esbeltez da coluna. A maior parte das normas de engenharia específica que a tensão admissível seja determinada para o maior valor do índice de esbeltez, não importando se esse valor corresponde realmente ao plano em que ocorre a flexão. Em alguns casos, essa especificação pode levar a dimensionamentos realmente exagerados.

EXEMPLO 11.4

Uma coluna de seção transversal quadrada de 125 mm de lado e comprimento de 3,0 m é feita de pinho, apresentando as seguintes propriedades: $E = 12 \text{ GPa}$ e $\sigma_{\text{adm}} = 10 \text{ MPa}$ para compressão paralela às fibras. Determinar a máxima carga P que a coluna pode suportar com segurança, aplicada com excentricidade $e = 50 \text{ mm}$.

Inicialmente calculamos o valor de K correspondente aos valores numéricos dados por E e σ_{adm} . Usando a Eq. (11.54), escrevemos:

$$K = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{adm}}}} = 0,671 \sqrt{\frac{12 \times 10^9}{10 \times 10^6}} = 23,2$$

$$\text{Agora calculamos } L/d = (3 \text{ m}) / (0,125 \text{ m}) = 24$$

Sendo $L/d > K$, podemos usar a Eq. (11.53) para determinar a tensão admissível para uma coluna de madeira com seção retangular e carga centrada. Temos

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{0,3E}{(L/d)^2} = \frac{0,3(12 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{(3,0/0,125)^2} = 6,25 \text{ MPa}$$

Uma vez que esse valor é menor que o valor da tensão admissível para a compressão, ele pode ser usado na Eq. 11.61 para a determinação da carga máxima admissível P . Substituindo os valores numéricos

$$A = (0,125 \text{ m})^2 = 15,62 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (0,125 \text{ m})^4 = 2,03 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$c = 0,0625 \text{ m} \quad M = P \cdot e = P(0,05 \text{ m})$$

Na Eq. 11.61, obtemos

$$\frac{P}{15,62 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P(0,05 \text{ m})(0,0625 \text{ m})}{2,03 \times 10^{-5} \text{ m}^4} \leq 6,25 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$P \leq 28,7 \text{ kN}$$

A máxima carga que pode ser aplicada com segurança é $P = 28,7 \text{ kN}$.

(b) **Método da interação.** A tensão admissível para uma coluna submetida à carga centrada (Fig. 11.34a) é usualmente menor que a tensão admissível para uma coluna em flexão pura (Fig. 11.34b), uma vez que aquela leva em conta a probabilidade de flambagem. Desse modo, quando se usa o método da tensão admissível para o projeto de uma coluna com carga excêntrica e se escreve que a soma das tensões devidas à carga centrada P e ao momento fletor M (Fig. 11.34c) não deve exceder ao valor da tensão admissível para uma coluna de carga centrada, o resultado pode levar a dimensionamentos exagerados.

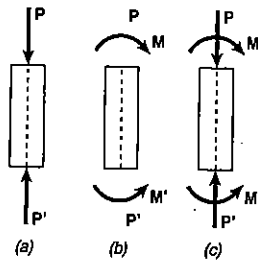


Fig. 11.34

Podemos desenvolver um método mais aperfeiçoado de dimensionamento, reescrevendo a Eq. 11.61 na forma abaixo:

$$\frac{P/A}{\sigma_{adm}} + \frac{Mc/I}{\sigma_{adm}} \leq 1$$

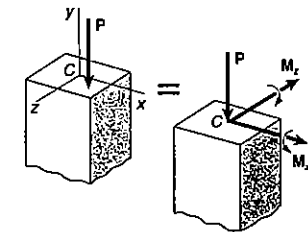
Nessa expressão, substituímos σ_{adm} nos dois primeiros termos pelos valores das tensões admissíveis que correspondem, respectivamente, à carga centrada da Fig. 11.34a e à flexão pura da Fig. 11.34b. Temos

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \leq 1 \quad (11.63)$$

A fórmula obtida é conhecida como *fórmula da interação*.

Devemos notar que, para $M = 0$, o uso da fórmula conduz ao dimensionamento de uma coluna com carga centrada pelo método da Sec. 11.6. Por outro lado, quando $P = 0$, o uso da fórmula leva ao dimensionamento de uma viga sujeita à flexão pura pelo método do Cap. 4. Sendo P e M diferentes de zero, a fórmula de interação levará a um dimensionamento que considera a capacidade da barra de resistir tanto a flexão como carga centrada. Em qualquer caso, $(\sigma_{adm})_{centrada}$ será determinada usando-se o maior índice de esbeltez da coluna, independente do plano em que ocorre a flexão⁷.

Quando a carga excêntrica P não é aplicada em um plano de simetria da coluna, ocorre flexão nos dois planos principais da seção transversal. Sabemos da Sec. 4.15 que a força P pode ser substituída por uma força P centrada e por dois conjugados representados pelos vetores M_x e M_z indicados na Fig. 11.35. A fórmula da interação a ser usada é



$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{|M_x| z_{máx}/I_x}{(\sigma_{adm})_{flexão}} + \frac{|M_z| x_{máx}/I_z}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \leq 1 \quad (11.64)$$

⁷ Esse procedimento é exigido por quase todos os códigos de especificações de projeto para o aço, alumínio e madeira. Além disso, muitas especificações pedem que se use um fator adicional no segundo termo da Eq. 11.63; esse fator leva em conta as tensões adicionais que resultam da flecha da coluna provocada pela flexão.

EXEMPLO 11.5

Usar o método da interação para a determinação da máxima carga P que pode ser aplicada com segurança à coluna do Ex. 11.4, com excentricidade $e = 50$ mm.

O valor de $(\sigma_{adm})_{centrada}$ já foi determinado no Ex. 11.4. Por outro lado, o valor de $(\sigma_{adm})_{flexão}$ é igual à tensão admissível para compressão paralela às fibras. Temos, desse modo,

$$(\sigma_{adm})_{centrada} = 6,25 \text{ MPa} \quad (\sigma_{adm})_{flexão} = 10 \text{ MPa}$$

Levando esses valores à Eq. 11.63,

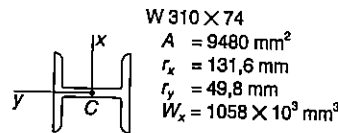
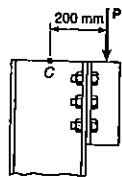
$$\frac{P/A}{6,25 \text{ MPa}} + \frac{M_c/I}{10 \text{ MPa}} \leq 1$$

Com dados do Ex. 11.4, encontramos $P \leq 39$ kN.

A máxima carga que pode ser aplicada é, então, $P = 39$ kN.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.5

Determinar a maior carga P que pode ser suportada com segurança por um perfil de aço laminado W310 x 74, que forma uma coluna de 4,5 m de comprimento de flambagem. Utilizar o método da tensão admissível. Sabe-se que $E = 200$ GPa e que $\sigma_e = 250$ MPa.

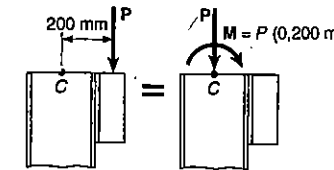


Solução. O maior índice de esbeltez da coluna é $L/r_y = (4,5 \text{ m}) / (0,0498 \text{ m}) = 90,4$. Aplicando a Eq. 11.42 com $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa, encontramos $C_c = 125,7$. Como $L/r < C_c$, podemos usar as Eqs. 11.44 e 11.45 para encontrar C.S. = 1,89. Então

$$\sigma_{adm} = (\sigma_{adm})_{centrada} = 98,1 \text{ MPa}$$

Para a coluna e o carregamento dados, temos

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{9,48 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \quad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{W} = \frac{P(0,200 \text{ m})}{1,058 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$$



Substituindo na Eq. 11.61, escrevemos

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{adm}$$

$$\frac{P}{9,48 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P(0,200 \text{ m})}{1,058 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \leq 98,1 \text{ MPa} \quad P \leq 333 \text{ kN}$$

O maior valor admissível para P é

$$P = 333 \text{ kN} \downarrow$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.6

Resolver o Prob. 11.5 usando o método da interação. Adotar $(\sigma_{adm})_{flexão} = 150$ MPa.

Solução. Pela Eq. 11.63, temos

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \leq 1$$

Substituindo os valores das tensões admissíveis para a flexão e para a carga encontrados no Prob. Resolvido 11.5, bem como os outros dados, temos

$$\frac{P/(9,48 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{98,1 \times 10^6 \text{ Pa}} + \frac{P(0,200 \text{ m})/(1,058 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{150 \times 10^6 \text{ Pa}} \leq 1$$

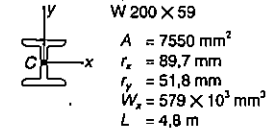
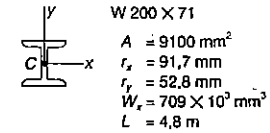
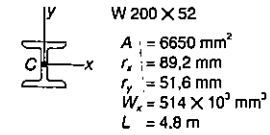
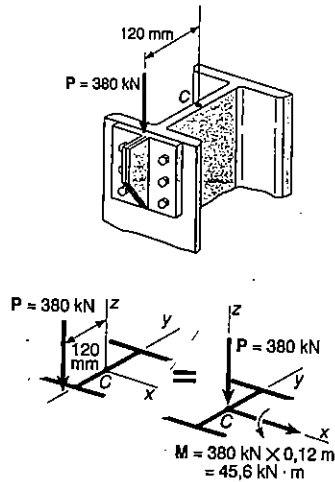
$$P \leq 428 \text{ kN}$$

A máxima carga admissível P é

$$P = 428 \text{ kN} \downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.7

Uma coluna de aço com comprimento de flambagem de 4,8 m é carregada excêntrica-mente como indica a figura. Usando o método da interação, determinar qual o perfil de abas largas com altura nominal de 200 mm que deve ser usado. Adotar $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$, considerando como tensão admissível a flexão de 150 MPa.



Solução. Para podermos ter uma primeira aproximação na escolha do perfil, usamos o método da tensão admissível, com $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$, obtendo

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_x} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{A \cdot r_x^2} \quad (1)$$

Do Apêndice C observamos que os perfis de abas largas com altura nominal de 200 mm têm valores $c \approx 100 \text{ mm}$ e $r_x = 90 \text{ mm}$. Substituindo na Eq. 1, temos

$$150 \text{ MPa} = \frac{380 \text{ kN}}{A} + \frac{(45,6 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,1 \text{ m})}{A(0,09 \text{ m})^2}$$

$$A = 6,28 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 6280 \text{ mm}^2$$

Adotamos para uma primeira tentativa: W200 x 52

1ª Tentativa: W200 x 52. As tensões admissíveis são

Tensão admissível à flexão: $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$

Tensão admissível à compressão: O maior índice de esbeltez é $L/r_y = (4,8 \text{ m})/(0,0516) = 93,0$. Com os valores $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$, obtemos, com a Eq. 11.42, $C_c = 125,6$. Como $L/r < C_c$, usamos as Eqs. 11.44 e 11.45 para encontrarmos

$$(\sigma_{adm})_{centrada} = 96 \text{ MPa}$$

Para o perfil escolhido, vamos ter

$$P = \frac{380 \text{ kN}}{(6650 \times 10^{-6}) \text{ m}^2} = 57 \text{ MPa}$$

$$\frac{M_c}{I} = \frac{M}{W_x} = \frac{45,6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(514 \times 10^3 \times 10^9) \text{ m}^3} = 88,7 \text{ MPa}$$

Com estes dados, na Eq. 11.63:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} = \frac{57 \text{ MPa}}{96 \text{ MPa}} + \frac{88,7 \text{ MPa}}{150 \text{ MPa}} = 1,18$$

Com $1,18 > 1,00$, não está satisfeita a fórmula da interação, e devemos escolher um perfil maior.

2ª Tentativa: W200 x 71. Com o mesmo procedimento da 1ª tentativa, escrevemos

$$\frac{L}{r_y} = \frac{4,8 \text{ m}}{52,8 \times 10^{-3} \text{ m}} = 90,9 \quad (\sigma_{adm})_{centrada} = 97,63 \text{ MPa}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{380 \text{ kN}}{9100 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 41,8 \text{ MPa}$$

$$\frac{M}{W_x} = \frac{45,6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(709 \times 10^3 \times 10^6) \text{ m}^3} = 64,3 \text{ MPa}$$

Levando os valores à Eq. 11.63:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} = \frac{41,8 \text{ MPa}}{97,6 \text{ MPa}} + \frac{64,3 \text{ MPa}}{150 \text{ MPa}} = 0,857 < 1,000$$

O perfil W200 x 71 é satisfatório, porém pode ser desnecessariamente grande.

3ª Tentativa: W200 x 59. Com a mesma seqüência de cálculo, vamos verificar que a fórmula da interação, neste caso, não se verifica.

Escolha do perfil: O perfil adotado é W200 x 71

PROBLEMAS

11.118 Um poste de madeira de 220 mm de diâmetro está livre em seu topo A e engastado em sua base B. Para o tipo de madeira usada $E = 12 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 10 MPa. Usando o método da tensão admissível, determinar a maior carga excêntrica P, que pode ser aplicada, como indicado.

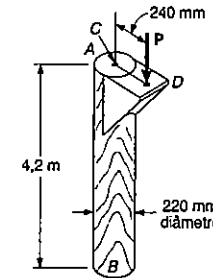


Fig. P11.118

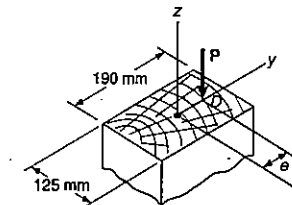


Fig. P11.120

11.119 Resolver o Prob. 11.118 usando o método da interação.

11.120 Uma coluna de madeira de 127 x 190 mm de seção transversal tem um comprimento efetivo de 2,55 m. Para o tipo de madeira usada $E = 12 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 10 MPa. Usando o método da tensão admissível, determinar a maior carga excêntrica P que pode ser aplicada, quando: (a) $e = 12,7 \text{ mm}$; (b) $e = 25,4 \text{ mm}$.

11.121 Resolver o Prob. 11.120, quando: (a) $e = 19 \text{ mm}$; (b) $e = 38 \text{ mm}$.

11.122 Uma coluna uniforme, de 5,5 m de comprimento efetivo, consiste de um tubo de aço, com a seção transversal mostrada. Usando o método da interação, determinar a carga admissível P, quando a excentricidade é: (a) $e = 0$; (b) $e = 30 \text{ mm}$. Assumir que $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$, e uma tensão admissível à flexão de 150 MPa.

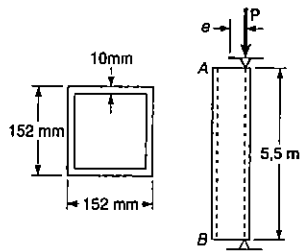


Fig. P11.122

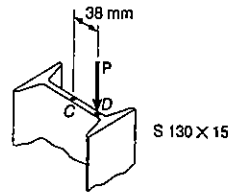


Fig. P11.124

11.123 Resolver o Prob. 11.122, usando o método da tensão admissível.

11.124 Um membro de aço comprimido, de 2,3 m de comprimento efetivo, suporta uma carga excêntrica, como mostrado. Usando o método da tensão admissível, determinar a carga admissível P . Assumir $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$.

11.125 Uma coluna, de 6,0 m de comprimento efetivo, consiste de um perfil laminado de aço W310 x 74. Para o tipo de aço usado $\sigma_e = 345 \text{ MPa}$, $\sigma_{adm} = 210 \text{ MPa}$ na flexão e $E = 200 \text{ GPa}$. Usando o método da interação, determinar a carga admissível P , quando a excentricidade é: (a) $e_x = 25,4 \text{ mm}$ e $e_y = 0$; (b) $e_x = 0$ e $e_y = 25,4 \text{ mm}$.

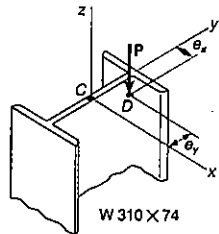


Fig. P11.125

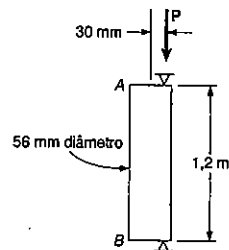


Fig. P11.126

11.126 Uma carga excêntrica é aplicada em um ponto, a 30 mm do eixo geométrico, de uma barra de 56 mm de diâmetro, feita da liga de alumínio 6061-T6, para a qual a tensão admissível em flexão é 150 MPa. Usando o método da interação, determinar a carga admissível P .

11.127 Resolver o Prob. 11.126 usando o método da tensão admissível, assumindo que a liga de alumínio usada é a 2014-T6.

11.128 Uma carga excêntrica P , de intensidade 160 kN, é aplicada, como mostrado, ao tubo AB , que é feito da liga de alumínio 6061-T6. Usando o método da interação e uma tensão admissível à flexão de 150 MPa, determinar a maior excentricidade admissível e .

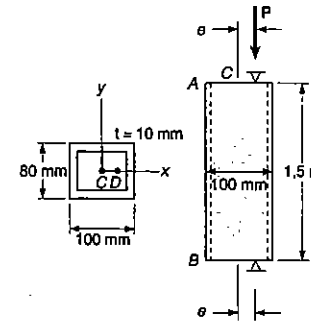


Fig. P11.128

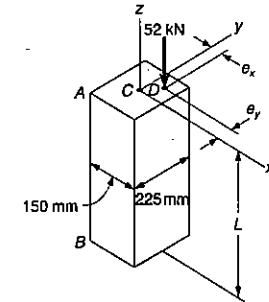


Fig. P11.130

11.129 Resolver o Prob. 11.128, assumindo que a intensidade P da carga excêntrica é aumentada para 240 kN.

11.130 Uma coluna de madeira AB está livre em seu topo A , engastada em sua base B e suporta uma carga de 52 kN, como indicado. Para o tipo de madeira usada $E = 112 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 10 MPa. Usando o método da tensão admissível, determinar o maior comprimento L que pode ser usado, quando: (a) $e_x = 25 \text{ mm}$ e $e_y = 0$ (b) $e_x = 0$, e $e_y = 25 \text{ mm}$.

11.131 Resolver o Prob. 11.130, quando $e_x = e_y = 25 \text{ mm}$.

11.132 Duas cantoneiras de aço L102 x 76 x 9,5 são soldadas juntas para formar a coluna AB . Uma carga axial P , de intensidade 60 kN, é aplicada no ponto D . Usando o método da tensão admissível, determinar o maior comprimento admissível L . Assumir que $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$.

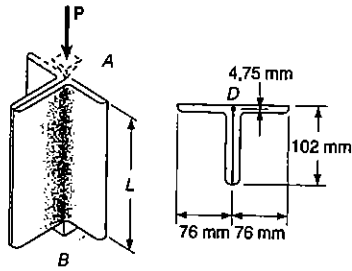


Fig. P11.132

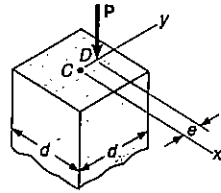


Fig. P11.134

11.133 Resolver o Prob. 11.132, usando o método da interação, para uma carga de intensidade $P = 80 \text{ kN}$ e uma tensão admissível na flexão de 150 kN .

11.134 Uma carga de 15 kN é aplicada com uma excentricidade $e = 0,2d$ a uma coluna quadrada de madeira com um comprimento efetivo de $3,5 \text{ m}$. Para o tipo de madeira usada, $E = 12,5 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de $7,5 \text{ MPa}$. Usando o método da tensão admissível, determinar a menor dimensão admissível d .

11.135 Uma carga de 50 kN é aplicada com uma excentricidade de 38 mm no poste de madeira AB . Para o tipo de madeira usada, $E = 11 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de $9,3 \text{ MPa}$. Usando o método da tensão admissível, determinar o menor diâmetro admissível para o poste.

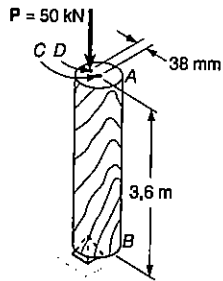


Fig. P11.135

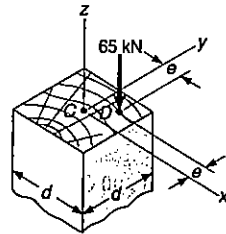


Fig. P11.137

11.136 Resolver o Prob. 11.135 usando o método da interação.

11.137 Uma coluna quadrada de madeira, de $4,5 \text{ m}$ de comprimento efetivo, suporta uma carga de 65 kN , com excentricidade $e = 45 \text{ mm}$, como mostrado. Para o tipo de madeira usada, $E = 11 \text{ GPa}$ e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 9 MPa . Usando o método da interação, determinar a menor dimensão admissível d .

11.138 Uma carga vertical P de 50 kN é aplicada no ponto médio de uma das bordas da seção transversal quadrada, do membro comprimido AB , que é livre em seu topo A e engastada em sua base B . Sabendo-se que para o tipo de aço usado, $E = 200 \text{ GPa}$ e $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$, e usando o método da tensão admissível, determinar a menor dimensão admissível d .

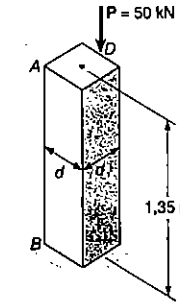


Fig. P11.138

11.139 Resolver o Prob. 11.138, assumindo que a carga vertical P é aplicada no centro da seção transversal quadrada.

11.140 Um tubo retangular de aço é feito para suportar uma carga de 60 kN , tendo uma excentricidade $e = 25 \text{ mm}$. Os tubos disponíveis para o uso têm espessuras de parede que variam desde 6 mm até 12 mm , em incremento de $1,5 \text{ mm}$. Usando o método da interação, determinar o tubo mais leve que pode ser usado. Usar $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ e uma tensão admissível à flexão de 150 MPa .

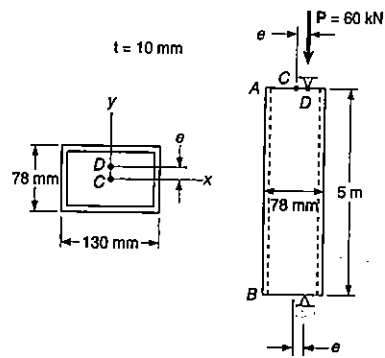


Fig. P11.140

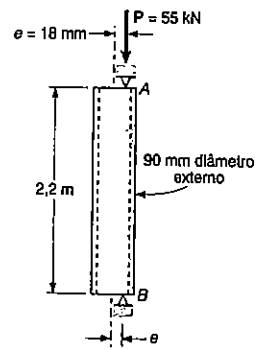


Fig. P11.142

11.141 Resolver o Prob. 11.140 usando o método da tensão admissível.

11.142 Um tubo de alumínio de 90 mm de diâmetro externo é feito para suportar uma carga de 55 kN, tendo uma excentricidade $e = 18$ mm. Os tubos disponíveis para o uso são feitos da liga de alumínio 6061-T6 e têm espessuras de parede que variam desde 6 mm até 15 mm, em incrementos de 1,5 mm. Usando o método da tensão admissível, determinar o tubo mais leve que pode ser usado.

11.143 Resolver o Prob. 11.142 usando o método da interação, para uma carga $P = 75$ kN e uma tensão admissível à flexão de 150 MPa.

11.144 Um membro de seção transversal retangular submetido à compressão, tem um comprimento efetivo de 915 mm e é feito da liga de alumínio 2014-T6, para a qual a tensão admissível é de 165 MPa. Usando o método da interação, determinar a menor dimensão d da seção transversal que pode ser usada, quando $e = 10$ mm.

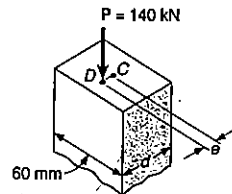


Fig. P11.144

11.145 Resolver o Prob. 11.144, assumindo que $e = 5$ mm.

11.146 e 11.147 Uma coluna de madeira, de seção transversal retangular, tem um comprimento efetivo de 2,5 m e deve suportar uma carga de 40 kN, como mostrado. Usando o método da tensão admissível, projetar a coluna de tal maneira que um de seus lados seja o dobro do outro. Assumir $E = 12,4$ GPa e uma tensão admissível de 160 MPa à compressão, paralela às fibras.

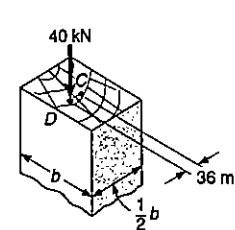


Fig. P11.146

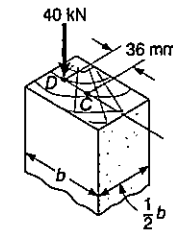


Fig. P11.147

11.148 Uma coluna de aço de 6,6 m de comprimento efetivo deve suportar uma carga excêntrica de 160 kN, em um ponto D localizado sobre o eixo x , como mostrado. Usando o método da interação, selecionar o perfil laminado de aço de abas largas, de 300 mm de dimensão nominal, que poderá ser usado. Usar $E = 200$ GPa, $\sigma_c = 250$ MPa e $\sigma_{adm} = 150$ MPa na flexão.

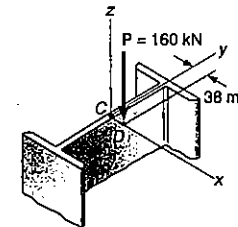


Fig. P11.148

11.149 Resolver o Prob. 11.148, selecionando o perfil laminado de aço de 250 mm de altura nominal.

11.150 Uma coluna de aço de 7,4 m de comprimento efetivo deve suportar uma carga de 245 kN, com uma excentricidade de 62 mm, como mostrado. Usando o método da interação, selecionar o perfil laminado de abas largas, de 250 mm de dimensão nominal, que poderá ser usado. Assumir $E = 200$ GPa, $\sigma_c = 250$ MPa e $\sigma_{adm} = 150$ MPa na flexão.

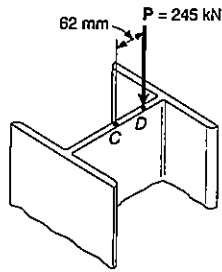


Fig. P11.150

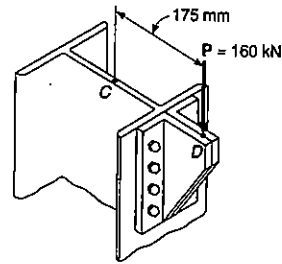


Fig. P11.151

11.151 Uma coluna de aço de 5 m de comprimento efetivo deve suportar uma carga de 160 kN, com uma excentricidade de 175 mm, como mostrado. Usando o método da interação, selecionar o perfil laminado de abas largas, de 200 mm de dimensão nominal, que poderá ser usado. Assumir $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ e $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$ na flexão.

REVISÃO E SUMÁRIO

Este capítulo foi voltado à análise e projeto de colunas, isto é, membros prismáticos suportando cargas axiais. Para uma melhor compreensão sobre o comportamento de colunas, primeiro consideramos, na Sec. 11.2, o equilíbrio de um modelo simples e encontramos que para valores da carga P , excedendo um certo valor P_{cr} , denominada *carga crítica*, duas posições de equilíbrio do modelo eram possíveis: a posição original, com deflexão transversal zero e uma segunda posição envolvendo deflexões que poderiam ser bastante grandes. Isto nos levou a concluir que a primeira posição de equilíbrio, para $P > P_{cr}$, era estável, sendo que este último caso era a única posição de equilíbrio possível.

Na Sec. 11.3, nós consideramos uma coluna biarticulada, de comprimento L e de rigidez flexional EI constante, submetida a uma carga axial centrada P . Assumindo que a coluna tinha flambado (Fig. 11.7), notamos que o momento fletor no ponto Q era igual a $-Py$ e escrevemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad (11.4)$$

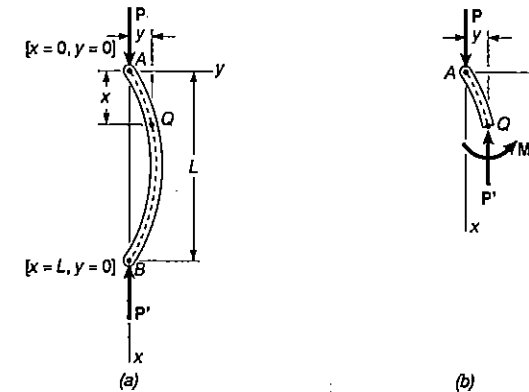


Fig. 11.7

Fórmula de Euler

Resolvendo esta equação diferencial e submetendo-a às condições de contorno correspondentes para uma coluna biarticulada, determinamos a menor carga P para que a flambagem possa ocorrer. Esta carga, conhecida como *carga crítica* e denotada por P_{cr} , é dada pela *fórmula de Euler*:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (11.11)$$

onde L é o comprimento da coluna. Para este carregamento ou qualquer carga maior, o equilíbrio da coluna é instável e as deflexões transversais irão ocorrer.

Denotando a área da seção transversal da coluna por A e seu raio de giração por r , determinamos a tensão crítica σ_{cr} correspondente à carga crítica P_{cr} :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/r)^2} \quad (11.13)$$

Índice de esbeltez

A quantidade L/r é denominada *índice de esbeltez* e plotamos σ_{cr} como uma função de L/r (Fig. 11.8). Como nossa análise foi permanentemente baseada em tensões abaixo do limite de escoamento do material, notamos que a coluna poderá falhar por escoamento quando $\sigma_{cr} > \sigma_e$.

Comprimento efetivo

Na Sec. 11.4, discutimos a carga crítica de colunas com várias condições de extremidades e escrevemos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (11.11')$$

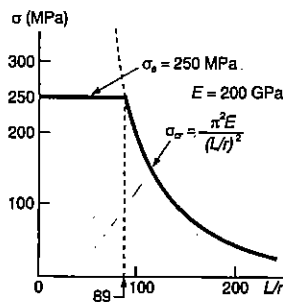


Fig. 11.8

onde L_e é o *comprimento efetivo* de flambagem da coluna, isto é, o comprimento de uma coluna bi-articulada equivalente. Os comprimentos efetivos de diversas colunas, com várias condições de extremidade, foram calculados e mostrados na Fig. 11.17.

Carga axial excêntrica

Na Sec. 11.5, consideramos coluna suportando uma *carga axial excêntrica*. Para uma coluna biarticulada submetida a uma carga P aplicada com uma excentricidade e , nós substituímos essa carga por uma carga axial centrada e um momento $M_A = Pe$ (Figs. 11.18a e 11.19) e derivamos a seguinte expressão para a máxima deflexão transversal:

$$y_{m\acute{a}x} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (11.28)$$

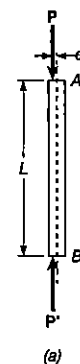


Fig. 11.18a

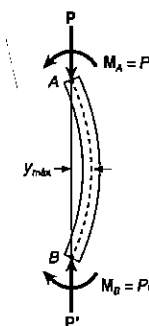


Fig. 11.19

Então determinamos a máxima tensão na coluna, e da expressão obtida para esta tensão derivamos a *fórmula secante*:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)} \quad (11.36)$$

Esta equação pode ser resolvida para a força por unidade de área, P/A , que causa uma tensão máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$ específica em uma coluna biarticulada, ou qualquer outra coluna de índice de esbeltez efetivo L_e/r da coluna.

Projeto de colunas reais

Colunas com carregamento centrado

Na primeira parte do capítulo consideramos cada coluna como um prisma reto e homogêneo. Como, na prática da Engenharia, imperfeições existem em todas as colunas, o projeto de colunas reais é feito usando fórmulas empíricas, baseadas em ensaios de laboratório e com certas especificações publicadas por quatro associações ligadas ao assunto. Na Sec. 11.6, nós discutimos o projeto de colunas com carregamento centrado, feitas de aço, de alumínio ou de madeira. Para cada material, o projeto da coluna foi baseado em fórmulas expressando a tensão admissível em função do índice de esbelte L/r da coluna.

Colunas com carregamento excêntrico

Na última seção do capítulo (Sec. 11.7), foram estudados dois métodos que são usados para o projeto de colunas sujeitas a uma carga excêntrica. O primeiro método foi o método da tensão admissível, que é um método conservativo onde assume-se que a tensão admissível é a mesma como se a coluna fosse submetida a uma carga centrada. O método da tensão admissível requer que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{adm} \quad (11.61)$$

O segundo método foi o método da interação, um método usado em muitas especificações modernas. Neste método, a tensão admissível para uma coluna com carga centrada, é usada para a porção da tensão total devida à carga axial, e a tensão admissível na flexão, para a porção da tensão total devida à flexão. Então, a desigualdade que deve ser satisfeita é:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \leq 1 \quad (11.63)$$

PROBLEMAS DE REVISÃO

11.152 Uma coluna de madeira tem uma seção transversal quadrada de 200×200 mm e um comprimento efetivo de 4 m. Para o tipo de madeira usada, $E = 12$ GPa e a tensão admissível à compressão, paralela às fibras, é de 7 MPa. Usando o método da interação, determinar a maior excentricidade admissível para uma carga axial de 100 kN.

11.153 Um membro de aço submetido à compressão, de 3,5 m de comprimento efetivo, suporta uma carga excêntrica, como mostrado. Usando o método da interação, determinar a carga admissível P . Assumir $E = 200$ GPa, $\sigma_e = 250$ MPa e $\sigma_{adm} = 150$ MPa na flexão.

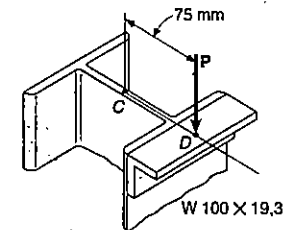


Fig. P11.153

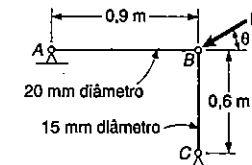


Fig. P11.154 e P11.155

11.154 Sabendo-se que um coeficiente de segurança de 2,8 é desejado, e usando a fórmula de Euler, determinar a maior carga P que pode ser aplicada à estrutura mostrada, quando $\theta = 30^\circ$. Usar $E = 200$ GPa e considerar somente flambagem no plano da estrutura.

11.155 Pede-se: (a) considerando somente flambagem no plano da estrutura mostrada, e usando a fórmula de Euler, determinar o valor de θ entre 0° e 90° para que a intensidade admissível da carga P seja máxima; (b) determinar o correspondente valor máximo de P , sabendo-se que um coeficiente de segurança de 3,2 é desejado. Usar $E = 200$ GPa.

11.156 Um perfil laminado de aço W150 x 13,5 é usado para formar uma coluna de 3 m de comprimento efetivo. Usando $E = 200$ GPa, e a fórmula de Euler, determinar a carga excêntrica axial admissível, se um coeficiente de segurança de 2,6 é desejado.

11.157 Determinar o comprimento L da barra de alumínio AB para que a carga centrada admissível seja 70 kN, se a liga de alumínio usada é: (a) 6061-T6; (b) 2014-T6. Usar as fórmulas desenvolvidas pela Aluminum Association.

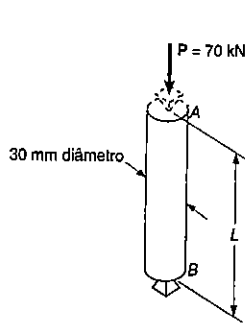


Fig. P11.157

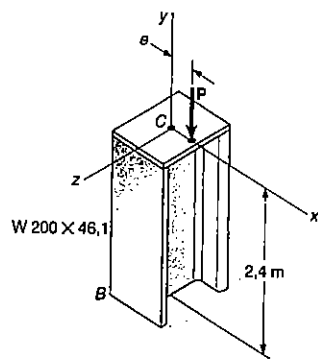


Fig. P11.158 e P11.159

11.158 Uma carga axial P de intensidade 670 kN é aplicada em um ponto sobre o eixo x , a uma distância $e = 6,35$ mm do eixo geométrico do perfil laminado de aço W200 x 46,1 da coluna BC . Usando $E = 200$ GPa, determinar: (a) a deflexão horizontal na extremidade C ; (b) a máxima tensão na coluna.

11.159 Uma carga axial P é aplicada em um ponto sobre o eixo x , a uma distância $e = 6,35$ mm do eixo geométrico do perfil laminado de aço W200 x 46,1 da coluna BC . Usando o método da tensão admissível, determinar a carga admissível P . Assumir $E = 200$ GPa, $\sigma_e = 250$ MPa e $\sigma_{adm} = 150$ MPa na flexão.

11.160 Resolver o Prob. 11.159 usando o método da interação.

11.161 A barra de alumínio AB tem uma seção transversal de 20×36 mm e é suportada como mostrado. Usando $E = 70$ GPa e a fórmula de Euler, determinar a carga excêntrica admissível P , se um coeficiente de segurança de 2,5 é desejado.

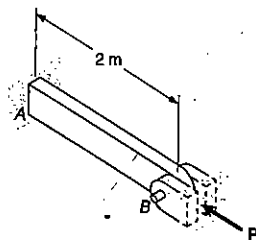


Fig. P11.161

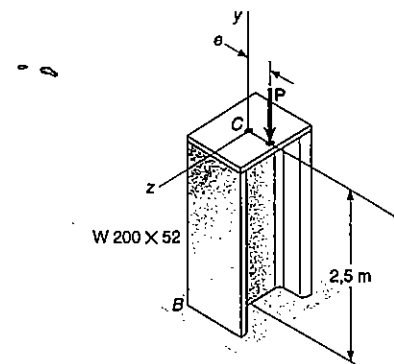


Fig. P11.C2

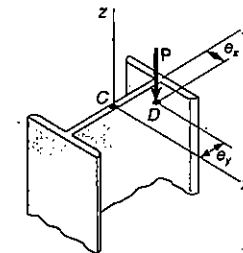


Fig. P11.C4

11.162 Uma coluna de 4 m de comprimento efetivo deve suportar uma carga centrada de 800 kN. Sabendo que $\sigma_e = 250$ MPa e $E = 200$ GPa e usando as fórmulas da AISC, selecionar o perfil laminado de abas largas de dimensão nominal 250 mm, que poderá ser usado.

11.163 Resolver a parte b do Prob. Resolvido 11.2, assumindo que a carga axial P é aplicada com uma excentricidade $e = 20$ mm, em um ponto localizado sobre uma das diagonais da seção transversal do tubo estrutural quadrado.

Os problemas que se seguem são para serem resolvidos com auxílio de um computador.

11.C1 Uma barra metálica de aço tem um comprimento efetivo de 0,6 m e é para ser usado como um membro em compressão, que deverá suportar uma carga centrada P . Para o tipo de aço a ser usado, $E = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa. Desejando-se um coeficiente de segurança igual a 3,0, e usando a fórmula de Euler, escrever um programa de computador e usá-lo para calcular a carga centrada admissível P_{adm} , para valores de diâmetro da barra desde 2,5 mm até 37,5 mm, em intervalos de 2,5 mm.

11.C2 Uma carga axial P é aplicada em um ponto localizado sobre o eixo x , a uma distância $e = 121$ mm do eixo geométrico do perfil laminado de aço W200 x 52 da coluna BC . Usando $E = 200$ GPa, escrever um programa de computador e usá-lo para calcular, para valores de P variando desde 0 até 750 kN, em intervalos de 50 kN: (a) a deflexão horizontal da extremidade C ; (b) a máxima tensão na coluna.

11.C3 Uma coluna de comprimento efetivo L é feito de um perfil laminado de aço e suporta uma carga axial P . A tensão de escoamento do tipo de aço usado é denotado por σ_e , o módulo de elasticidade por E , a área da seção transversal do perfil laminado

selecionado por A , e seu menor raio de giração por r . Usando as fórmulas da AISC, escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a carga admissível P . Usar este programa para resolver o: (a) Prob. 11.70; (b) Prob. 11.71.

11.C4 Uma coluna de comprimento efetivo L é feita de um perfil laminado de aço de abas largas e é carregado excentricamente como mostrado. A tensão de escoamento do tipo de aço é denotado por σ_e , a tensão admissível na flexão por σ_{adm} , o módulo de elasticidade por E , a área da seção transversal do perfil selecionado por A , e seu menor raio de giração por r . Escrever um programa de computador que pode ser usado para determinar a carga admissível P , usando ambos os métodos, da tensão admissível e da interação. Usar este programa para resolver o: (a) Prob. 11.153; (b) Prob. 11.159; (c) Prob. 11.160.

APÊNDICES

- | | |
|--------------------|---|
| Apêndice A. | Centróides e momentos de inércia |
| Apêndice B. | Propriedades dos materiais mais usados em engenharia |
| Apêndice C. | Propriedades dos perfis de aço laminado ¹ |
| Apêndice D. | Deformação das vigas |
| Apêndice E. | Principais unidades SI usadas na mecânica |
| Apêndice F. | Centróides de figuras planas e linhas |
| Apêndice G. | Momentos de Inércia de Figuras Planas |
| Apêndice H. | Unidades usuais inglesas e equivalentes no Sistema Internacional (SI) |

¹ Cortesia do American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

Apêndice A

**CENTRÓIDES E
MOMENTOS DE INÉRCIA**

**A.1 MOMENTO ESTÁTICO DE UMA
ÁREA; CENTRÓIDE DE UMA ÁREA**

Consideremos a área A situada no plano xy (Fig. A.1). Se x e y forem coordenadas de um elemento de área dA , definimos o *momento estático de área A em relação ao eixo x* como a integral.

$$Q_x = \int_A y \, dA \tag{A.1}$$

De maneira análoga, o *momento estático da área A em relação ao eixo y* é definido como a integral

$$Q_y = \int_A x \, dA \tag{A.2}$$

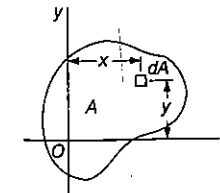


Fig. A.1

Vemos que, dependendo da posição dos eixos coordenados, cada uma das integrais pode ser positiva, negativa ou nula. Os momentos estáticos Q_x e Q_y são usualmente expressos em m^3 ou mm^3 , no Sistema Internacional de Unidades.

O *centróide da área A* é definido como o ponto C de coordenadas \bar{x} e \bar{y} (Fig. A.2), que satisfazem as relações:

$$\int_A x \, dA = A\bar{x} \quad \int_A y \, dA = A\bar{y} \tag{A.3}$$

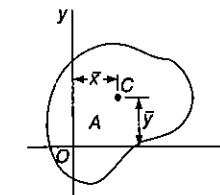


Fig. A.2

Comparando as Eqs. A.1 e A.2 com as Eqs. A.3, vemos que os momentos estáticos da área A podem ser expressos pelo produto da área através das coordenadas do seu centróide.

$$Q_x = A\bar{y} \quad Q_y = A\bar{x} \tag{A.4}$$

Quando uma área possui um *eixo de simetria*, o momento estático da área em relação a esse eixo é zero. Realmente, considerando a área A da Fig. A.3, que é

simétrica em relação ao eixo y , vemos que a todo elemento de área dA de abscissa x corresponde o elemento de área dA' de abscissa $-x$. Conseqüentemente, a integral da Eq. A.2 é igual a zero e, desse modo, $Q_y = 0$. Temos ainda, da primeira das relações (A.3) que $\bar{x} = 0$. Assim, se uma área possui um eixo de simetria, seu centróide se localiza nesse eixo.

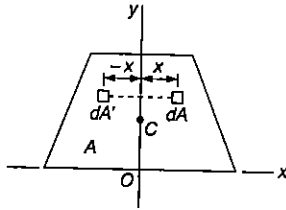


Fig. A.3

Como um retângulo possui dois eixos de simetria (Fig. A.4a), o centróide de uma área retangular coincide com seu centro geométrico. Da mesma maneira, o centróide de uma área circular coincide com o centro do círculo (Fig. A.4b).

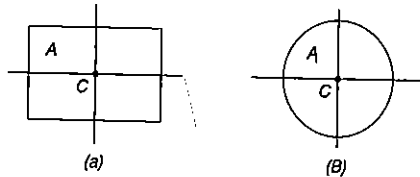


Fig. A.4

Quando uma área possui um *centro de simetria* O , o momento estático da área em relação a qualquer eixo que passe por O é zero. Realmente, tomando a área A da Fig. A.5, vemos que a todo elemento de área dA de coordenadas x e y corresponde um elemento de área dA' de coordenadas $-x$ e $-y$. Como conseqüência, as integrais nas Eqs. A.1 e A.2 são ambas nulas e $Q_x = Q_y = 0$. Temos ainda, das Eqs. A.3, que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, o que mostra que o centróide coincide com o centro de simetria.

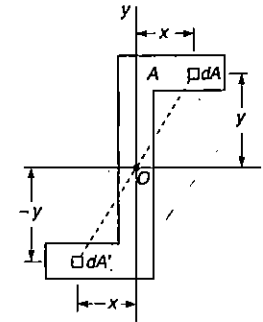


Fig. A.5

Quando o centróide C de uma área pode ser localizado por meio de simetria, o seu momento estático em relação a um certo eixo pode ser obtido imediatamente das Eqs. A.4. Por exemplo, para a área retangular da Fig. A.6, temos:

$$Q_x = A \bar{y} = (bh) \left(\frac{1}{2} h \right) = \frac{1}{2} b h^2$$

e

$$Q_y = A \bar{x} = (bh) \left(\frac{1}{2} b \right) = \frac{1}{2} b^2 h$$

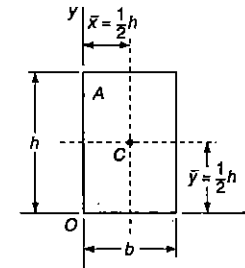


Fig. A.6

Na maior parte dos casos, no entanto, é necessário realizar-se as integrais das Eqs. A.1, A.2 e A.3 para a determinação dos momentos estáticos e do centróide de uma dada área. As integrais indicadas nas equações são, na verdade, integrais duplas. Muitas vezes, porém, se consegue reduzir o problema ao cálculo de integrais em uma

variável, tomando-se elementos de área dA na forma de faixas horizontais ou verticais. Esse procedimento é aplicado no Ex. A.1. No Apêndice F deste livro há uma tabela indicando a posição do centróide de figuras geométricas usuais.

EXEMPLO A.1

Determinar, para a área triangular da Fig. A.7: (a) o momento estático Q_x da área em relação ao eixo x ; (b) a ordenada \bar{y} do centróide da área.

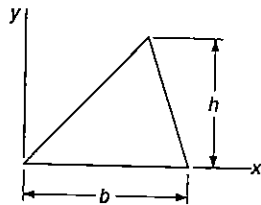


Fig. ex.A.7

(a) **Momento estático Q_x .** Escolhemos como elemento de área uma faixa horizontal de comprimento u e espessura dy . Vemos que todos os pontos no elemento de área se situam à mesma distância y do eixo x (Fig. A.8). Por semelhança de triângulos temos

$$\frac{u}{b} = \frac{h - y}{h} \quad u = b \frac{h - y}{h}$$

$$dA = u \, dy = b \frac{h - y}{h} \, dy$$

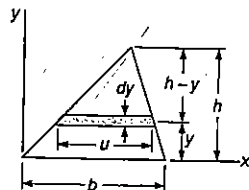


Fig. ex.A.8

O momento estático da área em relação ao eixo x é

$$Q_x = \int_A y \, dA = \int_0^h y b \frac{h - y}{h} \, dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) \, dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h \quad Q_x = \frac{1}{6} bh^2$$

(b) **Ordenada do centróide.** Usando a primeira das Eqs. A.4 e observando que $A = \frac{1}{2}bh$, temos

$$Q_x = A \bar{y} \quad \frac{1}{6} bh^2 = \left(\frac{1}{2} bh \right) \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3} h$$

A.2 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO ESTÁTICO E DO CENTRÓIDE DE UMA ÁREA COMPOSTA

Consideremos uma área A que possa ser dividida em formas geométricas simples, como a área trapezoidal da Fig. A.9.

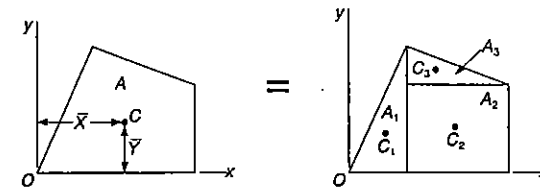


Fig. A.9

Como vimos na Sec. precedente, o momento estático Q_x da área em relação ao eixo x é representado pela integral $y dA$, estendida a toda a área A . Se dividirmos A nas partes A_1, A_2, A_3 escrevemos:

$$Q_x = \int_A y \, dA = \int_{A_1} y \, dA + \int_{A_2} y \, dA + \int_{A_3} y \, dA$$

ou, usando a segunda das Eqs. A.3,

$$Q_x = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$

onde \bar{y}_1, \bar{y}_2 e \bar{y}_3 são as ordenadas dos centróides de cada área resultante da divisão da figura. Estendendo esse resultado para uma divisão em um número qualquer de partes, escrevemos, para Q_x e Q_y ,

$$Q_x = \sum_i A_i \bar{y}_i \quad Q_y = \sum_i A_i \bar{x}_i \quad (A.5)$$

Para determinarmos as coordenadas \bar{X} e \bar{Y} do centróide C da área composta A , substituímos, nas Eqs. A.5, Q_x por $A\bar{Y}$ e Q_y por $A\bar{X}$. Temos

$$A \bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i \quad A \bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i$$

Resolvendo então para \bar{X} e \bar{Y} e lembrando que a área A é a soma das áreas A_i , escrevemos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} \quad (A.6)$$

EXEMPLO A.2

Determinar o centróide C da área indicada na Fig. A.10.

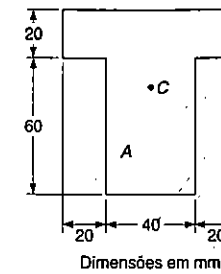


Fig. ex.A.10

Adotando os eixos coordenados como indica a Fig. A.11, vemos que o centróide C deve estar localizado sobre o eixo y , pois esse eixo é um eixo de simetria. Temos então $\bar{X} = 0$.

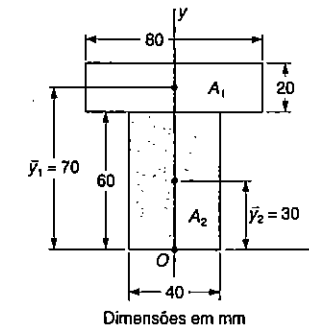


Fig. ex.A.11 Dimensões em mm.

Dividindo A nas partes A_1 e A_2 , usamos a segunda das Eqs. A.6 para determinarmos a ordenada \bar{Y} do centróide. O cálculo se simplifica se for feito em forma de tabela.

	Área, mm ²	\bar{y}_i , mm	$A_i \bar{y}_i$, mm ³
A ₁	(20)(80) = 1600	70	112 × 10 ³
A ₂	(40)(60) = 2400	30	72 × 10 ³
	$\sum_i A_i = 4000$		$\sum_i A_i \bar{y}_i = 184 \times 10^3$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 46 \text{ mm}$$

EXEMPLO A.3

Tomando a área A do Ex. A.2, vamos considerar o eixo x' que passa pelo centróide C. (Um eixo como esse é chamado de *eixo centroidal*.) Chamando de A' a parte da área A situada acima do eixo centroidal (Fig. A.12), determinar o momento estático de A' em relação a x'.

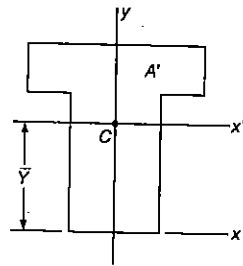


Fig. ex.A.12

Solução. Dividimos a área A' nas partes A₁ e A₃ (Fig. A.13). Sabendo do Ex. A.2 que C está localizado a 46 mm acima do eixo inferior de A, determinamos as ordenadas \bar{y}'_1 e \bar{y}'_3 das áreas A₁ e A₃ e calculamos o momento estático $Q'_{x'}$ de A' em relação a x'; temos

$$\begin{aligned} Q'_{x'} &= A_1 \bar{y}'_1 + A_3 \bar{y}'_3 \\ &= (20 \times 80)(24) + (14 \times 40)(7) = 42,3 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

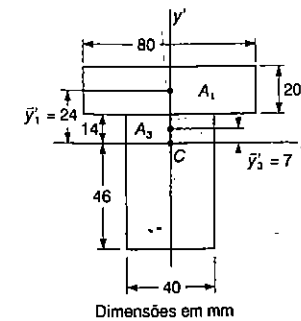


Fig. ex.A.13

Solução alternativa. Devemos notar inicialmente que o centróide C da área A se localiza sobre x', de modo que o momento estático $Q'_{x'}$ da área total A em relação a x', é zero.

$$Q_{x'} = A \bar{y}' = A(0) = 0$$

Tomando a área A'', parte da área A situada abaixo do eixo x', e chamando de $Q''_{x'}$, o momento estático de A'' em relação a x', temos

$$Q_{x'} = Q'_{x'} + Q''_{x'} = 0 \quad \text{ou} \quad Q'_{x'} = -Q''_{x'}$$

o que mostra que os momentos estáticos de A' e A'' têm o mesmo valor, com sinais contrários. Com os dados da Fig. A.14, escrevemos:

$$Q''_{x'} = A_4 \bar{y}'_4 = (40 \times 46)(-23) = -42,3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

e

$$Q'_{x'} = -Q''_{x'} = +42,3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

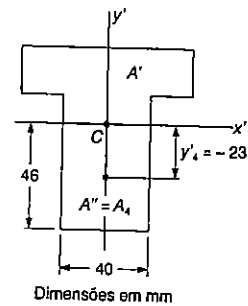


Fig. ex.A.14

A.3 MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA; RAIOS DE GIRAÇÃO

Consideremos novamente a área A situada no plano xy (Fig. A.1) e o elemento de área dA de coordenadas x e y . O momento de inércia da área A em relação ao eixo x e o momento de inércia de A em relação ao eixo y são definidos, respectivamente, como

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (\text{A.7})$$

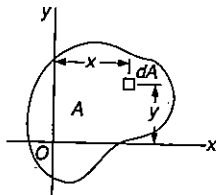


Fig. A.1 (repetida)

Essas integrais são chamadas *momentos de inércia retangulares*, uma vez que são calculadas pelas coordenadas retangulares do elemento dA . Cada integral em (A.7) é, na verdade, uma integral dupla. Em muitas aplicações, no entanto, é possível reduzir o problema ao cálculo de uma integral em uma variável, escolhendo para dA elementos na forma de faixas horizontais ou verticais. Este procedimento é ilustrado no Ex. A.4.

Definimos agora o *momento de inércia polar* da área A em relação ao ponto O (Fig. A.15) como a integral

$$J_O = \int_A \rho^2 dA \quad (\text{A.8})$$

onde ρ é a distância de O ao elemento dA . A integral acima também é uma integral dupla, que pode ser reduzida a uma integral em uma variável, no caso de uma área circular, se escolhermos os elementos de área dA na forma de anéis circulares (ver Ex. A.5).

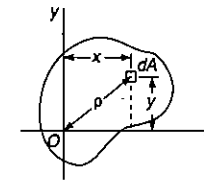


Fig. A.15

Vemos pelas Eqs. A.7 e A.8 que os momentos de inércia de uma área são grandezas positivas. No Sistema Internacional de Unidades, eles são usualmente expressos em m^4 ou mm^4 .

Podemos estabelecer uma relação importante entre o momento de inércia polar J_O de uma certa área e os momentos de inércia retangulares I_x e I_y dessa área. Observando que $\rho^2 = x^2 + y^2$, escrevemos

$$J_O = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA$$

ou

$$J_O = I_x + I_y \quad (\text{A.9})$$

O raio de giração de uma área A em relação ao eixo x é definido pela grandeza r_x , que satisfaz a relação

$$I_x = r_x^2 A \quad (\text{A.10})$$

onde I_x é o momento de inércia de A em relação ao eixo x . Calculando o valor de r_x na Eq. A.10, temos

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (\text{A.11})$$

De maneira análoga, podemos definir o raio de giração em relação ao eixo y e em relação à origem O . Escrevemos

$$I_y = r_y^2 A \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (\text{A.12})$$

$$J_O = r_o^2 A \quad r_o = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (\text{A.13})$$

Na Eq. A.9, se substituirmos J_O , I_x e I_y em termos dos raios de giração correspondentes, encontramos

$$r_o^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (\text{A.14})$$

EXEMPLO A.4

Determinar, para a área retangular da Fig. A.16: (a) o momento de inércia I_x da área em relação ao eixo centroidal x ; (b) o raio de giração r_x correspondente.

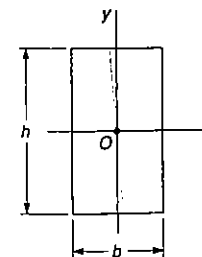


Fig. ex.A.16

(a) **Momento de inércia I_x .** Vamos adotar como elemento de área a faixa horizontal de largura b e espessura dy (Fig. A.17). Todos os pontos dessa faixa estão situados à mesma distância y do eixo x , e o momento de inércia da faixa em relação a x é

$$dI_x = y^2 dA = y^2(b dy)$$

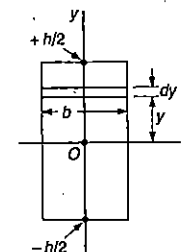


Fig. ex.A.17

Integrando de $y = -h/2$ a $y = +h/2$, escrevemos

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2(b dy) = \frac{1}{3} b [y^3]_{-h/2}^{+h/2} \\ &= \frac{1}{3} b \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) \end{aligned}$$

ou

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3$$

(b) **Raio de giração r_x .** Da Eq. A.10, temos

$$I_x = r_x^2 A \quad \frac{1}{12} bh^3 = r_x^2 (bh)$$

e, calculando r_x ,

$$r_x = h/\sqrt{12}$$

EXEMPLO A.5

Determinar, para a área circular indicada na Fig. A.18: (a) o momento de inércia polar J_O ; (b) o momento de inércia retangular I_x e o momento de inércia retangular I_y .

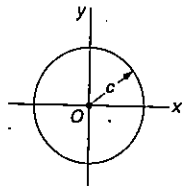


Fig. ex.A.18

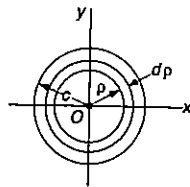


Fig. ex.A.19

a) **Momento de inércia polar.** Vamos adotar como elemento de área um anel de raio ρ e espessura $d\rho$ (Fig. A.19). Uma vez que todos os pontos do anel estão à mesma distância ρ do ponto O , temos o momento de inércia polar dado por

$$dJ_O = \rho^2 dA = \rho^2 (2\pi \rho d\rho)$$

Integrando na variável ρ de O até c , encontramos

$$J_O = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi \rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho$$

$$J_O = \frac{1}{2} \pi c^4$$

(b) **Momentos de inércia retangulares.** Devido à simetria da área circular, temos $I_x = I_y$. Retomando a Eq. A.9, escrevemos

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \quad \frac{1}{2} \pi c^4 = 2I_x$$

e, desse modo,

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi c^4$$

Os resultados obtidos nos dois exemplos anteriores, juntamente com os momentos de inércia de outras formas geométricas comuns, estão listados no Apêndice G.

A.4 TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

Consideremos o momento de inércia I_x de uma área A em relação a um eixo x arbitrário (Fig. A.20). Se chamarmos de y a distância de um elemento de área dA até esse eixo, sabemos da Sec. A.3 que

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

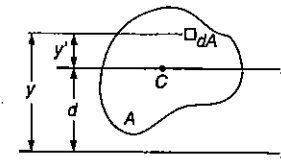


Fig. A.20

Vamos desenhar o eixo *centroidal* x' , quer dizer, o eixo paralelo ao eixo x que passa pelo centróide C da área. A distância do elemento dA até esse eixo será chamada de y' , e teremos $y = y' + d$, onde d é a distância entre os dois eixos. Substituindo esse valor de y na integral que representa I_x , vamos encontrar

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2 dA + 2d \int_A y' dA + d^2 \int_A dA \tag{A.15}$$

A primeira integral na Eq. A.15 representa o momento de inércia $\bar{I}_{x'}$, da área em relação ao eixo *centroidal* x' . A segunda integral representa o momento estático $Q_{x'}$, da área em relação ao eixo x' . Esse momento estático é nulo, uma vez que o eixo x' passa pelo centróide C . Realmente, sabemos da Sec. A.1 que

$$Q_{x'} = A \bar{y} = A(0) = 0$$

Por último, vemos que a terceira integral da Eq. A.15 é igual à área total A . Temos, dessa forma,

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \tag{A.16}$$

Essa fórmula indica que o momento de inércia I_x de uma área em relação a um eixo arbitrário x é igual ao momento de inércia \bar{I}_x da área em relação ao eixo centroidal x' paralelo ao eixo x , mais o produto Ad^2 da área A pelo quadrado da distância d entre os dois eixos. Essa propriedade é conhecida como o *teorema dos eixos paralelos*. Ela torna possível a determinação do momento de inércia de uma área em relação a um dado eixo, conhecendo-se o valor do momento de inércia dessa área em relação a um eixo baricêntrico de mesma direção. Inversamente, ela possibilita que se determine o momento de inércia \bar{I}_x de uma área A em relação ao eixo baricêntrico x' , quando se conhece o momento de inércia I_x da área em relação a um eixo paralelo, *subtraindo-se* de I_x a parcela Ad^2 . Devemos observar que o teorema dos eixos paralelos só pode ser usado se *um dos eixos for um eixo centroidal*.

Uma fórmula semelhante pode ser deduzida, relacionando o momento de inércia polar J_O de uma área em relação a um ponto arbitrário O e o momento de inércia J_C dessa mesma área em relação ao seu centróide C . Chamando de d a distância entre O e C , temos

$$J_O = J_C + Ad^2 \tag{A.17}$$

A.5 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA COMPOSTA

Consideremos uma área composta A constituída de várias partes A_1, A_2 etc. A integral que calcula o momento de inércia de A pode ser subdividida em integrais estendidas às áreas A_1, A_2 etc., de modo que o momento de inércia de A em relação a um certo eixo será obtido pela soma dos momentos de inércia de A_1, A_2 e outras, em relação ao mesmo eixo. Assim, se a área é formada de várias formas geométricas comuns, seu momento de inércia pode ser calculado através das fórmulas dadas no Apêndice G deste livro, para o momento de inércia de cada parte componente. No entanto, antes de se somar simplesmente os valores dos momentos de inércia das partes componentes, devemos usar o teorema dos eixos paralelos para transferir cada momento de inércia para o eixo desejado. Este procedimento é mostrado no Ex. A.6.

EXEMPLO A.6

Determinar o momento de inércia I_x da área indicada em relação ao eixo centroidal x (Fig. A.21).

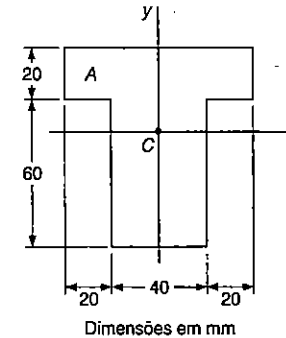


Fig. ex.A.21

Localização do centróide. Devemos inicialmente localizar o centróide C da área. No entanto, esse cálculo já foi feito no Ex. A.2, onde se viu que C fica a 46 mm acima da base da figura.

Determinação do momento de inércia. Dividimos a área A em duas áreas retangulares A_1 e A_2 (Fig. A.22), e calculamos os momentos de inércia de cada parte em relação ao eixo x .

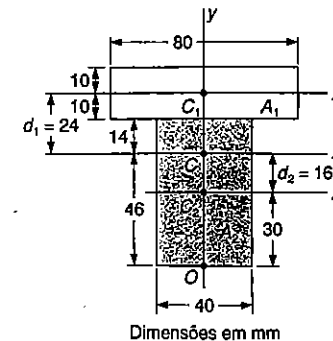


Fig. ex.A.22

Área retangular A_1 . Para obtermos o momento de inércia $(I_x)_1$ de A_1 em relação ao eixo x , calculamos inicialmente o momento de inércia de A_1 em relação do seu próprio eixo centroidal x' . Usando a fórmula do momento de inércia centroidal do retângulo deduzida no Ex. A.4, temos

$$(\bar{I}_{x'})_1 = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(80\text{ mm})(20\text{ mm})^3 = 53,3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Usando o teorema dos eixos paralelos, transferimos o momento de inércia de A_1 do seu eixo centroidal x' para o eixo x :

$$\begin{aligned}(I_x)_1 &= (\bar{I}_{x'})_1 + A_1d_1^2 = 53,3 \times 10^3 + (80 \times 20)(24)^2 \\ &= 975 \times 10^3 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Área retangular A_2 . Calculando o momento de inércia de A_2 em relação ao seu eixo centroidal x'' , e usando o teorema dos eixos paralelos para transferi-lo para o eixo x , encontramos

$$\begin{aligned}(\bar{I}_{x''})_2 &= \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(40)(60)^3 = 720 \times 10^3 \text{ mm}^4 \\ (I_x)_2 &= (\bar{I}_{x''})_2 + A_2d_2^2 = 720 \times 10^3 + (40 \times 60)(16)^2 \\ &= 1334 \times 10^3 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Área total A. O momento de inércia I_x da área total é obtido somando-se os valores dos momentos de inércia de A_1 e A_2 em relação ao eixo x :

$$\begin{aligned}I_x &= (I_x)_1 + (I_x)_2 = 975 \times 10^3 + 1334 \times 10^3 \\ I_x &= 2,31 \times 10^6 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Apêndice B

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS MAIS USADOS EM ENGENHARIA

Material	Peso Específico kg/m ³	Tensões de ruptura			Tensões de escoamento.		Módulos e elasticidade		Coeficiente de dilatação térmica 10 ⁻⁶ °C	Alongamento percentual mm
		Tração MPa	Compressão MPa	Cisalhamento MPa	Tração MPa	Cisalhamento MPa	Longitudinal GPa	Transversal GPa		
Aços para concreto armado										
CA-25	7860	300			250		210	79	11,7	18
CA-32	7860	394			320		210	79	11,7	14
CA-40	7860	440			400		210	79	11,7	10
CA-50	7860	550			500		210	79	11,7	8
CA-60	7860	600			600		210	79	11,7	5
Aços para concreto protendido										
-CP150	7860	1570			1500		210	79	11,7	8
-CP160	7860	1670			1500		210	79	11,7	7
Perfis laminados										
Cor-Ten A	7860	471 a 492			352					18 a 19
Cor-Ten B	7860	492			352					19
Cor-Ten C	7860	562			422					16
ASTM A-36	7860	408 a 562			253					16 a 20
Aço inoxidável 302										
Laminado a frio	7920	860	-	-	520	-	190	73	17,3	12
Temperado	7920	620	-	-	275	152	190	73	17,3	50

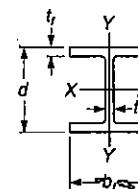
Material	Peso Específico kg/m ³	Tensões de ruptura			Tensões de escoamento		Módulos e elasticidade		Coeficiente de dilatação térmica 10 ⁻⁶ °C	Alongamento percentual mm
		Tração MPa	Compressão MPa	Cisalhamento MPa	Tração MPa	Cisalhamento MPa	Longitudinal GPa	Transversal GPa		
Ferro fundido										
ASTM A-48	7200	170	650	240	-	-	70	28	12,1	0,5
ASTM A-47	7300	340	620	330	230	-	165	64	12,1	10
Alumínio (1% Mg)	2710	290	-	185	255	140	69	26	23,6	17
Latão (65% Cu; 35% Zn)										
Laminado a frio	8470	540	-	300	435	250	105	39	20	8
Temperado	8470	330	-	220	105	65	105	39	20	62
Magnésio (8,5% Al)	1800	380	-	165	275	-	45	-	26	7
Titânio (6,0% Al; 4% V)	4460	900	-	-	825	-	114	-	9,5	10
Concreto	2320	-	20 a 40	-	-	-	25 a 30	-	10	-
Madeira ¹										
Peroba rosa	790 a 870	760 a 1400 ²	340 a 700	10 a 15	-	-	10 a 20	-	-	-
Pinho	520 a 600	1100 a 1600 ²	450 a 750	15 a 17	-	-	12 a 15	-	-	-
Eucalipto	690 a 900	500 a 900 ²	230 a 500	10 a 15	-	-	15 a 24	-	-	-
Poliestireno	1050	48	90	55	-	-	3	-	72	4
Vidro plano	2500	24 a 6,0 ²	60 a 125	-	-	-	65 a 80	-	950	-

- 1 Tensões paralelas às fibras.
- 2 Tensões na flexão.
- 3 Para metais dúteis valores iguais à tração.

Apêndice C

PROPRIEDADES DOS PERFIS DE AÇO LAMINADO

PERFIS DE ABAS LARGAS



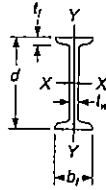
Dimensão nominal ¹	Área A, mm ²	Altura d, mm	Abas		Espessura da alma t_w, mm	Eixo X-X			Eixo Y-Y		
			Largura b_f, mm	Espessura t_f, mm		I_x 10 ⁶ mm ⁴	W_x 10 ³ mm ³	r_x mm	I_y 10 ⁶ mm ⁴	W_y 10 ³ mm ³	r_y mm
W920 x 446	57000	933	423	42,7	24,0	8450	18110	368	541	2560	97,3
	201	25600	903	304	20,1	15,2	3250	7200	356	93,7	616
W840 x 299	38100	855	400	29,2	18,2	4790	11200	356	312	1560	90,4
	176	22400	835	292	18,8	14,0	2460	5890	330	77,8	533
W760 x 257	32800	773	381	27,1	16,6	3410	8620	323	249	1307	87,1
	147	18800	753	265	17,0	13,2	1660	4410	297	53,3	402
W690 x 217	27700	695	355	24,8	15,4	2340	6730	290	184,4	1039	81,5
	125	16000	678	253	16,3	11,7	1185	3500	272	44,1	349
W610 x 155	19700	611	324	19,0	12,7	1290	4420	258	107,8	665	73,9
	101	13000	603	228	14,9	10,5	762	2530	243	29,3	257
W530 x 150	19200	543	312	20,3	12,7	1007	3710	229	103,2	662	73,4
	92	11800	533	209	15,6	10,2	554	2080	217	23,9	229
66	8390	525	165	11,4	8,9	351	1337	205	8,62	104,5	32,0

Dimensão nominal ¹	Área A, mm ²	Altura d, mm	Abas		Espes-sura da alma t _w , mm	Eixo X-X			Eixo Y-Y		
			Lar-gura b _f , mm	Es-pes-sura t _f , mm		I _x 10 ⁶ mm ⁴	W _x 10 ³ mm ³	r _x mm	I _y 10 ⁶ mm ⁴	W _y 10 ³ mm ³	r _y mm
W460 x 158	20100	476	284	23,9	15,0	795	3340	199,1	91,6	645	67,6
113	14400	463	280	17,3	10,8	554	2390	196,3	63,3	452	56,3
74	9480	457	190	14,5	9,0	333	1457	187,5	16,69	175,7	41,9
52	6650	450	152	10,8	7,6	212	942	176,5	6,37	83,8	31,0
W410 x 114	14900	420	261	19,3	11,6	462	2200	177,6	57,4	440	62,7
85	10800	417	181	18,2	10,9	316	1516	170,7	17,94	198,2	40,6
60	7610	407	178	12,6	7,7	216	1061	168,4	12,03	135,2	39,9
46,1	5980	403	140	11,2	7,0	156,1	775	162,6	5,16	73,7	29,7
38,8	49,50	399	140	8,6	6,4	125,3	628	159,0	3,99	57,0	28,4
W360 x 551	70300	455	418	67,6	42,0	2260	9930	179,6	628	3960	108,5
216	27500	375	394	27,7	17,3	712	3800	160,8	282	1431	101,1
122	15500	363	257	21,7	13,0	367	2020	153,7	61,6	479	63,0
101	12900	357	255	18,3	10,5	301	1686	152,7	50,4	395	62,5
79	10100	354	205	16,8	9,4	225	1271	149,6	24,0	234	48,8
64	8130	347	203	13,5	7,7	178,1	1027	147,8	18,61	185,3	48,0
57	7230	356	172	13,1	7,9	160,2	895	149,4	11,11	129,2	39,4
44,8	5710	352	171	9,8	6,9	121,1	688	145,5	8,16	95,4	37,8
39,0	4960	353	128	10,7	6,5	102,0	578	143,5	3,71	58,0	27,4
32,9	4190	349	127	8,5	5,8	82,8	474	140,7	2,91	45,8	26,4
W310 x 143	18200	323	309	22,9	14,0	347	2150	138,2	112,4	728	78,5
107	13600	311	306	17,0	10,9	248	1595	134,9	81,2	531	77,2
74	9480	310	205	16,3	9,4	164,0	1058	131,6	23,4	228	49,8
60	7610	303	203	13,1	7,5	129,0	851	130,3	18,36	180,9	49,0
52	6650	317	167	13,2	7,6	118,6	748	133,4	10,20	122,2	39,1
44,5	5670	313	166	11,2	6,6	99,1	633	132,3	8,45	101,8	38,6
38,7	4940	310	165	9,7	5,8	84,9	548	131,3	7,20	87,3	38,4
32,7	4180	313	102	10,8	6,6	64,9	415	124,7	1,940	38,0	21,5
23,8	3040	305	101	6,7	5,6	42,9	281	118,6	1,174	23,2	19,63
W250 x 167	21200	289	265	31,8	19,2	298,0	2060	118,4	98,2	741	68,1
101	12900	264	257	19,6	11,9	164,0	1242	112,8	55,8	434	65,8
80	10200	256	255	15,6	9,4	126,1	965	111,0	42,8	336	65,0
67	8580	257	204	15,7	8,9	103,2	803	110,0	22,2	218	51,1
58	7420	252	203	13,5	8,0	87,0	690	108,5	18,73	184,5	50,3
49,1	6260	247	202	11,0	7,4	70,8	573	106,4	15,23	150,8	49,3
44,8	5700	266	148	13,0	7,6	70,8	532	111,3	6,95	83,9	34,8
32,7	4190	258	146	9,1	6,1	49,1	381	108,5	4,75	65,1	33,8
28,4	3630	260	102	10,0	6,4	40,1	308	105,2	1,786	35,2	22,2
22,3	2850	254	102	6,9	5,8	28,7	226	100,3	1,203	23,6	20,8
W200 x 86	11000	222	209	20,6	13,0	94,9	655	92,7	31,3	300	53,3
71	9100	216	206	17,4	10,2	76,6	709	91,7	25,3	246	52,8
59	7550	210	205	14,2	9,1	60,6	579	89,7	20,4	199,0	51,8
52	6650	206	204	12,6	7,9	52,9	514	89,2	17,73	173,8	51,6
46,1	5890	203	203	11,0	7,2	45,8	451	88,1	15,44	152,1	51,3
41,7	5320	205	166	11,8	7,2	40,8	398	87,6	9,03	106,8	41,1
35,9	4570	201	165	10,2	6,2	34,5	343	86,9	7,62	92,4	40,9

Dimensão nominal ¹	Área A, mm ²	Altura d, mm	Abas		Espes-sura da alma t _w , mm	Eixo X-X			Eixo Y-Y		
			Lar-gura b _f , mm	Es-pes-sura t _f , mm		I _x 10 ⁶ mm ⁴	W _x 10 ³ mm ³	r _x mm	I _y 10 ⁶ mm ⁴	W _y 10 ³ mm ³	r _y mm
31,3	3970	210	134	10,2	6,4	31,3	298	88,6	4,07	60,7	32,0
26,6	3390	207	133	8,4	5,8	25,8	249	87,1	3,32	49,9	31,2
22,5	2860	206	102	8,0	6,2	20,0	194,2	83,6	1,419	27,8	22,3
19,3	2480	203	102	6,5	5,8	16,48	162,4	81,5	1,136	22,3	21,4
W150 x 37,1	4740	162	154	11,6	8,1	22,2	274	68,6	7,12	92,5	38,6
29,8	3790	157	153	9,3	6,6	17,23	219	67,6	5,54	72,4	38,1
24,0	3060	160	102	10,3	6,6	13,36	167,0	66,0	1,844	38,2	24,6
18,0	2290	153	102	7,1	5,8	9,20	120,3	63,2	1,245	24,4	23,3
13,5	1730	150	100	5,5	4,3	6,83	91,1	62,7	0,916	18,32	23,0
W130 x 28,1	3590	131	128	10,9	6,9	10,91	166,6	55,1	3,80	59,4	32,5
23,8	3040	127	127	9,1	6,1	8,87	139,7	54,1	3,13	49,3	32,3
W100 x 19,3	2470	106	103	8,8	7,1	4,70	88,7	43,7	1,607	31,2	25,4

1 Os perfis de abas largas são designados pela letra W seguida da altura nominal em milímetros e da massa em quilogramas por metro.

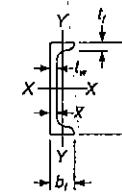
PERFIS I



Dimensão nominal ²	Área A, mm ²	Altura d, mm	Aba		Espesura da alma t _w , mm	Eixo X-X			Eixo Y-Y		
			Largura b _f , mm	Espesura t _f , mm		I _x 10 ⁶ mm ⁴	W _x 10 ³ mm ³	r _x mm	I _y 10 ⁶ mm ⁴	W _y 10 ³ mm ³	r _y mm
S610 x 149	18970	610	184	22,1	19,0	995	3260	229	19,90	216	32,3
134	17100	610	181	22,1	15,8	937	3070	234	18,69	207	33,0
118,9	15160	610	178	22,1	12,7	878	2880	241	17,61	197,9	34,0
S510 x 141	18000	508	183	23,3	20,3	670	2640	193,0	20,69	226	33,8
127	16130	508	179	23,3	16,6	633	2490	197,9	19,23	215	34,5
112	14260	508	162	20,1	16,3	533	2100	193,0	12,32	152,1	29,5
97,3	12390	508	159	20,1	12,7	491	1933	199,1	11,40	143,4	30,2
S460 x 104	13290	457	159	17,6	18,1	385	1685	170,4	10,03	126,2	27,4
81,4	10390	457	152	17,6	11,7	335	1466	179,6	8,66	113,9	29,0
S380 x 74	9480	381	143	15,8	14,0	202	1060	146,1	6,53	91,3	26,2
64	8130	381	140	15,8	10,4	186,1	977	151,1	5,99	85,6	27,2
S310 x 74	9480	305	139	16,8	17,4	127,0	833	115,6	6,53	94,0	26,2
60,7	6640	305	129	13,8	11,7	113,2	742	121,2	5,66	85,1	26,9
52	7740	305	133	16,8	10,9	95,3	825	119,9	4,11	63,7	24,9
47,3	6032	305	127	13,8	8,9	90,7	595	122,7	3,90	61,4	25,4
S250 x 52	6640	254	126	12,5	15,1	61,2	482	96,0	3,48	55,2	22,9
37,8	4806	254	118	12,5	7,9	51,6	405	103,4	2,83	48,0	24,2
S200 x 34	4368	203	106	10,8	11,2	27,0	266	78,7	1,794	33,8	20,3
27,4	3484	203	102	10,8	6,9	24,0	236	82,8	1,553	30,4	21,1
S180 x 30	3794	178	97	10,0	11,4	17,65	198,3	68,3	1,319	27,2	18,64
22,8	2890	178	92	10,0	6,4	15,28	171,7	72,6	1,099	23,9	19,45
S150 x 25,7	3271	152	90	9,1	11,8	10,95	144,1	57,9	0,961	21,4	17,15
18,6	2362	152	84	9,1	5,8	9,20	121,1	62,2	0,758	18,05	17,91
S130 x 22,0	2800	127	83	8,3	12,5	6,33	99,7	47,5	0,695	16,75	15,75
15	1884	127	76	8,3	5,3	5,12	80,6	52,1	0,508	13,37	16,33
S100 x 14,1	1800	102	70	7,4	8,3	2,83	55,5	39,6	0,376	10,74	14,45
11,5	1452	102	67	7,4	4,8	2,53	49,6	41,6	0,318	9,49	14,75
S75 x 11,2	1426	76	63	6,6	8,9	1,22	32,1	29,2	0,244	7,75	13,11
S75 x 8,5	1077	76	59	6,6	4,3	1,05	27,0	31,3	0,189	6,41	13,26

2 Os perfis I são designados pela letra S seguida da altura nominal em milímetros e da massa em quilogramas por metro.

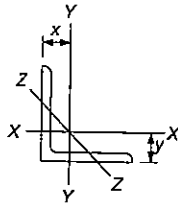
PERFIS C



Dimensão nominal ³	Área A, mm ²	Altura d, mm	Aba		Espesura da alma t _w , mm	Eixo X-X			Eixo Y-Y			
			Largura b _f , mm	Espesura t _f , mm		I _x 10 ⁶ mm ⁴	W _x 10 ³ mm ³	r _x mm	I _y 10 ⁶ mm ⁴	W _y 10 ³ mm ³	r _y mm	\bar{x} mm
C380 x 74	9480	381	94	16,5	18,2	168,2	883	133,1	4,58	62,1	22,0	20,3
60	7610	381	89	16,5	13,2	145,3	763	138,2	3,84	55,5	22,5	19,76
50,4	6426	381	86	16,5	10,2	131,1	688	142,7	3,38	51,2	23,0	19,99
C310 x 45	5690	305	80	12,7	13,0	67,4	442	109,0	2,14	34,0	19,38	17,12
37	4742	305	77	12,7	9,8	59,9	393	112,5	1,861	31,1	19,81	17,12
30,8	3929	305	74	12,7	7,2	53,7	352	117,1	1,615	28,7	20,29	17,73
C250 x 45	5690	254	76	11,1	17,1	42,9	338	86,9	1,640	27,6	16,99	16,48
37	4742	254	73	11,1	13,4	38,0	299	89,4	1,399	24,4	17,17	15,67
30	3794	254	69	11,1	9,6	32,8	258	93,0	1,170	21,8	17,55	15,39
22,8	2897	254	65	11,1	6,1	28,1	221	98,3	0,949	18,29	18,11	16,10
C230 x 30	3794	229	67	10,5	11,4	25,4	222	81,8	1,007	19,29	16,31	14,81
22	2845	229	63	10,5	7,2	21,2	185,2	86,4	0,803	16,69	16,79	14,88
19,9	2542	229	61	10,5	5,9	19,94	174,2	88,4	0,733	16,03	16,97	15,27
C200 x 27,9	3555	203	64	9,9	12,4	18,31	180,4	71,6	0,824	16,60	15,21	14,35
20,5	2606	203	59	9,9	7,7	15,03	148,1	75,9	0,637	14,17	15,62	14,05
17,1	2181	203	57	9,9	5,6	13,57	133,7	79,0	0,549	12,92	15,86	14,50
C180 x 22,0	2794	178	58	9,3	10,6	11,32	127,2	63,8	0,574	12,90	14,33	13,51
18,2	2323	178	55	9,3	8,0	10,07	113,2	66,0	0,467	11,69	14,50	13,34
14,6	1852	178	53	9,3	5,3	8,86	99,6	69,1	0,403	10,26	14,76	13,74
C150 x 18,3	2471	152	54	8,7	11,1	7,24	148,1	54,1	0,437	10,67	13,34	13,06
15,6	1994	152	51	8,7	8,0	6,33	133,3	56,4	0,360	9,40	13,44	12,70
12,2	1548	152	48	8,7	5,1	5,45	113,7	59,4	0,288	8,23	13,84	13,00
C130 x 13,4	1703	127	47	8,1	8,3	3,70	58,3	46,5	0,263	7,54	12,42	12,14
10,0	1271	127	44	8,1	4,8	3,12	49,1	49,5	0,199	6,28	12,52	12,29
C100 x 10,8	1374	102	43	7,5	8,2	1,911	37,5	37,3	0,180	5,74	11,43	11,66
8,0	1026	102	40	7,5	4,7	1,602	31,4	39,6	0,133	4,69	11,40	11,63
C75 x 8,9	1135	76	40	6,9	9,0	0,862	22,7	27,4	0,127	4,47	10,57	11,56
7,4	948	76	37	6,9	6,6	0,770	20,3	28,4	0,103	3,98	10,41	11,13
6,1	781	76	35	6,9	4,3	0,691	18,18	29,7	0,082	3,43	10,26	11,10

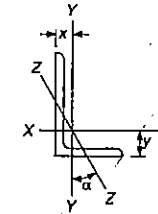
3 Os perfis C são designados pela letra C seguida da altura nominal em milímetros e da massa em quilogramas por metro.

CANTONEIRAS DE ABAS IGUAIS



Lados e espessura, mm	Massa por metro, kg/m	Área, mm ²	Eixo X-X e Eixo Y-Y				Eixo Z-Z r mm
			I_{xx} 10 ⁶ mm ⁴	W_{xx} 10 ³ mm ³	r mm	x ou y mm	
L203 x 203 x 25,4	75,9	9680	37,0	259	61,8	60,2	39,6
19,0	57,9	7360	29,0	200	62,8	57,9	40,1
12,7	39,3	5000	20,2	137,0	63,6	55,6	40,4
L152 x 152 x 25,4	55,7	7100	14,78	140,4	45,6	47,2	29,7
19,0	42,7	5445	11,74	109,1	46,4	45,2	29,7
15,9	36,0	4590	10,07	92,8	46,8	43,9	30,0
12,7	29,2	3710	8,28	75,5	47,2	42,7	30,0
9,5	22,2	2800	6,41	57,8	47,8	41,7	30,2
L127 x 127 x 19,0	35,1	4480	6,53	74,2	38,2	38,6	24,8
15,9	29,6	3780	5,66	63,3	38,7	37,6	24,8
12,7	24,1	3070	4,70	51,8	39,2	36,3	25,0
9,5	18,3	2330	3,64	39,7	39,5	35,3	25,1
L102 x 102 x 19,0	27,5	3510	3,19	46,0	30,1	32,3	19,76
15,9	23,4	2970	2,77	39,3	30,5	31,2	19,79
12,7	19,0	2420	2,31	32,3	30,9	30,0	19,86
9,5	14,6	1845	1,815	24,9	31,4	29,0	20,0
6,4	9,8	1252	1,265	17,21	31,8	27,7	20,2
L89 x 89 x 12,7	16,5	2100	1,515	24,4	26,9	26,9	17,35
9,5	12,6	1600	1,195	18,85	27,3	25,7	17,45
6,4	8,6	1090	0,837	13,01	27,7	24,6	17,63
L76 x 76 x 12,7	14,0	1774	0,924	17,53	22,8	23,7	14,83
9,5	10,7	1361	0,733	13,65	23,2	22,6	14,91
6,4	7,3	929	0,516	9,46	23,6	21,4	15,04
L64 x 64 x 12,7	11,4	1452	0,512	11,86	18,78	20,5	12,37
9,5	8,7	1116	0,410	8,28	19,17	19,35	12,37
6,4	6,1	768	0,293	6,46	19,53	18,21	12,47
4,8	4,6	581	0,228	4,97	19,81	17,63	12,57
L51 x 51 x 9,5	7,0	877	0,1994	5,75	15,08	16,15	9,88
6,4	4,7	605	0,1448	4,05	15,47	15,04	9,93
3,2	2,4	312	0,0791	2,15	15,92	13,87	10,11

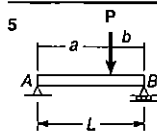
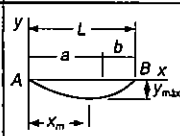
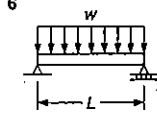
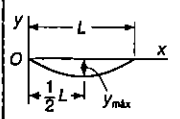
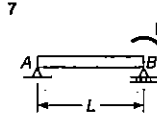
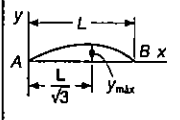
CANTONEIRAS DE ABAS DESIGUAIS

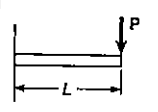
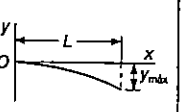
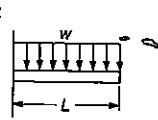
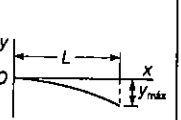
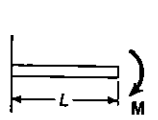
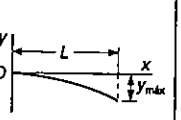
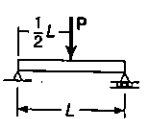
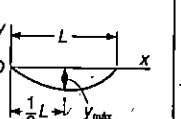


Lados e espessura, mm	Massa por metro, kg/m	Área, mm ²	Eixo X-X				Eixo Y-Y				Eixo Z-Z	
			I_{xx} 10 ⁶ mm ⁴	W_{xx} 10 ³ mm ³	r_x mm	y mm	I_{yy} 10 ⁶ mm ⁴	W_{yy} 10 ³ mm ³	r_y mm	x mm	r_z mm	tg α
L203 x 152 x 25,4	65,5	8390	33,6	247	63,3	67,3	16,15	146,2	43,9	41,9	32,5	0,543
19,0	50,1	6410	26,4	192	64,2	65,0	12,78	113,4	44,7	39,6	32,8	0,551
12,7	34,1	4350	18,44	131	65,1	63,7	9,03	78,5	45,6	37,3	33,0	0,558
L152 x 102 x 19,0	35,0	4480	10,20	102,4	47,7	52,8	3,61	49,7	28,4	27,4	21,8	0,428
12,7	24,0	3060	7,24	71,0	48,6	50,5	2,61	34,1	29,2	25,1	22,1	0,440
9,5	18,2	2330	5,62	54,4	49,1	49,3	2,04	26,2	29,6	23,9	22,3	0,446
L127 x 76 x 12,7	19,0	2420	3,93	47,7	40,3	44,5	1,074	18,85	21,1	19,05	16,46	0,357
9,5	14,5	1845	3,07	38,7	40,8	43,2	0,849	14,55	21,5	17,88	16,61	0,364
6,4	9,8	1252	2,13	25,1	41,2	42,2	0,599	10,06	21,9	16,69	16,84	0,371
L102 x 76 x 12,7	18,4	2100	2,10	31,0	31,6	33,8	1,007	18,35	21,9	21,0	16,23	0,543
9,5	12,6	1600	1,648	23,9	32,1	32,5	0,799	14,19	22,3	19,86	16,36	0,551
6,4	8,6	1090	1,153	16,39	32,5	31,5	0,566	9,82	22,8	18,69	16,54	0,558
L89 x 64 x 12,7	13,9	1774	1,349	23,1	27,6	30,5	0,566	12,45	17,88	17,91	13,56	0,486
9,5	10,7	1381	1,066	17,86	28,0	29,5	0,454	9,70	18,26	16,76	13,64	0,498
6,4	7,3	929	0,749	12,37	28,4	28,2	0,323	6,75	18,65	15,60	13,82	0,506
L76 x 51 x 12,7	11,5	1452	0,799	16,39	23,5	27,4	0,280	7,77	13,89	14,81	10,87	0,414
9,5	8,8	1116	0,637	12,80	23,9	26,4	0,226	6,08	14,20	13,69	10,92	0,428
6,4	6,1	768	0,454	8,88	24,3	25,2	0,1632	4,26	14,58	12,52	11,05	0,440
L64 x 51 x 9,5	7,9	1000	0,380	8,96	19,51	21,1	0,214	5,95	14,66	14,76	10,67	0,614
6,4	5,4	684	0,272	6,24	19,94	20,0	0,1548	4,16	15,04	13,64	10,77	0,626

Apêndice D

DEFORMAÇÃO DAS VIGAS

Tipos de viga e carregamento	Linha elástica	Flecha máxima	Rotação nos apoios	Equação da linha elástica
		Para $a > b$: $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ $x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EI}$	Para $x < a$: $y = \frac{Pb}{6EI} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$ Para $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EI}$
		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm \frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)$
		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$y = -\frac{M}{6EI} (x^3 - L^2x)$

Tipos de viga e carregamento	Linha elástica	Flecha máxima	Rotação nos apoios	Equação da linha elástica
		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$
		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI} x^2$
		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$= \frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \leq \frac{1}{2}L$: $y = -\frac{P}{48EI} (4x^3 - 3L^2x)$

Apêndice E

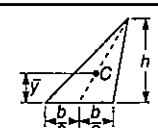
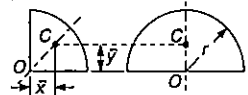
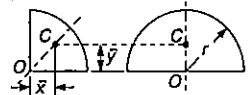
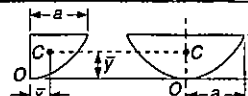
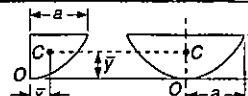
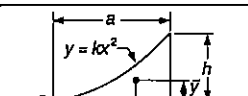
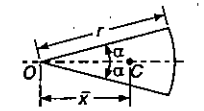
PRINCIPAIS UNIDADES SI USADAS NA MECÂNICA

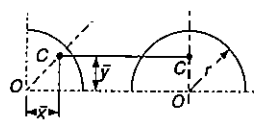
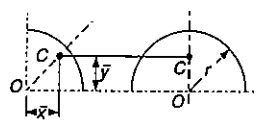
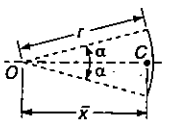
Grandeza	Nome	Símbolo	Expressão em Unidade SI
Aceleração	Metro por segundo quadrado	...	m/s ²
Ângulo Plano	Radiano	rad	1
Aceleração Angular	Radiano por segundo quadrado	...	rad/s ²
Velocidade Angular	Radiano por segundo	...	rad/s
Área	Metro quadrado	...	m ²
Densidade	Quilograma por metro cúbico	...	kg/m ³
Energia	Joule	J	N · m
Força	Newton	N	kg · m/s ²
Frequência	Hertz	Hz	s ⁻¹
Impulso	Newton por segundo	...	kg · m/s
Comprimento	Metro	m	2
Massa	Quilograma	kg	2
Momento de Força	Newton · metro	...	N · m
Potência	Watt	W	J/s
Pressão	Pascal	Pa	N/m ²
Tensão	Pascal	Pa	N/m ²
Tempo	Segundo	s	2
Velocidade	Metro por segundo	...	m/s
Volume (sólidos)	Metro cúbico	...	m ³
Volume (líquido)	Litro	ℓ	10 ⁻³ m ³
Trabalho	Joule	J	N · m

- 1 Unidade Suplementar (1 Revolução = 2 π rad = 360°).
- 2 Unidades SI de Base.

Apêndice F

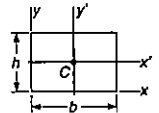
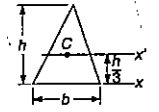
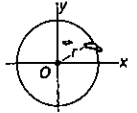
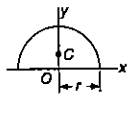
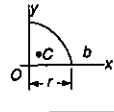
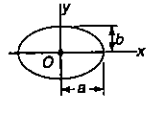
CENTRÓIDES DE FIGURAS PLANAS E LINHAS

Figuras planas		\bar{x}	\bar{y}	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quadrante		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parábola		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Linhas		\bar{x}	\bar{y}	Área
Quarto de circunferência		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semicircunferência		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr^2
Arco de circunferência		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2r\alpha$

Apêndice G

MOMENTOS DE INÉRCIA DE FIGURAS PLANAS

Retângulo		$I_x = \frac{1}{12} bh^3$ $I_y = \frac{1}{12} b^3 h$ $I_c = \frac{1}{36} bh^3$ $I_y' = \frac{1}{36} b^3 h$ $J_c = \frac{1}{36} bh(b^2 + h^2)$
Triângulo		$I_x = \frac{1}{36} bh^3$ $I_y = \frac{1}{12} bh^3$
Círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ $J_o = \frac{1}{2} \pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_o = \frac{1}{4} \pi r^4$
Quadrante		$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ $J_o = \frac{1}{8} \pi r^4$
Elipse		$I_x = \frac{1}{4} \pi ab^3$ $I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ $J_o = \frac{1}{4} \pi ab(a^2 + b^2)$

Apêndice H

UNIDADES USUAIS INGLESAS E EQUIVALENTES NO SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Grandeza	Sistema Inglês	Equivalente (SI)
Aceleração	ft/s ²	0,3048 m/s ²
	in/s ²	0,0254 m/s ²
Área	ft ²	0,0929 m ²
	in ²	645,2 mm ²
Energia	ft · lb	1,356 J
Força	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 kN
Impulso	lb · s	4,448 N·s
Comprimento	ft	0,3048 m
	in	25,40 mm
	mi	1,609 km
Massa	oz mass	28,35 g
	lb mass	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de uma força	lb · ft	1,356 N · m
	lb · in	0,1130 N · m
Momento de inércia		
	de uma área	in ⁴
de uma massa	lb · ft · s ²	1,356 kg · m ²
Potência	ft · lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W

Grandeza	Sistema Inglês	Equivalente (SI)
Pressão ou tensão	lb/ft ²	47,88 Pa
	lb/in ² (psi)	6,895 kPa
Velocidade	ft/s	0,3048 m/s
	in/s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volume, sólidos	ft ³	0,02832 m ³
	in ³	16,38 cm ³
Líquidos	gal	3,785 L
	qt	0,9464 L
Trabalho	ft·lb	1,356 J

RESPOSTAS AOS PRINCIPAIS PROBLEMAS

CAPÍTULO 1

- 1.02 $\alpha_{AB} = 42,4 \text{ MPa}$; $\alpha_{BC} = 35,7 \text{ MPa}$
- 1.03 22,5 kN
- 1.06 23,4 MPa
- 1.07 28,3 mm
- 1.09 62,7 kN
- 1.10 33,1 kN
- 1.13 $\alpha_{BE} = -18,75 \text{ MPa}$ $\alpha_{CF} = +75,0 \text{ MPa}$
- 1.14 (a) 28,8 MPa (b) -48,8 MPa
- 1.19 700 mm²
- 1.20 $\alpha_{AD} = +158,4 \text{ MPa}$
- 1.23 $\alpha_{CD} = -5,07 \text{ MPa}$
- 1.24 $\alpha_{CD} = +195,3 \text{ MPa}$
- 1.27 67,9 kN
- 1.26 $d = 42,3 \text{ mm}$

- 1.29 (a) 48,7 MPa (b) 53,6 MPa (c) 71,4 MPa
- 1.30 (a) 126,7 MPa (b) 139,3 MPa (c) 185,7 MPa
- 1.33 (a) 94,1 MPa (b) 44,3 MPa
- 1.34 (a) 3,44 kN $\angle 60^\circ$ (b) 73,3 MPa (c) 34,5 MPa
- 1.38 (a) 16,58 kN (b) 242 kPa
- 1.41 (a) 29,2 mm (b) 32,7 mm
- 1.42 (a) 3,00 (b) 31,3
- 1.45 146,8 mm
- 1.46 3,40
- 1.50 1,683 kN \downarrow
- 1.51 2,06 kN
- 1.53 2,12 kN
- 1.56 (a) 4,67 (cisalhamento) (b) 3,19 (cisalhamento)
(c) 2,52 (tração)
- 1.57 (a) C.S. = $\tau_{ij} ab/P \text{ sen } \alpha \text{ cos } \alpha$
(b) $\text{tg } \alpha > \alpha_{ij}/\tau_{ij}$
- 1.58 2,89
- 1.60 (a) 3,31 (b) 26,7 MPa
- 1.61 (a) 11 kN (b) 22,9 MPa
- 1.62 (a) 39,7 MPa (b) 34,7 MPa (c) 31,2 MPa
- 1.63 (a) 6,15 mm (b) 33,8 MPa

CAPÍTULO 2

- 2.02 (a) $d = 6,91 \text{ mm}$ (b) 160 MPa
- 2.03 (a) 2,45 kN (b) 50,0 mm

- 2.06 (a) $L = 55,0 \text{ m}$ (b) 3,46
- 2.10 (a) $-0,1549 \text{ mm}$ (b) $0,1019 \text{ mm}$
- 2.11 (a) $44,0 \text{ kN}$ (b) $0,1222 \text{ mm}$
- 2.14 (a) $0,795 \text{ mm}$ (b) $0,484 \text{ mm}$
- 2.16 (a) $\sigma_t = +67,9 \text{ MPa}$; $\sigma_b = -55,6 \text{ MPa}$
(b) $\delta_t = +0,2425 \text{ mm}$; $\delta_b = -0,1325 \text{ mm}$
- 2.17 (a) $\sigma_t = +70,7 \text{ MPa}$; $\sigma_b = -57,9 \text{ MPa}$
(b) $\delta_t = 0,1683 \text{ mm}$; $\delta_b = -0,2067 \text{ mm}$
- 2.20 $44,0 \text{ kN}$
- 2.21 $1,89 \text{ kN}$
- 2.24 (a) $1,222 \text{ mm}$ (b) $+1,910 \text{ mm}$
- 2.25 (a) $\delta_E = 80,4 \mu\text{m} \uparrow$ (b) $\delta_F = 209 \mu\text{m} \downarrow$ (c) $\delta_G = 390 \mu\text{m} \downarrow$
- 2.27 (a) e (b) $\rho g L^2 / 2E$
- 2.28 $\rho g h^2 / 4E \downarrow$
- 2.29 $\rho g h^2 / 6E \downarrow$
- 2.30 (a) $Ph/nabE \downarrow$ (b) Idem
- 2.34 (a) $-57,1 \text{ MPa}$ (b) $-85,7 \text{ MPa}$
- 2.35 $\delta = -0,306 \text{ mm}$
- 2.38 (a) $R_A = 62,8 \text{ kN} \leftarrow$; $R_E = 37,2 \text{ kN} \leftarrow$; (b) $\delta_C = 46,3 \mu\text{m}$
- 2.39 (a) $R_A = 45,5 \text{ kN}$; $R_E = 54,5 \text{ kN}$ (b) $\delta_C = 48,8 \mu\text{m}$
- 2.44 (a) $R_A = 78,0 \text{ kN}$; $R_E = 22,0 \text{ kN}$ (b) $\delta_C = 0,1228 \mu\text{m}$
- 2.46 (a) $\Delta T_A = \Delta T_D = 230 \text{ N}$; $\Delta T_B = \Delta T_C = 770 \text{ N}$ (b) $\delta = 0,1839 \text{ mm}$
- 2.49 (a) $T_{CE} = 8,32 \text{ kN}$; $T_{AD} = 6,24 \text{ kN}$ (b) $\delta_A = 2,76 \text{ mm}$
- 2.51 (a) $T_A = P/7$; $T_B = 2P/7$; $T_D = 4P/7$

- 2.54 $\sigma_{casca} = -47,0 \text{ MPa}$
- 2.55 $\sigma_{casca} = -6,72 \text{ MPa}$
- 2.58 (a) $\sigma_{AB} = -202 \text{ MPa}$; $\sigma_{BC} = -72,6 \text{ MPa}$ (b) $106 \mu\text{m} \uparrow$
- 2.61 (a) $\sigma_{A1} = -122,8 \text{ MPa}$ (b) $\sigma_{AC} = +108,5 \text{ MPa}$
- 2.62 (a) $\sigma_{AC} = -101,3 \text{ MPa}$; $\sigma_{CE} = -180,2 \text{ MPa}$; (b) $\delta_{AC} = +128,8 \mu\text{m}$
- 2.65 (a) $\sigma_{AD} = +43,8 \text{ MPa}$ (b) $\sigma_{CE} = +58,4 \text{ MPa}$
- 2.67 $0,455$; $E = 205 \text{ MPa}$; $G = 70,3 \text{ MPa}$
- 2.68 $0,3989$
- 2.70 (a) $+13,61 \mu\text{m}$ (b) $+3,22 \mu\text{m}$ (c) $+11,90 \mu\text{m}$
- 2.71 $-0,0519\%$
- 2.74 (a) = (b) = $(1 - \nu) \epsilon_x / 2$
- 2.76 $\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) / (1 - \nu^2)$ $\sigma_y = E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) / (1 - \nu^2)$
$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$
- 2.80 (a) $-34,3 \mu\text{m}$ (b) $-25,71 \mu\text{m}$ (c) -1163 mm^3
- 2.81 (a) $\rho_a = 225 \text{ MPa}$; $\Delta h = -343 \mu\text{m}$ $\Delta d = +90 \mu\text{m}$
(b) $\rho_b = 112,5 \text{ MPa}$; $\Delta h = +120 \mu\text{m}$ $\Delta d = -83,6 \mu\text{m}$
- 2.84 $\delta = 1,190 \text{ mm} \downarrow$
- 2.85 302 kN
- 2.88 $16,46 \text{ kN}$
- 2.92 $20,3 \text{ kN}$
- 2.93 (a) 296 MPa (b) 202 MPa
- 2.96 (a) $P = 97,3 \text{ kN}$; $\delta = 0,834 \text{ mm}$ (b) $P = 180 \text{ kN}$; $\delta = 1,714 \text{ mm}$
- 2.97 $179,9 \text{ MPa}$
- 2.102 $P_m = 176,7 \text{ kN}$; $\delta_m = 3,84 \text{ mm}$

- 2.103 $P_m = 176,7 \text{ kN}$; $\delta_p = 3,16 \text{ mm}$
- 2.106 (a) $P_m = 316 \text{ kN}$; $(\sigma_m)_{ad} = 250 \text{ MPa}$; $(\sigma_m)_{ad} = 414 \text{ MPa}$; $\delta_p = 0,1476 \text{ mm}$
 (b) $P_m = 426 \text{ kN}$; $(\sigma_m)_{ad} = 250 \text{ MPa}$; $(\sigma_m)_{ad} = 690 \text{ MPa}$; $\delta_p = 0,603 \text{ mm}$
- 2.110 (a) $(\sigma_{res})_{ad} = -65,6 \text{ MPa}$; $(\sigma_{res})_{at} = +98,4 \text{ MPa}$
 (b) $(\sigma_{res})_{ad} = -176 \text{ MPa}$; $(\sigma_{res})_{at} = +264 \text{ MPa}$
- 2.114 (a) $\sigma_{BD} = -250 \text{ MPa}$; $\sigma_{CE} = +233 \text{ MPa}$; $Q = 204 \text{ kN}$
 (b) $(\delta_p)_B = +0,0377 \text{ mm}$; $(\sigma_{res})_{BD} = +17,44 \text{ MPa}$; $(\sigma_{res})_{CE} = +10,47 \text{ MPa}$
- 2.118 (a) $\sigma_{CB} = -250 \text{ MPa}$; $\sigma_{AC} = -150 \text{ MPa}$ (b) $\delta_C = 106,9 \mu\text{m} \rightarrow$
- 2.119 (a) $\sigma_{AC} = +56,5 \text{ MPa}$; $\sigma_{CB} = +94,1 \text{ MPa}$ (b) $\delta_C = 42,4 \mu\text{m} \rightarrow$
- 2.122 (a) $F_{CD} = 8,55 \text{ kN}$; $\delta_C = 1,815 \text{ mm} \leftarrow$
- 2.124 (a) $40 \mu\text{m}$ (b) -40 MPa
- 2.128 $\Delta T_A = \Delta T_B = 397 \text{ N}$; $\Delta T_C = 105,3 \text{ N}$
- 2.129 (a) $m = A\sigma_e/\mu g$; (b) $K = AE/L$

CAPÍTULO 3

- 3.02 (a) $5,17 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (b) $87,2 \text{ MPa}$
- 3.03 (a) $71,3 \text{ MPa}$ (b) $6,25\%$
- 3.05 (a) $75,5 \text{ MPa}$ (b) $63,7 \text{ MPa}$
- 3.08 (a) ocorre para o eixo CD; (b) $85,9 \text{ MPa}$
- 3.10 $T = 477 \text{ Nm}$
- 3.14 $\tau_{AB} = 47,7 \text{ MPa}$; $\tau_{CD} = 35,4 \text{ MPa}$
- 3.17 (a) $20,1 \text{ mm}$; (b) $26,9 \text{ mm}$; (c) $36,6 \text{ mm}$
- 3.18 (a) $\tau_{AB} = 55 \text{ MPa}$; (b) $\tau_{CD} = 45,3 \text{ MPa}$; (c) $\tau_{EF} = 47,7 \text{ MPa}$
- 3.22 (a) $T/W = \tau_m (c_1^2 + c_2^2)/2\rho g c_2$

- (b) $T/W = (T/W)_0 [1 + c_1/c_2]^2]$
- 3.23 (a) $T = 8,68 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (b) $\phi_s = 7,80^\circ$
- 3.24 (a) $3,74^\circ$ (b) $3,79^\circ$
- 3.26 $48,4 \text{ MPa}$
- 3.29 (a) $B/C = 1,87^\circ$ (b) $B/C = 4,14^\circ$
- 3.31 $\phi_{AD} = 1,140^\circ$
- 3.33 $\phi_A = 5,85^\circ$
- 3.34 $\phi_A = 5,19^\circ$
- 3.36 (a) $T = 410 \text{ N} \cdot \text{m}$ (b) $\phi_A = 4,00^\circ$
- 3.40 (a) $d = 22,5 \text{ mm}$ (b) $d = 29,0 \text{ mm}$
- 3.42 (a) $17,47 \text{ MPa}$; (b) $27,6 \text{ MPa}$; (c) $2,05^\circ$
- 3.43 (a) $687 \text{ N} \cdot \text{m}$; (b) $\phi = 2,35^\circ$
- 3.47 (a) $M_A = 9,68 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $M_c = 2,82 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 (b) $\tau_{AB} = 25,2 \text{ MPa}$; (c) $\tau_{BC} = 34,1 \text{ MPa}$
- 3.48 (a) $M_A = 11,38 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $M_c = 1,12 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 (b) $\tau_{AB} = 29,7 \text{ MPa}$ (c) $\tau_{BC} = 13,53 \text{ MPa}$
- 3.51 (a) $\tau_{AB} = 43,1 \text{ MPa}$ (b) $\tau_{CD} = 48,5 \text{ MPa}$
- 3.52 $T = 4,12 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 3.55 (a) $T_s/T_h = \sqrt{1 - n^2}/(1 + n^2)$
 (b) $T_s/T_h = (1 - n^2)/(1 + n^2)$
- 3.56 $\phi_A = 7TL/12\pi Gc^4$
- 3.59 (a) $46,9 \text{ MPa}$; (b) $23,5 \text{ MPa}$
- 3.60 (a) $d = 20,1 \text{ mm}$ (b) $d = 15,94 \text{ mm}$

- 3.62 (a) 18,76 kN; (b) $\tau_{\text{máx}} = 24,2 \text{ MPa}$
- 3.63 (a) 51,7 kN; (b) $\phi = 6,20^\circ$
- 3.66 (a) 31,1 MPa; (b) 51,9 MPa
- 3.67 (a) 20,1 mm (b) 23,8 mm
- 3.69 $d = 20,4 \text{ mm}$
- 3.70 $P = 50,0 \text{ kW}$
- 3.74 $r = 1,7 \text{ mm}$
- 3.75 $f = 440 \text{ rpm}$
- 3.78 (a) 993 N · m (b) 1015 N · m
- 3.80 (a) 2,47°; (b) 4,34°
- 3.82 (a) 976 N · m; (b) 8,63 mm
- 3.84 (a) $T_c = 5,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\phi_c = 17,98^\circ$
(b) $T = 7,31 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\phi = 27,0^\circ$
- 3.85 (a) $\phi_f = 43,2^\circ$; (b) $T_f = 7,61 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 3.88 $T = \frac{4}{3} T_c (1 - \rho_c^3/4c^3)$
- 3.89 (a) $T = 1,89 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (b) $\phi = 17,19^\circ$
- 3.92 (a) $T = 3,40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (b) $\tau_m = 129 \text{ MPa}$
- 3.94 (a) $T = 3,41 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (b) $\tau_m = 128,7 \text{ MPa}$
- 3.95 (a) $\tau_{\text{res}} = 41,5 \text{ MPa}$ (b) $\tau_{\text{res}} = 39,9 \text{ MPa}$
- 3.96 (a) $\tau_{\text{res}} = 65,9 \text{ MPa}$ (b) $\tau_{\text{res}} = 44,8 \text{ MPa}$
- 3.99 $\phi_p = 4,42^\circ$
- 3.100 $\phi_p = 9,42^\circ$
- 3.103 (a) $(\tau_{\text{res}})_{\text{máx}} = 68 \text{ MPa}$ (na superfície interna) (b) $\phi_p = 20,2^\circ$
- 3.106 $T_1 = 531 \text{ N} \cdot \text{m}$; $T_2 = 769 \text{ N} \cdot \text{m}$

- 3.108 (a) $\tau_{\text{máx}} = 40,1 \text{ MPa}$; $\phi = 0,653^\circ$
(b) $\tau_{\text{máx}} = 50,9 \text{ MPa}$; $\phi = 0,917^\circ$
- 3.109 (a) $T = 2,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\phi = 0,815^\circ$
(b) $T = 1,770 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\phi = 0,901^\circ$
- 3.112 (a) $b = 29,8 \text{ mm}$ (b) $b = 30,4 \text{ mm}$ (c) $b = 27,6 \text{ mm}$
- 3.115 (a) $L = 368 \text{ mm}$; (b) 272 mm; (c) $L = 413 \text{ mm}$
- 3.116 $\tau_A/\tau_B = 0,737$
- 3.118 $\phi_A/\phi_B = 1,198$
- 3.120 (a) $T = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$ (b) $\phi = 8,79^\circ$
- 3.123 (a) $T = 1009 \text{ N} \cdot \text{m}$ (b) $\phi = 9,09^\circ$
- 3.126 $T = 5,44 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 3.127 $\tau = 44,4 \text{ MPa}$
- 3.128 (a) $T = T_0 (1 - e/t)$
(b) para: $e = 0,1$; 10%; $e = 0,5$; 50%; $e = 0,9$; 90%
- 3.129 $\phi = 3,78^\circ$
- 3.130 $\phi = 1,55^\circ$
- 3.132 $\tau_2/\tau_1 = 3c/t$; $\phi_2/\phi_1 = 3(c/t)^2$
- 3.136 $\phi_A = 6,18^\circ$
- 3.137 (a) $\tau_{AB} = 87,3 \text{ MPa}$; $\tau_{BC} = 56,6 \text{ MPa}$; (c) $\tau_{CD} = 70,5 \text{ MPa}$
- 3.138 (a) $f = 953 \text{ rpm}$ (b) $f = 1647 \text{ rpm}$
- 3.141 (a) $\phi_A = 35,8^\circ$; (b) $\phi_E = 28,3^\circ$
- 3.144 (a) $T = 2,36 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $\tau_m = \tau_c = 150 \text{ MPa}$; (c) $\phi = 17,86^\circ$
- 3.145 (a) $(\tau_{\text{res}})_{\text{máx}} = 37,8 \text{ MPa}$ (na superfície do eixo) (b) $\phi_p = 3,88^\circ$

CAPÍTULO 4

- 4.01 (a) -61,1 MPa (b) 91,7 MPa
- 4.04 $M = 129,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.05 $M = 34,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.08 +73,2 MPa; -102,4 MPa
- 4.09 $\sigma_{i, \text{máx}} = +121,6 \text{ MPa}$ $\sigma_{\text{máx}} = -143,0 \text{ MPa}$
- 4.14 39,6 kN
- 4.15 42,6 kN
- 4.18 $M = 177,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.19 $M = 20,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.20 (a) 83 MPa; 90,4 m (b) 138,3 MPa; 32,5 m
- 4.23 (a) 965 MPa; (b) $M = 205 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4.24 (a) 0,602 mm (b) 0,203 N · m
- 4.26 (a) $d/b = \sqrt{2}$ (b) $d/b = \sqrt{3}$
- 4.28 $k = 0,950$
- 4.29 (a) $0,768 h_0 < h < h_0$ (b) $h = 8/9 h_0$; $k = 0,950$
- 4.30 (a) 46,4 m (b) 154,7 m (c) $7,755 \times 10^{-4} \text{ rad}$
- 4.33 (a) +16,55 μm (b) -9,65 μm
- 4.34 $(J_y)_{\text{máx}} = -(c/2\rho)(J_x)_{\text{máx}}$
- 4.35 $M = 3,08 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.36 $M = 2,22 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.37 $M = 1,933 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.40 (a) 66,2 MPa (b) -112,4 MPa
- 4.41 (a) -56,9 MPa (b) 111,9 MPa
- 4.46 $M = 79,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- 4.47 (a) 158,8 MPa (b) 13,05 MPa
- 4.48 (a) 156,8 MPa (b) -11,23 MPa
- 4.51 $\rho = 43,7 \text{ m}$
- 4.52 $\rho = 39,8 \text{ m}$
- 4.55 (a) 62,3 MPa (b) 62,3 MPa
(c) 62,3 MPa (d) 33,7 m
- 4.56 (a) 80,2 MPa (b) 60,1 MPa
(c) 13,37 MPa (d) 52,4 m
- 4.59 (a) 8,89 MPa (b) -12,58 MPa
- 4.63 (a) 151 MPa (b) 101 MPa
- 4.64 (a) 310 N · m (b) 390 N · m
- 4.65 (a) 1830 N · m (b) 1400 N · m
- 4.66 (a) 53 MPa (b) 95 MPa
- 4.70 (a) 2,40 kN · m (b) 341 kN · m
- 4.71 (a) 1,778 kN · m (b) 2,60 kN · m
- 4.74 (a) 19,44 mm (b) 7,78 m
- 4.75 (a) 8,83 mm (b) 3,53 m
- 4.78 $M_e = 20,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\rho = 29,3 \text{ m}$;
 $M = 26,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\rho = 16 \text{ m}$
- 4.79 $M_e = 13,36 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $\rho = 29,3 \text{ m}$;
 $M = 18,92 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\rho = 16 \text{ m}$
- 4.82 (a) 28,5 kN · m (b) 1,385
- 4.83 (a) 22,3 kN · m (b) 1,664
- 4.86 $M_p = 6,09 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.87 $M_p = 28,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- 4.88 $M_p = 759 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4.89 $M_p = 1555 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4.92 (a) para $y = 24 \text{ mm}$; $\sigma = -73,3 \text{ MPa}$
(b) para $y = 44 \text{ mm}$; $\sigma = +115,6 \text{ MPa}$
- 4.93 (a) para $y = 24 \text{ mm}$; $\sigma = -27,7 \text{ MPa}$
(b) para $y = 44 \text{ mm}$; $\sigma = +199,3 \text{ MPa}$
- 4.96 (a) $+92,1 \text{ MPa}$; $-86,1 \text{ MPa}$
(b) $y = \pm 33,7 \text{ mm}$
(c) $\rho = 55,7 \text{ MPa}$
- 4.98 (a) $P = 0,707 \rho_e$; (b) $P_r = 6,09 \rho_e$
- 4.100 $\sigma_e = 292 \text{ MPa}$; esp. núcleo elástico = $7,01 \text{ mm}$
- 4.102 $\rho = 5,54 \text{ m}$; $M = 11,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.103 $\sigma_m = 275 \text{ MPa}$; $M = 13,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.106 $\sigma_m = (1 + 2n) Mc/3n I$
- 4.107 $\sigma_m = 7 Mc/9I$
- 4.109 (a) $-4,17 \text{ MPa}$ (b) $8,33 \text{ MPa}$ (c) $16,67 \text{ MPa}$
- 4.112 (a) $0,926 \text{ MPa}$ (b) $-14,81 \text{ MPa}$
- 4.113 (a) $1,852 \text{ MPa}$ (b) $-13,87 \text{ MPa}$
- 4.117 $P = 13,95 \text{ kN}$
- 4.118 $134,3 \text{ kN} \leq P \leq 230 \text{ kN}$
- 4.119 $174,2 \text{ kN} \leq P \leq 212 \text{ kN}$
- 4.120 (a) $47,6 \text{ MPa}$ (b) $49,9 \text{ MPa}$ (c) $9,80 \text{ mm}$
- 4.121 (a) $38,7 \text{ MPa}$ (b) $46,9 \text{ MPa}$ (c) $9,04 \text{ mm}$
- 4.125 $\sigma_A = 3\sigma_m(1 - 2\alpha)$; $\sigma_B = 3\sigma_m(4\alpha - 1)$

- 4.126 $P = 106,1 \text{ kN}$
- 4.127 (a) 1260 kN (b) 966 kN
- 4.130 $P = 990 \text{ kN}$; $\alpha = 54,5 \text{ mm}$
- 4.131 $P = 180 \text{ kN}$; $\alpha = 15 \text{ mm}$
- 4.134 (a) 90 mm (b) 40 MPa
- 4.135 $36,3 \text{ mm} \leq d \leq 53,7 \text{ mm}$ e $d \geq 186,3 \text{ mm}$
- 4.137 (a) $-2,80 \text{ MPa}$ (b) $0,452 \text{ MPa}$ (c) $42,1^\circ$
- 4.138 (a) $115,2 \text{ MPa}$ (b) $-76,4 \text{ MPa}$ (c) $79,8^\circ$
- 4.140 (a) $-29,3 \text{ MPa}$ (b) -144 MPa (c) $41,5^\circ$
- 4.143 (a) $53,9^\circ$ (b) 107 MPa
- 4.144 (a) $22,9^\circ$ (b) $92,0 \text{ MPa}$
- 4.147 (a) $37,5^\circ$ (b) $50,2 \text{ MPa}$
- 4.148 $\sigma_A = 103,3 \text{ MPa}$
- 4.151 $\sigma_A = -15,32 \text{ MPa}$
- 4.154 (a) $9,23 \text{ MPa}$ (b) $-11,92$ (c) $69,8 \text{ mm de } A$
- 4.155 (a) 58° ou 238°
(b) $\sigma_A = -28,7 \text{ MPa}$; $\sigma_B = 1,805 \text{ MPa}$; $\sigma_D = 13,73 \text{ MPa}$
- 4.158 $31,2 \text{ mm}$
- 4.159 $44,8 \text{ mm}$
- 4.163 $M_0 = 916 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4.164 $M_0 = 3,04 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4.173 (a) $-69,4 \text{ MPa}$ (b) $82,6 \text{ MPa}$
- 4.174 $\sigma_A = -77 \text{ MPa}$; $\sigma_B = 44,2 \text{ MPa}$
- 4.180 $P = 4,37 \text{ kN}$

- 4.181 (a) $60,7^\circ$ (b) 40,5 MPa
 4.182 (a) - 104,1 MPa (b) 92,3 MPa
 4.183 (a) - 172,4 MPa (b) 56,7 MPa
 4.184 (a) - 73,7 MPa (b) 56,7 MPa
 4.185 (a) - 131,5 MPa (b) 34,7 MPa
 4.190 $\sigma_m = 56,4$ MPa
 4.191 $\sigma_m = 50,4$ MPa
 4.192 (a) 58,4 MPa (b) - 59,5 MPa
 4.193 (a) 35,3 MPa (b) - 31,6 MPa
 4.199 (a) $1,14 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (b) $1,07 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (c) $1,01 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 4.202 (a) 432 kN (b) $z = 6,00 \text{ mm}; y = 1,60 \text{ mm}$
 4.205 (a) - 82,4 MPa (b) 36,6 MPa
 4.206 $M = 9,86 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 4.207 $M = 8,97 \text{ N} \cdot \text{m}$

CAPÍTULO 5

- 5.04 $V = 738 \text{ N}$
 5.05 $V = 747 \text{ N}$
 5.06 $V = 193,3 \text{ kN}$
 5.07 $V = 217 \text{ kN}$
 5.12 (a) 140,9 MPa (b) 13,01 MPa (c) 17,63 MPa
 5.13 (a) 245 MPa (b) 8,15 MPa (c) 8,97 MPa
 5.14 (a) 146,6 MPa (b) 4,38 MPa
 5.15 (a) 110,3 MPa (b) 8,38 MPa
 5.18 210 kN

- 5.19 (a) 206 kN (b) 195,4 kN
 5.23 (a) 31,0 MPa (b) 23,2 MPa
 5.24 $\tau_m = 32,7$ MPa
 5.26 $F = 327 \text{ N}$
 5.29 (a) 379 kPa (b) zero
 5.34 (a) 4,55 MPa (b) 3,93 MPa
 5.35 (a) 413 mm (b) $\tau_a = \tau_b = 3,98$ MPa
 5.37 $\tau_a = 33,7$ MPa; $\tau_b = 75$ MPa; $\tau_c = 43,5$ MPa
 5.38 $\tau_a = \tau_m = 75$ MPa; $\tau_b = 15,13$ MPa
 5.40 83,3 MPa
 5.41 49,5 MPa
 5.45 62,2 MPa
 5.46 $\tau_a = 23,2$ MPa; $\tau_m = 35,2$ MPa
 5.47 $\tau_a = 34,6$ MPa; $\tau_b = 46,9$ MPa; $\tau_c = 66,1$ MPa; $\tau_d = 67,4$ MPa
 5.48 $\tau_a = 40,9$ MPa; $\tau_b = 49,6$ MPa; $\tau_c = 57,8$ MPa; $\tau_d = 58,7$ MPa
 5.51 $\tau_a = V \text{ sen } \theta / \pi r_m t$
 5.55 (a) 16,56 MPa; (b) 16,63 MPa
 5.56 (a) 10,90 MPa; (b) 18,26 MPa
 5.60 (a) $\sigma = -129,7$ MPa; $\tau = 0$
 (b) $\sigma = -8,94$ MPa; $\tau = 6,71$ MPa
 (c) $\sigma = +111,8$ MPa; $\tau = 0$
 5.64 (a) $\sigma = -212$ MPa; $\tau = 0$
 (b) $\sigma = -24,0$ MPa; $\tau = 17,44$ MPa
 5.68 (a) $\sigma = +79,6$ MPa; $\tau = 7,96$ MPa
 (b) $\sigma = 0$; $\tau = 13,26$ MPa

- 5.70 $\sigma = -57,9 \text{ MPa}; \quad \tau = 4,17 \text{ MPa}$
- 5.76 (a) $\sigma = +18,39 \text{ MPa}; \quad \tau = 391 \text{ kPa}$
 (b) $\sigma = +21,3 \text{ MPa}; \quad \tau = 293 \text{ kPa}$
 (c) $\sigma = +24,1 \text{ MPa}; \quad \tau = 0$
- 5.77 (a) $\sigma_a = 7,89 \text{ MPa}; \quad \tau_a = 391 \text{ kPa}$
 (b) $\sigma_b = -5,11 \text{ MPa}; \quad \tau_b = 293 \text{ kPa}$
 (c) $\sigma_c = -2,25 \text{ MPa}; \quad \tau_c = 0$
- 5.80 (a) $\sigma = -115,9 \text{ MPa}; \quad \tau = 0$
 (b) $\sigma = -39,4 \text{ MPa}; \quad \tau = 2,62 \text{ MPa}$
- 5.81 (a) $\sigma_c = -10,19 \text{ MPa}; \quad \tau_c = 22,2 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_d = -30,7 \text{ MPa}; \quad \tau_d = 0$
- 5.88 (a) $-13,22 \text{ MPa}; \quad (b) 17,87 \text{ MPa}$
- 5.89 (a) $9,08 \text{ MPa}; \quad (b) 137,3 \text{ MPa}$
- 5.92 (a) $+7,50 \text{ MPa}; \quad (b) +11,25 \text{ MPa}; \quad (c) 56,3^\circ; 13,52 \text{ MPa}$
- 5.94 (a) $97,1 \text{ MPa}; \quad (b) 85,5 \text{ MPa}; \quad (c) 30,9 \text{ MPa}$
- 5.97 $\tau_a = 12,20 \text{ MPa}$
- 5.100 $e = (b^2 - a^2)/2(a + b + h/6)$
- 5.101 $\tau_m = 31,11 \text{ MPa}; \quad e = 66,7 \text{ mm}$
- 5.104 (a) $e = 23,2 \text{ mm}$
 (b) $\tau = 12,36 \text{ MPa}$ em B;
 $\tau = 25,2 \text{ MPa}$ no ponto médio de AG
- 5.106 (a) $e = 9,12 \text{ mm}$
 (b) $\tau = 50,6 \text{ MPa}$ em A;
 $\tau = 88,6 \text{ MPa}$ no ponto médio de AH

- 5.109 $10,91 \text{ mm}$
- 5.110 $62,1 \text{ mm}$
- 5.112 $e = 0,1443 a$
- 5.113 $e = 4a/\pi$
- 5.115 40 mm
- 5.119 $16,93 \text{ mm}$
- 5.120 (a) $144,6 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad (b) 65,9 \text{ MPa}$
- 5.121 (a) $144,6 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad (b) 106,6 \text{ MPa}$
- 5.126 (a) haste vertical $y = 2a/5; \quad \tau = 27P/20 at$
 haste horizontal $z = 2a/3; \quad \tau = P/4 at$
- 5.128 (a) $z = 0,337 a; \quad = 1,012 P/at$
 $y = 0,495 a; \quad = 0,0221 P/at$
- 5.130 $\tau = (P/ta^3)(a^2 - 2ay + 0,75y^2)$
- 5.133 $y_a = 2b/(4 + \beta)$
- 5.136 $\tau = (P/ta^3)(0,429 a^2 + 1,288ay - 1,717y^2)$
- 5.138 $\tau = (P/ta^3)(-0,215 a^2 + 0,644x^2)$
- 5.139 (a) $210 \text{ kN}; \quad (b) 153,1 \text{ kN}; \quad (c) 181,6 \text{ kN}$
- 5.142 $39,5 \text{ MPa}$
- 5.143 $23,7 \text{ MPa}$
- 5.148 (a) $\sigma = +20,4 \text{ MPa}; \quad \tau = 14,34 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma = -21,5 \text{ MPa}; \quad \tau = 19,98 \text{ MPa}$
- 5.150 (a) $e = 50,6 \text{ mm}$
 (b) $\tau = 0,791 \text{ MPa}$ em B;
 $\tau = 2,61 \text{ MPa}$ no ponto médio de DF

CAPÍTULO 6

- 6.01 $\sigma = +20,6 \text{ MPa}; \quad \tau = 25,7 \text{ MPa} \angle 20^\circ$
- 6.02 $\sigma = -6,07 \text{ MPa}; \quad \tau = 24,9 \text{ MPa} \angle 50^\circ$
- 6.05 (a) $-13,28^\circ; \quad +76,7^\circ$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 65,9 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -45,9 \text{ MPa}$
- 6.06 (a) $-26,6^\circ; \quad +63,4^\circ$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = +190 \text{ MPa} (\theta = -26,6^\circ); \quad \sigma_{\text{mín}} = -10,0 \text{ MPa}$
- 6.10 (a) $+18,4^\circ; \quad +108,4^\circ$
 (b) $100 \text{ MPa} \quad \quad \quad$ (c) $+90,0 \text{ MPa}$
- 6.15 (a) $+45,7 \text{ MPa}; \quad -90,7 \text{ MPa}; \quad -41,3 \text{ MPa}$
 (b) $-70,3 \text{ MPa}; \quad -38,0 \text{ MPa}; \quad +78,2 \text{ MPa}$
- 6.16 (a) $-107,0 \text{ MPa}; \quad -23,0 \text{ MPa}; \quad +7,83 \text{ MPa}$
 (b) $-58,0 \text{ MPa}; \quad -72,0 \text{ MPa}; \quad -42,1 \text{ MPa}$
- 6.18 (a) $1,214 \text{ MPa} \quad \quad \quad$ (b) $-0,882 \text{ MPa}$
- 6.19 $16,58 \text{ kN}$
- 6.23 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 73,9 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -9,52 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 41,7 \text{ MPa}$
 (b) $\tau_{\text{máx}} = 6,45 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -140,1 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 73,3 \text{ MPa}$
- 6.24 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 1,757 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -19,18 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 10,47 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 28,0 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -1,009 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 14,50 \text{ MPa}$
- 6.27 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 72,0 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -18,26 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 45,1 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 17,06 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -17,06 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 17,06 \text{ MPa}$
- 6.28 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 108,0 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -5,76 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 56,9 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 31,6 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -31,6 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 31,6 \text{ MPa}$

- 6.29 $\sigma_{\text{máx}} = 65,9 \text{ MPa};$
 $\sigma_{\text{mín}} = -45,9 \text{ MPa} (\theta = 31,7^\circ; 121,7^\circ)$
 $\tau_{\text{máx}} = 55,9 \text{ MPa}$
- 6.30 $\phi_p = 26,6^\circ; \quad 63,4^\circ; \quad \sigma_{\text{máx}} = 190 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -10,0 \text{ MPa}$
 $\phi_s = 18,4^\circ; \quad 108,4^\circ; \quad \sigma_{\text{máx}} = 100 \text{ MPa}; \quad \sigma_m = -90 \text{ MPa}$
- 6.35 (a) $\sigma_x = 45,7 \text{ MPa}; \quad \sigma_y = -90,7 \text{ MPa}; \quad \tau_{x,y} = 41,3 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_x = -7,03 \text{ MPa}; \quad \sigma_y = -38,0 \text{ MPa}; \quad \tau_{x,y} = 78,2 \text{ MPa}$
- 6.36 (a) $\sigma_x = -107,0 \text{ MPa}; \quad \sigma_y = -23,0 \text{ MPa}; \quad \tau_{x,y} = 7,83 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_x = -58,0 \text{ MPa}; \quad \sigma_y = -72,0 \text{ MPa}; \quad \tau_{x,y} = 42,1 \text{ MPa}$
- 6.38 (a) $1,214 \text{ MPa} \quad \quad \quad$ (b) $-0,882 \text{ MPa}$
- 6.39 $16,58 \text{ kN}$
- 6.43 (a) $\sigma_{\text{máx}} = +73,9 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -9,52 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 41,7 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = +6,45 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -140,1 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 73,3 \text{ MPa}$
- 6.44 (a) $\sigma_{\text{máx}} = +1,757 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -19,18 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 10,47 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = +28,0 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\text{mín}} = -1,009 \text{ MPa}; \quad \tau_{\text{máx}} = 14,50 \text{ MPa}$
- 6.48 $\sigma_{\text{máx}} = 168,6 \text{ MPa} (\theta_p = 33,8^\circ)$
 $\sigma_{\text{mín}} = 6,42 \text{ MPa} (\theta_p = 123,8^\circ)$
- 6.50 $\sigma_{\text{máx}} = 1,732 \cdot \tau_0 (\theta_p = 90^\circ)$
 $\sigma_{\text{mín}} = -1,732 \cdot \tau_0 (\theta_p = 0)$
- 6.52 $\sigma_{\text{máx}} = 1,732 \cdot \sigma_0 (\theta_p = 45^\circ)$
 $\sigma_{\text{mín}} = -1,732 \cdot \sigma_0 (\theta_p = 45^\circ)$
- 6.56 $-148,6^\circ \leq \theta \leq 5,52^\circ$
- 6.58 (a) $56,3^\circ$ e $33,7^\circ$ (b) -10 MPa (c) 65 MPa

- 6.59 (a) $9,55^\circ$ e $80,4^\circ$; $\sigma_{\text{máx}} = 81,5 \text{ MPa}$; $\sigma_{\text{mín}} = 28,5 \text{ MPa}$
 (b) $\tau_{\text{máx}} = 26,5 \text{ MPa}$
- 6.64 (a) 69,0 MPa (b) 104,0 MPa
- 6.65 (a) 85,0 MPa (b) 65,0 MPa
- 6.70 (a) 91,0 MPa (b) 91,0 MPa (c) 108,0 MPa
- 6.71 (a) 113 MPa (b) 91,0 MPa (c) 143,0 MPa
- 6.72 (a) 40,0 MPa (b) 72,0 MPa
- 6.75 $\sigma_{\text{máx}} > 0 : +60,0 \text{ MPa}$;
 $\sigma_{\text{máx}} < 0 : -122,0 \text{ MPa}$
- 6.76 (a) Sim (b) Não (c) Sim
- 6.78 (a) Não (b) Não (c) Sim
- 6.80 (a) 1,772 (b) 1,875
- 6.81 (a) 1,397 (b) 1,547
- 6.84 708 N · m
- 6.85 818 N · m
- 6.88 Sem ruptura
- 6.90 Ocorrerá ruptura
- 6.92 42,4 MPa
- 6.93 31,6 MPa
- 6.96 $\sigma_{\text{máx}} = 49,8 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 2,94 \text{ MPa}$
- 6.100 $\sigma_{\text{máx}} = 89,0 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 44,5 \text{ MPa}$
- 6.101 337 m
- 6.104 (a) 139,1 MPa (b) 45,2 MPa
- 6.105 4,75 MPa
- 6.108 $p = 419 \text{ kPa}$; $p = 558 \text{ kPa}$

- 6.111 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 76,1 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 38,1 \text{ MPa}$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 73,1 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 53,3 \text{ MPa}$
- 6.112 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 77,4 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 38,7 \text{ MPa}$ (fora do plano)
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 73,1 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 51,9 \text{ MPa}$ (no plano)
- 6.116 $\epsilon_x = +357 \mu$; $\epsilon_y = -157,1 \mu$; $\gamma_{x'y'} = -613 \mu$
 $\epsilon_x = +93 \mu$; $\epsilon_y = -13,58 \mu$; $\gamma_{x'y'} = -641 \mu$
- 6.124 (a) $+410 \mu$ para 31° ; $+70 \mu$ para 59°
 (b) 340μ (c) 410μ
- 6.126 (a) $+325 \mu$ para $8,1^\circ$; $+75 \mu$ para $98,1^\circ$
 (b) 250μ (c) 325μ
- 6.128 (a) $\theta_p = 50,2^\circ$; $\epsilon_a = 192,0 \mu$; $\epsilon_b = -52,0 \mu$; $\epsilon_c = -60 \mu$
 (b) 244μ (c) 252μ
- 6.132 (a) $\theta_p = 30,0^\circ$; $\epsilon_a = 250 \mu$; $\epsilon_b = 100 \mu$ (b) 150μ
- 6.133 (a) $\theta_p = 30,0^\circ$; $\epsilon_a = 560 \mu$; $\epsilon_b = -140 \mu$
 (b) $\gamma_{\text{máx}} = 700 \mu$ (no plano)
- 6.136 (a) $\epsilon_a = 250 \mu$; $\epsilon_b = 100 \mu$; $\epsilon_c = -150 \mu$ (b) 400μ
- 6.137 (a) $\epsilon_a = -140 \mu$; $\epsilon_c = -180 \mu$ (b) $\gamma_{\text{máx}} = 740 \mu$
- 6.142 $\theta_p = 31,1^\circ$; $\epsilon_a = 1720 \mu$; $\epsilon_b = -626 \mu$; $\epsilon_c = -466 \mu$
- 6.146 80,0 kN
- 6.147 321 μ
- 6.148 (b) $\epsilon_{\text{máx}} = 750 \mu$; $\epsilon_{\text{máx}} = -250 \mu$; $\gamma_{\text{máx}} = 1000 \mu$
- 6.150 (a) $59,8^\circ$; $30,2^\circ$
 (b) 39,5 MPa; -116,7 MPa
 (c) 78,1 MPa (no plano)

- 6.153 (a) 14° e 104°
 (b) 100 MPa; - 70 MPa (c) 85 MPa
- 6.156 $d = 800$ mm
- 6.158 (a) $\epsilon_a = 120 \mu$; $\epsilon_b = 420 \mu$; $\epsilon_c = -180 \mu$
 (b) $\sigma_{\text{máx}} = 96$ MPa; $\sigma_{\text{máx}} = 48$ MPa (c) 2,46 MPa
- 6.159 57,1 MPa

CAPÍTULO 7

- 7.02 $M_B = Pab/L$
- 7.04 $M_A = -\frac{1}{2}w \cdot L^2$
- 7.06 $M_B = M_C = P \cdot a$
- 7.08 De A até B: $V = Pb/L$; $M = Pbx/L$
 De B até C: $V = -Pa/L$; $M = Pa(L - x)/L$
- 7.10 $V = w(L - x)$; $M = w(L - x)^2/2$
- 7.12 De A até B: $V = P$; $M = Px$
 De B até C: $V = 0$; $M = Pa$
 De C até D: $V = -P$; $M = P(L - x)$
- 7.15 (a) 68 kN; (b) 60 kN · m
- 7.16 (a) 42 kN; (b) 27 kN · m
- 7.18 (a) 62,5 kN; (b) 47,6 kN · m
- 7.20 Exatamente à esquerda de F: $V = -3$ kN; $M = -2,4$ kN · m
- 7.21 (a) 900 N (b) 112,5 N · m
- 7.24 (a) 6,56 MPa (b) 375 kPa
- 7.25 (a) 136,6 MPa (b) 55,8 MPa
- 7.28 108 MPa

- 7.29 98,7 MPa
- 7.31 (a) 160 kN (b) 126,0 MPa
- 7.34 (a) 0,420 m (b) 60,9 MPa
- 7.36 (a) $a = (\sqrt{2} - 1)(L/2)$; (b) 10,57 MPa
- 7.38 $M_B = Pab/L$
- 7.40 $M_A = -\frac{1}{2}wL^2$
- 7.41 $V_B = -\frac{1}{2}w_0 \cdot L$; $M_B = \frac{1}{6}w_0 \cdot L^2$
- 7.43 68 kN; 60 kN · m
- 7.46 (a) 62,5 kN; (b) 47,6 kN · m
- 7.48 (a) 54 kN; (b) 29,4 kN · m
- 7.52 $V = (w_0 L/6)[1 - 3(x/L)^2]$;
 $M = (w_0 L^2/6)[x/L - (x/L)^3]$;
 $M_{\text{máx}} = 0,0642 w_0 L^2$
- 7.54 $V = (w_0 L/3)[2 - 3x/L + (x/L)^3]$;
 $M = -(w_0 L^2/12)[3 - 8x/L + 6(x/L)^2 - (x/L)^4]$;
 $|M|_{\text{máx}} = \frac{1}{4}w_0 L^2$
- 7.56 (a) 6,56 MPa (b) 375 MPa
- 7.57 (a) 136,6 MPa (b) 55,8 MPa
- 7.59 (a) 89,6 kN · m (b) 156,4 MPa
- 7.62 (a) 135,0 kN · m (b) 158,6 MPa
- 7.64 (a) 68,3 MPa (b) 31,6 MPa
- 7.65 (a) 131,2 MPa (b) 29,0 MPa
- 7.68 (a) = -1800 N; = 540 kN · m (b) 62,5 MPa

- 7.70 (a) $V = wa - w(x - a) + w(x - 3a)$,
 $M = wax - \frac{1}{2}w(x - a)^2 + \frac{1}{2}w(x - 3a)^2$ (b) $\frac{3}{2}wa^2$
- 7.72 (a) $V = 3w_0a - w_0x - w_0(x - a) + w_0(x - 3a)$
 $M = 3w_0ax - \frac{1}{2}w_0x^2 - \frac{1}{2}w_0(x - a)^2 + \frac{1}{2}w_0(x - 3a)^2$ (b) $\frac{2}{3}wa^2$
- 7.74 (a) $V = -(w_0/L)(Lx - x^2 + (x - \frac{1}{2}L)^2)$,
 $M = -(w_0/6L)(3Lx^2 - 2x^3 + 2(x - \frac{1}{2}L)^3)$, (b) $5w_0L^2/24$
- 7.76 (a) $V = -1500x + 3000(x - 0,8)^0 + 3000(x - 3,2)^0$,
 $M = -750x^2 + 3000(x - 0,8)^1 + 3000(x - 3,2)^1$ (b) $600\text{ N} \cdot \text{m}$
- 7.80 (a) $V = 180 - 50x - 100(x - 0,8)^0$,
 $M = 180x - 25x^2 - 100(x - 0,8)^1$
 (b) $x_m = 1,6\text{ m}$; $M_{\text{máx}} = 144\text{ kN} \cdot \text{m}$
 $\sigma_{\text{máx}} = 152,9\text{ MPa}$
- 7.81 (a) $V = 138 - 40x - 60(x - 1,8)^0 - 60(x - 3,6)^0$
 $M = 138x - 20x^2 - 60(x - 1,8)^1 - 60(x - 3,6)^1$
 (b) $1,95\text{ m}$; $184,1\text{ kN} \cdot \text{m}$
 (c) $137,7\text{ MPa}$
- 7.89 275 mm
- 7.90 189,7 mm
- 7.91 208 mm
- 7.92 311 mm
- 7.97 W 530 x 92
- 7.98 W 530 x 66
- 7.100 W 360 x 32,9
- 7.107 12,7 mm

- 7.108 9 mm
- 7.109 (a) W 310 x 32,7 (b) W 690 x 125
- 7.113 (a) 16,04 kN/m; 2,29 kN/m (b) 22,6 mm
- 7.114 (a) 11,46 kN/m; 6,88 kN/m (b) 24,0 mm
- 7.115 180,1 kN/m
- 7.116 91,9 kN/m
- 7.121 (a) 3,36 m (b) W 360 x 44,8
- 7.122 (a) 2,74 m (b) W 530 x 66
- 7.123 (a) 3,65 m (b) W 460 x 52
- 7.129 (a) 65,2 MPa; (b) 102,6 MPa (c) 97,6 MPa
- 7.130 (a) 130,4 MPa; (b) 160,9 MPa (c) 97,6 MPa
- 7.132 $h = h_0(x/L)^{1/2}$
- 7.134 $h = 2h_0[(x/L) - (x/L)^2]^{1/2}$
- 7.136 Para $x \leq L/2$; $h = h_0(2x/L)^{1/2}$;
 Para $x > L/2$; $h = h_0[2(L - x)/L]^{1/2}$
- 7.138 (a) $b = b_0x/L$ (b) $b = b_0(x/L)^{1/2}$
- 7.140 $d = 1,587d_0[(x/L) - (x/L)^2]^{1/3}$
- 7.142 (a) 151,6 MPa (b) 128,6 MPa
- 7.145 (a) 109,7 MPa (b) 126,2 MPa (c) 134,9 MPa
- 7.146 194,6 MPa
- 7.147 208 kN
- 7.152 (a) $x = \frac{1}{2}Lh_0/h_1$
 (b) $\sigma_m = 3wL^2/[4bh_0(2h_1 - h_0)]$
- 7.154 (a) $x = 375\text{ mm}$ (b) 28,5 kN/m

- 7.155 46,8 mm
- 7.158 36,5 mm
- 7.159 37,3 mm
- 7.162 42,6 mm
- 7.163 43,1 mm
- 7.165 $L/d < \frac{1}{3} \sqrt{1 + 6l/d}$
- 7.167 40 mm
- 7.168 $d_{BC} = 21,7 \text{ mm}$ $d_{CD} = 33,4 \text{ mm}$
- 7.169 44,4 MPa (barra BC); 48,0 MPa (barra CD)
- 7.173 Ocorre exatamente à direita de C; 95,0 MPa
- 7.174 (a) 73,8 MPa; (b) 94,9 MPa
- 7.176 $\tau_{\text{máx}} = 75,6 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{máx}} = 137,4 \text{ MPa}$
- 7.178 87,8 kN/m
- 7.179 79,6 kN/m
- 7.181 (a) $\alpha = L/\sqrt{8}$ (b) $M_{\text{máx}} = 0,0625 w \cdot L^2$
- 7.186 56,0 mm

CAPÍTULO 8

- 8.02 (a) $y = M_0 x^2/2EI$ (b) $M_0 L^2/2EI \uparrow$
(c) $M_0 L/EI \angle$
- 8.04 (a) $y = -(w/24EI)(x^4 - 4L^3x + 3L^4)$
(b) $wL^4/8EI \downarrow$ (c) $wL^3/6EI \angle$
- 8.06 (a) $y = -(w_0/120EI)(-x^5 + 10L^2x^3 - 20L^3x^2)$
(b) $11w_0 L^4/120EI \downarrow$ (c) $w_0 L^3/8EI \angle$

- 8.09 (a) $y = w_0(3x^5 - 15Lx^4 + 20L^2x^3 - 8L^4x)/360EIL$
(b) $y = 5w_0 L^4/768EI \downarrow$
(c) $\theta_A = w_0 \cdot L^3/45EI \angle$
- 8.10 (a) $y = (w_0/360EIL)(-3x^5 + 10L^2x^3 - 7L^4x)$
(b) $5w_0 L^4/768EI \downarrow$
(c) $7w_0 L^3/360EI \angle$ (d) 6,78 mm \downarrow
 $4,05 \times 10^{-3} \text{ rad} \angle$
- 8.12 (a) $y = (M_0/6EIL)(x^3 - L^2x)$
(b) $M_0 L/6EI \angle$ (c) $M_0 L/3EI \angle$
- 8.14 (a) $y = (M_0/6EIL)(-2x^3 + 3Lx^2 - L^2x)$
(b) e (c) $M_0 L/6EI \angle$
- 8.16 (a) $y = (w/24EI)(-x^4 + L^3x)$
(b) $wL^3/24EI \angle$ (c) $wL^3/8EI \angle$
- 8.18 (a) $y = (w/24EI)(-x^4 + 4Lx^3 - 4L^2x^2)$
(b) $wL^4/24EI \downarrow$ (c) 0
- 8.20 (a) $2,75 \times 10^{-3} \text{ rad} \angle$ (b) 1,147 mm \downarrow
- 8.23 (a) $1,550 \times 10^{-3} \text{ rad} \angle$
(b) 0,581 mm \uparrow
- 8.26 (a) $y = (Pa/6EI)(3x^2 - 3Lx + a^2)$
(b) $(Pa/2EI)(L - 2a) \angle$
(c) $(Pa/24EI)(3L^2 - 4a^2) \downarrow$
- 8.27 (a) $8,18 \times 10^{-3} \text{ rad} \angle$
(b) 11,78 mm \downarrow

- 8.30 (a) $y = (P/48EI)(-8x^3 + 30L^2x - 21L^3)$
 (b) 2,48 m ↓
- 8.32 $0,0642M_0L^2/EI$ ↓ para $x = 0,577L$
- 8.34 (a) $0,00652w_0L^4/EI$ ↓ para $x = 0,519L$
 (b) 6,79 mm ↓
- 8.36 $0,01969wL^4/EI$ ↑ para $x = 0,630L$
- 8.38 (a) $y = (w_0/360EIL^2)(x^6 - 15L^2x^4 + 25L^3x^3 - 11L^5x)$
 (b) $11w_0L^3/360EI$ ◀ (c) $0,00916w_0L^4/EI$ ↓
- 8.40 (a) $y = -\frac{w_0L^4}{\pi^4EI} \left[\text{sen} \frac{\pi x}{L} - \frac{\pi^3}{6} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{\pi^5}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^5 - \pi \left(\frac{x}{L}\right)^7 \right]$
 (b) $[(\pi^2 - 3)/(3\pi^3)]w_0L^4/EI$ ↓
- 8.42 $R_B = 3wL/8$ ↑
- 8.44 $R_B = 11w_0L/40$ ↑
- 8.46 $R_A = 41wL/128$ ↑; $M_C = +9wL^2/256$; $M_B = -7wL^2/128$
- 8.48 $R_B = 5P/16$ ↑; $M_A = -3PL/16$; $M_C = +5PL/32$
- 8.50 $R_A = 3M_0(L^2 - a^2)/2L^3$ ↑
- 8.52 $3,09 \times 10^{-3}wL^4/EI$ ↓
- 8.54 $7PL^3/768EI$ ↓
- 8.56 $R_A = P/2$ ↑, $M_A = PL/8$ ↓;
 $M_A = M_B = -PL/8$; $M_C = +PL/8$
- 8.58 $R_A = Pb^2(3a + b)/L^2$ ↑, $M_A = Pab^2/L^2$; $M_A = -Pab^2/L^2$;
 $M_B = -Pa^2b/L^2$; $M_D = +2Pa^2b^2/L^3$
- 8.60 (a) $y = (Pb/6EIL)[x^3 - (L^2 - b^2)x - (L/b)(x - a)^3]$
 (b) $(Pb/6EIL)(L^2 - b^2)$ ◀ (c) $Pa^2b^2/3EIL$ ↓

- 8.62 (a) $y = (w/1944EI)[72Lx^3 - 81(x - L/3)^4 - 56L^3x]$
 (b) $7wL^3/243EI$ ◀ (c) $2wL^4/243EI$ ↓
- 8.64 (a) $y = (P/6EI)[-9ax^2 + 2x^3 - (x - a)^3]$
 (b) $7Pa^3/2EI$ ↓
- 8.66 (a) $y = (P/6EI)[-x^3 - (x - a)^3 - (x - 2a)^3 + 42a^2x - 90a^3]$
 (b) $15Pa^3/EI$ ↓
- 8.68 (a) $29Pa^3/12EI$ ↓ (b) $19Pa^3/6EI$ ↓
- 8.70 (a) $y = (w/48EI)[-9L^2x^2 + 4Lx^3 - 2(x - \frac{1}{2}L)^4]$
 (b) $41wL^4/384EI$ ↓
- 8.72 (a) $y = (w/24EI)[-4ax^3 - (x - a)^4 + (x - 3a)^4 - 44a^3x]$
 (b) $19wa^4/8EI$ ↓
- 8.74 (a) $y = (w_0/5760EIL)[96x^5 - 96(x - \frac{1}{2}L)^5 - 240Lx^4 + 200L^2x^3 - 53L^4x]$
 (b) $3w_0L^4/1280EI$ ↓
- 8.76 (a) $y = w/384EI[-16x^4 + 16Lx^3 + 16(x - \frac{1}{2}L)^4 - 16(x - L)^4 + 48L(x - L)^3 - L^3x]$
 (b) $wL^4/768EI$ ↑ (c) $5wL^4/256EI$ ↓
- 8.78 (a) $0,802 \times 10^{-3}$ rad ◀ (b) 0,844 mm ↓
- 8.79 (a) $6,84 \times 10^{-3}$ rad ◀ (b) 10,46 mm ↓
- 8.82 (a) $3,90 \times 10^{-3}$ rad ◀ (b) 4,06 mm ↓
- 8.84 (a) 3,81 mm ↓ (b) 4,29 mm ↓
- 8.85 (a) 389 mm (b) 0,665 mm ↑
- 8.87 (a) $3,82 \times 10^{-3}$ rad ◀ (b) 5,84 mm ↓
- 8.92 (a) $41wL/128$ ↑ (b) $19wL^4/6144EI$ ↓
- 8.94 (a) $9M_0/8L$ ↑ (b) $M_0L^2/128EI$ ↓
- 8.97 (a) 47,9 kN ↑ (b) 178,2 mm ↓

- 8.98 (a) 8,95 kN ↑ (b) 1,677 mm ↓
- 8.100 (a) $R_A = 20P/27$ ↑, $M_A = 4PL/27$ ↓
(b) $5PL^3/1296EI$ ↓
- 8.102 (a) $R_A = 51,3$ kN ↑, $M_A = 39,5$ kN · m ↓
(b) + 22,0 kN · m
- 8.104 10,97 mm; 2,52 m de A
- 8.107 4,77 mm; 1,922 m de A
- 8.108 (a) $5PL^3/162EI$ ↓ (b) $PL^2/9EI$ <
- 8.110 (a) $ML^2/8EI$ ↑ (b) $ML/2EI$ <
- 8.112 $5PL^2/8EI$ <; $7PL^3/16EI$ ↓
- 8.114 $4wa^3/3EI$ <; $10wa^4/3EI$ ↓
- 8.116 $PL^2/2EI$ <; $7PL^3/48EI$ ↓
- 8.118 $7wa^3/6EI$ <; $17wa^4/24EI$ ↓
- 8.122 $12,99 \times 10^{-3}$ rad <; 14,97 mm ↓
- 8.123 $12,46 \times 10^{-3}$ rad <; 7,25 mm ↓
- 8.126 (a) $R_A = (3M_0/2L^2)(L^2 - a^2)$ ↑
(b) $R_B = -R_A$, $M_B = (M_0/2L^2)(L^2 - 3a^2)$
- 8.128 (b) $R_A = 3P/8$ ↑; $R_C = 7P/8$ ↑; $R_D = P/4$ ↓
- 8.130 $R_B = 13wL/32$ ↑, $M_B = 11wL^2/192$ ↓
- 8.132 13,46 mm ↓
- 8.136 (a) 14,07 kN ↑ (b) 5,93 kN ↑
- 8.138 $R_A = R_B = 76,5$ kN ↑; $R_C = 39,0$ kN ↑
- 8.139 13,83 mm
- 8.142 9,31 mm ↓

- 8.144 (a) $6,74 \times 10^{-3}$ rad < (b) 15,16 mm ↓
- 8.151 $R_A = 7,06$ kN ↑; $R_D = 14,94$ kN ↑; $M_D = 46,2$ kN · m ↓
- 8.154 $3,53 \times 10^{-3}$ rad <; 8,39 mm ↓

CAPÍTULO 9

- 9.02 (a) $PL^2/2EI$ < (b) $PL^3/3EI$ ↓
- 9.04 (a) $w_0 L^3/24EI$ < (b) $w_0 L^4/30EI$ ↓
- 9.06 (a) $PL^2/4EI$ < (b) $PL^3/8EI$ ↓
- 9.08 (a) $7wL^3/48EI$ < (b) $41wL^4/384EI$ ↓
- 9.10 (a) 0; $PL^3/12EI$ ↓ (b) $PL^2/6EI$ <; 0
- 9.13 (a) $2,55 \times 10^{-3}$ rad < (b) 6,25 mm ↓
- 9.16 (a) $wL^3/16EI$ < (b) $47wL^4/1152EI$ ↓
- 9.17 (a) $3,42 \times 10^{-3}$ rad < (b) 5,67 mm ↓
- 9.20 (a) $1,791 \times 10^{-3}$ rad < (b) 3,11 mm ↓
- 9.22 (a) $wa^2(3L - 2a)/12EI$ <
(b) $wa^2(3L^2 - 2a^2)/48EI$ ↓
- 9.24 (a) $Pa(L - a)/2EI$ <
(b) $Pa(3L^2 - 4a^2)/24EI$ ↓
- 9.28 (a) $3,87 \times 10^{-3}$ rad < (b) 6,50 mm ↑ (c) 8,80 mm ↓
- 9.32 0,223L
- 9.34 (a) $39PL^2/384EI$ < (b) $9PL^3/256EI$ ↓
- 9.36 (a) $3wL^3/128EI$ < (b) $5wL^4/768EI$ ↓
- 9.38 (a) $5M_0 L/32EI$ < (b) $3M_0 L^2/64EI$ ↓
- 9.40 (a) $4,64 \times 10^{-3}$ rad < (b) 6,17 mm ↓

- 9.43 (a) $7wL^3/128EI \curvearrowright$ (b) $13wL^4/768EI \downarrow$
- 9.46 (a) $Pa(2L + 3a)/6EI \curvearrowright$
(b) $Pa^2(L + a)/3EI \downarrow$
- 9.48 (a) $13wL^4/768EI \downarrow$ (b) $wL^4/768EI \uparrow$
- 9.52 (a) $2,57 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowleft$ (b) $2,41 \text{ mm} \uparrow$
- 9.56 (a) $3wL^3/128EI \curvearrowright$ (b) $wL^4/64EI \downarrow$
- 9.58 (a) $0,01749PL^3/EI \downarrow$ (b) $0,01955PL^3/EI \downarrow$
- 9.62 $6,56 \times 10^{-3} wL^4/EI$, para $x = 0,460L$ de A
- 9.64 $6,59 \text{ mm}$, para $2,45 \text{ m}$ de A
- 9.67 $1,841 \text{ mm}$, para $3,33 \text{ m}$ de A
- 9.70 $3,35 \text{ mm}$, para $1,387 \text{ m}$ de A
- 9.72 $24,0 \times 10^{-3} PL^3/EI$, para $0,537L$ de A
- 9.74 $y_A = 2PL^3/3EI_0 \downarrow$
- 9.76 $0,275w_0L \uparrow$
- 9.78 $3M_0/2L \uparrow$
- 9.80 $R_B = 9M_0/8L \uparrow$; $M_A = +M_0/8$
- 9.82 $R_A = 2P/3 \uparrow$; $M_B = -PL/3$
- 9.86 $R_A = 17,78 \text{ kN} \uparrow$
- 9.88 $R_A = 3P/32 \downarrow$; $R_B = 13P/32 \uparrow$; $R_C = 11P/16 \uparrow$
- 9.90 $R_A = 3P/8 \uparrow$; $R_B = 7P/8 \uparrow$; $R_C = P/4 \downarrow$
- 9.92 $R_A = 6M_0 \alpha (L - a)/L^3 \downarrow$,
 $M_A = M_0 (L - a)(L - 3a)/L^2$;
 $M_B = +M_0 \alpha (3a - 2L)/L^2$
- 9.93 $R_A = 61,4 \text{ kN} \uparrow$; $M_A = 54,6 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$

- 9.95 $R_B = 46,3 \text{ kN} \uparrow$; $y_B = 6,90 \text{ mm} \uparrow$
- 9.96 (a) $1,900 \text{ mm}$ (b) $41,7 \text{ kN}$
- 9.100 $k = 84EI/L^3$
- 9.102 (a) $R_A = R_B = 14,93 \text{ kN} \uparrow$;
 $R_D = R_E = 15,07 \text{ kN} \uparrow$ (b) $2,07 \text{ mm} \downarrow$
- 9.103 $R_A = R_C = 13,92 \text{ kN} \uparrow$; $R_D = R_E = 16,08 \text{ kN} \uparrow$; $y_C = 2,21 \text{ mm} \uparrow$
- 9.108 (a) $3,11 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowleft$ (b) $7,07 \text{ mm} \downarrow$
- 9.112 (a) $5,24 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$ (b) $12,90 \text{ mm} \downarrow$
- 9.113 (a) $3,05 \times 10^{-3} \curvearrowright$ (b) $7,93 \text{ mm} \downarrow$
- 9.118 (a) $L/4$, $wL^4/6144EI$ (b) $L/2$, $wL^4/384EI$
(c) $L/2$, $wL^4/128EI$

CAPÍTULO 10

- 10.01 (a) $156,25 \text{ kJ/m}^3$ (b) 256 kJ/m^3 (c) 1190 kJ/m^3
- 10.04 (a) 712 kJ/m^3 (b) $177,9 \text{ kJ/m}^3$ (c) $160,3 \text{ kJ/m}^3$
- 10.06 (a) $1,09 \text{ MJ/m}^3$ (b) 83 MJ/m^3
- 10.07 $1,750 \text{ MJ/m}^3$; 71 MJ/m^3
- 10.10 (a) 279 J (b) 594 MJ/m^3 (c) $117,3 \text{ MJ/m}^3$
- 10.11 $117,3 \text{ MJ/m}^2$; 239 J
- 10.14 $80,4 \text{ J}$
- 10.15 $58,2 \text{ J}$; $79,2 \text{ J}$
- 10.18 $5,03$
- 10.21 $2,49 \text{ m}$
- 10.24 $U = 0,2486 PL^2/EA_{\text{mfm}}; -0,576\%$
- 10.26 $4,90 \text{ J}$

- 10.28 $3,81 P^2 L / EA$
- 10.30 $1,898 P^2 L / EA$
- 10.32 59,8 J
- 10.33 184,3 J
- 10.36 $M \frac{2}{3} (\alpha^3 + b^3) / 6EI L^2$
- 10.38 $w^2 L^5 / 240EI$
- 10.43 95,2 J
- 10.44 339 J
- 10.46 (a) 31,0 J (b) 58,8 J
- 10.47 34,3 J
- 10.49 $U = 7T^2 L / 48GJ_{\min}$
- 10.52 $U = M \frac{2}{3} L (1 + 3Eh^2 / 10GL^2) / 6EI$
- 10.54 $-11,04 \text{ MPa} \leq \sigma_z \leq 141,0 \text{ MPa}$
- 10.57 24,7 mm
- 10.58 (a) 79,8 kN (b) 254 MPa (c) 1,523 mm
- 10.61 68,8 kg
- 10.64 285 mm
- 10.65 200 mm
- 10.68 (a) 7,54 kN (b) 41,3 MPa (c) 3,18 mm
- 10.69 (a) 9,60 kN (b) 32,4 MPa (c) 2,50 mm
- 10.72 (a) 21,6 mm (b) 125,9 N · m (c) 184,4 MPa
- 10.77 5,70
- 10.78 (b) $y'_m = 17,40 \text{ mm}$; $|(y'_m - y_m) / y_m| = 0,1946$; $y_m / 2h = 0,218$
- 10.80 $Pa^2(\alpha + L) / 3EI \downarrow$
- 10.82 $M_0(L + 3\alpha) / 3EI$

- 10.84 $3Pa^3 / 4EI \downarrow$
- 10.86 $2,56^\circ$
- 10.90 385 mm
- 10.94 10,68 mm \downarrow
- 10.98 $7,62 PL / EA$
- 10.100 (a) e (b): $(P^2 L^2 + 3M_0 PL + 6M \frac{2}{3}) L / 6EI$
- 10.102 (a) e (b): $(P^2 L^2 + 6M_0 PL + 16M \frac{2}{3}) L / 96EI$
- 10.104 $5M \frac{2}{3} L / 4EI$
- 10.106 $5PL^3 / 48EI \downarrow$
- 10.108 $3PL^2 / 8EI$
- 10.110 $(PL^3 / 48EI) / [1 - 3(a/L)] \downarrow$
- 10.112 $PaL / 24EI$
- 10.114 $7PL^2 / 128EI$
- 10.115 (a) $M_0 L / 6EI$ (b) $M_0 L^2 / 16EI$
- 10.117 (a) $12,46 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (b) 7,25 mm \downarrow
- 10.118 3,77 mm \downarrow
- 10.120 $PL / 2EA \leftarrow$; $3,80 PL / EA \downarrow$
- 10.121 0; $2,80 PL / EA \downarrow$
- 10.124 1,906 mm \rightarrow
- 10.126 (a) $PR^3 / 2EI \rightarrow$ (b) $\pi PR^3 / 4EI \downarrow$
- 10.128 (a) $5PL^3 / 6EI \rightarrow$ (b) $PL^2 / 6EI \downarrow$
- 10.130 $R_A = 5P / 16 \uparrow$; $M_B = -3PL / 16$
- 10.132 $R_A = 7\omega L / 128 \uparrow$; $M_B = -9\omega L / 128$
- 10.134 $R_A = 2M_0 / 3L \uparrow$; $R_B = 2M_0 L \downarrow$; $R_C = 4M_0 3L \uparrow$

10.136 $F_{BE} = F_{DE} = 0,326P$; $F_{CE} = 0,435P$

10.138 $-0,375P$

10.139 $-0,486P$

10.144 $1,027\text{ mm} \downarrow$

10.145 $0,219\text{ mm} \downarrow$

10.148 $0,743\text{ mm} \downarrow$

10.149 $88,3\text{ mm} \downarrow$

10.150 (a) $3,28$ (b) $4,25$

CAPÍTULO 11

11.02 K/L

11.03 $2KL/9$

11.05 $Ka^2/2L$

11.10 1035 N

11.12 $17,69\text{ N}$

11.14 1895 N

11.16 6950 N ; 148 mm ; 2436 N

11.18 (a) $64,3\text{ kN}$; (b) $14,27\text{ mm}$ (c) $97,7\%$

11.20 (a) $65,4\text{ kN}$; (b) $102,1\text{ kN}$

11.21 (a) $6,25\%$ (b) $30,5\text{ kN}$

11.23 $0,471$

11.24 $1,421$

11.26 $5,3\text{ m}$

11.29 $2,81$

11.30 $2,43$

11.34 $4,0\text{ kN}$

11.37 7855 kg

11.38 (a) $6,75\text{ m}$ (b) $6,19$

11.40 $2,5\text{ m}$; $4,3\text{ kN}$

11.43 317 kg ; $79,8\text{ kg}$; 317 kg ; 653 kg

11.44 (a) $2,55$ (b) $d_2 = 28,3\text{ mm}$; $d_3 = 14,14\text{ mm}$

$d_4 = 16,73\text{ mm}$; $d_5 = 20,0\text{ mm}$

11.46 (a) $0,500$ (b) $b = 14,15\text{ mm}$; $d = 28,3\text{ mm}$

11.47 657 mm

11.48 $6,4\text{ m}$

11.51 (a) $6,33\text{ mm}$ (b) $68,7\text{ MPa}$

11.52 (a) $4,32\text{ mm}$ (b) $44,4\text{ MPa}$

11.56 $32,7^\circ\text{C}$

11.57 $0,581\text{ mm}$

11.60 (a) 182 kN (b) $0,6$

11.62 $2,16\text{ m}$

11.63 $1,304\text{ m}$

11.66 $d = 52\text{ mm}$

11.67 $d = 64\text{ mm}$

11.70 (a) 218 kN (b) 861 kN

11.73 422 kN

11.74 (a) $113,7\text{ kN}$ (b) 239 kN

11.75 (a) $113,7\text{ kN}$ (b) 211 kN

11.80 (a) 787 kN (b) 900 kN

11.82 (a) $49,1\text{ kN}$ (b) 239 kN

- 11.83 (a) 113,4 kN (b) 279 kN
11.86 (a) 198,4 kN (b) 213 kN
11.90 919 kN
11.91 (a) 207 mm (b) 1021 kN
11.94 894 kN
11.95 1594 kN
11.97 (a) 26,4 kN (b) 32,2 kN
11.100 416 kN
11.101 225 kN
11.104 W 360 × 79
11.105 W 200 × 46,1
11.108 Espessura = 9,5 mm
11.109 (a) $d = 37,4$ mm (b) $d = 25,6$ mm
11.112 Espessura = 10 mm
11.114 241 mm
11.115 (a) 4 pranchas (b) 5 pranchas
11.118 7,24 kN
11.119 26,9 kN
11.122 (a) 537 kN (b) 376 kN
11.128 36,6 mm
11.129 10,89 mm
11.30 (a) 2,56 mm (b) 2,81 m
11.134 101,9 mm
11.137 182,6 mm
11.140 Espessura = 6 mm

- 11.142 Espessura = 9 mm
11.150 W 250 × 58
11.153 76,2 kN
11.156 77,3 kN
11.157 (a) 345 mm (b) 460 mm
11.161 6,63 kN
11.162 W 250 × 67

ÍNDICE ANALÍTICO

- A**
- sob carga axial, 156
 - em eixos de seção circular, 251
- Abas**
- de perfis laminados, tensões, 495, 515
- Aço**
- especificações para projetos, 41
- Alongamento percentual, 74**
- Análise de estruturas, 14**
- Análise tridimensional**
- de deformações, 674-679
 - de tensões, 630-632
- Ângulo de torção:**
- para eixos circulares,
 - no regime elástico, 221
 - no regime plástico, 263
 - para barras de seção retangular, 283
 - para eixos vazados de paredes finas, 288
- Ângulo de torção, relativo, 225**
- Áreas e Centróides**
- de figuras mais comuns, 909, 910
- Arredondamentos**
- distribuição de tensões junto a:
 - em barras chatas, na flexão, 355
- B**
- Barras**
- chatas, coeficiente de concentração de tensões,
 - na flexão, 355
 - sob carga axial, 158
 - com paredes finas,
 - sob ação de carregamento transversal fora do plano de simetria, 558
 - sob ação de carregamento transversal no plano de simetria, 512
 - de eixo curvo,
 - flexão de, 445
 - superfície neutra de, 446
 - tensões nas, 445
 - de seção transversal retangular,
 - torção de, 282
 - secundárias, 40
 - sob ação de duas forças, 14
- C**
- Capacidade de absorção de energia, 983, 1014**
- Cargas:**
- centradas (ver Forças Axiais)
 - concentradas, 479
 - tensões sob aplicação de, 791, 792
 - críticas, 1081
 - de utilização ou de projeto, 39
 - repetidas, 40, 80
- Carregamento:**
- axial (Ver forças axiais)
 - admissível, 39
 - alternado, 80
 - centrado (Ver forças axiais, centradas)
 - cíclico (Ver cargas repetidas)
 - combinação de,
 - tensões sob aço de, 495, 498
 - dinâmico, 40
 - distribuído,
 - tensões sob aplicação de,
 - estático equivalente, 1013, 1020
 - excêntrico (Ver forças axiais excêntricas)
 - fora do plano de simetria,
 - deformação das vigas, 928-932
 - em barras de paredes finas, 558, 569
 - multiaxial, 128, 129
 - produzido por impacto, 979, 1011, 1016
 - dimensionamento para, 1015, 1016
 - simétrico
 - deformações das vigas, 905, 906
 - transversal, 479, 568
 - último, 38
- Castigliano, Alberto, 1042**
- Centro de torção, 515, 568**
- de cantoneiras, 566
 - de perfil canal, 567
 - de perfil Z, 568
- Centróides**
- de uma área, 1170-1180
 - de uma seção transversal, 330
- Ciclos de carregamento, 80**
- Círculos de Mohr**
- para carga axial centrada, 619
 - para estado plano de deformações, 668, 672, 676
 - para estado plano de tensões, 614-617, 630, 633, 676
 - para estado tridimensional de deformações, 674, 675
 - para estado tridimensional de tensões, 630
 - para momentos e produtos de inércia, 433
 - para torção, 620
 - para vasos de pressão cilíndrica, 653
 - para vasos de pressão esférica, 655
- Cisalhamento, tensões de (Ver tensões de cisalhamento)**
- Código de construção, 41**
- Coefficientes**
- de concentração de tensões,
 - em eixos circulares, 251
 - em barras chatas, na flexão, 355
 - em barras chatas, sob carga axial, 157-158
 - de dilatação térmica, 105
 - de influência, 1038
 - de segurança, 39
 - para colunas de aço, 1123, 1124

- de Poisson, 124
- Colunas, 1078
- biarticuladas, 1083-1087
- de aço, dimensionamento, 1121-1126
- de alumínio, dimensionamento, 1126
- de madeira, dimensionamento, 1127
- projeto de:
- sob carregamento centrado, 1120-1128
- sob carregamento excêntrico, 1144
- sob carga centrada, 1079
- sob carga excêntrica, 1144
- Componentes de tensões, 31
- Comprimento de flambagem
- de coluna, 1089
- para várias condições de extremidade, 1093
- Concreto Armado,
- especificações para projeto, 41
- vigas de, 353
- Condições de contorno:
- para vigas estaticamente determinadas, 822
- para vigas estaticamente indeterminadas, 833, 835
- para vigas sob carregamento distribuído, 829
- Condições de extremidades das colunas, 1093
- Contraventamento, 40
- Convenção de sinais:
- para deformações de cisalhamento, 134
- para forças cortantes, 712
- para momentos fletores, 319, 712
- para tensões, 4, 31
- Corte, 11, 712
- duplo, 12
- força cortante, 712
- simples, 12
- Coulomb, Charles Augustin de, 640
- Crítério:
- da máxima deformação específica, 640
- da máxima energia de distorção
- para estado geral de tensões, 994
- para estado plano de tensões, 640
- da máxima tensão normal, 639, 640
- de Coulomb, 640
- de Mohr, 640
- de ruptura, 635, 639
- para materiais dúteis, 635-638
- para materiais frágeis, 639-643
- de Saint-Venant, 640
- de Tresca, 637
- de Von Mises, 637
- Curva $\sigma - \epsilon$, 81
- Curvatura:
- anticlástica, 333
- de barras compostas de vários materiais, 348
- da seção transversal de uma barra, 333
- da superfície neutra, 333
- D**
- Declividade da linha elástica das vigas,
- pelo método da área dos diagramas de momentos, 900, 929
- pelo método da integração, 821, 826
- Deformações
- de cisalhamento, 133
- em eixos circulares, 199
- máxima, 686

- máxima, no plano das deformações, 673
- em eixos de seção circular, 199, 202
- lenta, 78
- na flexão, 321
- na seção transversal das vigas, 332
- nas vigas,
- pelo diagrama de momentos fletores, 901
- pelo teorema de Castigliano, 1042-1048
- por energia de deformação, 981, 1042, 1049
- por integração, 815, 821
- por superposição, 877, 879
- tabela de: Apêndice D
- permanentes (Ver Deformações permanentes)
- plásticas (Ver Deformações plásticas)
- sob ação de carga axial, 81
- Deformações específicas:
- de origem térmica, 105
- eixos principais para, 558, 674
- medidas das, 679
- normais,
- na flexão, 325
- sob carga axial, 81-82, 152
- principais, 670, 674
- transversais, 125
- transformação de, 663-673
- verdadeira, 75
- Deformações permanentes, 77
- na flexão, 380
- na torção, 268
- sob carga axial, 160, 162
- Deformações plásticas, 77
- para eixos de seção circular, 258, 266
- para vigas em flexão pura, 370, 380
- apenas com plano vertical de simetria, 380
- constituídas de material elastoplástico e de seção retangular, 373
- da seção não-retangular, 378-379
- com planos horizontal e vertical de simetria, 370-380
- para vigas submetidas a carregamento
- sob ação de carga axial, 160
- transversal, 515-516
- Densidade
- de vários materiais: Apêndice B
- Deslocamento relativo, 84
- Desvio tangencial, 904
- Diagrama:
- de corpo livre, 2
- de forças cortantes, 712-726
- de momentos fletores, 712-726
- superposição de, 909
- tensão-deformação, 64
- tensão-deformação de cisalhamento, 258
- Dilatação
- térmica (Ver Coeficiente de dilatação térmica)
- volumétrica, 131
- Dúteis
- materiais, 70, 209
- Dutibilidade, 77

E

Eixo neutro (Ver linha neutra)

Eixos centrais principais, 418

Eixos centróides
de uma área, 1170-1180
principais, 418

Eixos de seção transversal circular:
coeficiente de concentração de tensões em, 251
constituídos de material elastoplástico, 261
deformação em, 199, 202
deformações específicas em, 202
deformações plásticas em, 261
estaticamente indeterminados, 227
fórmulas da torção em regime elástico para, 206
seção transversal variável, 224
seção transversal vazada, 284-289
tensões nos, 197, 204-209
tensões residuais nos, 266-269

Eixos de seção transversal não-circular:
torção em seção maciça, 279-283
torção em seção vazada, 284-288

Eixos de transmissão, 195
dimensionamento de, 247, 248, 786-787

Eixos principais de deformação, 669, 673

Elasticidade
limite de, 77
módulo de, 76

Ensaios
de tração, 68

Entalhes,
distribuição de tensões junto a, 355

Equação da linha elástica, 820-832

Esbeltez, índice de, 1089

Escoamento, 70

Esforços
horizontais de cisalhamento, 484, 509
internos de torção, 207

Esmagamento
tensão de, 13

Especificações para projeto, 41

Estabilidade
de colunas, 1078-1148
de estruturas, 1078-1082

Estado biaxial de tensões, 636

Estado plano:
de deformações, 152, 668, 675
transformações de, 663, 671
de tensões, 594
transformações de, 594, 663

Estricção, 71

Estruturas simples,
análise de, 14

F

Fadiga, 40, 80

Fator de forma, 378

Fissuras e fendas, 74, 643
macroscópicas, 643
microscópicas, 643

Flambagem
localizadas, 763

Flanges, 251

Flexão:
deformações na, 321, 330

deformações plásticas na (Ver Deformações Plásticas)

em barras constituídas de vários materiais, 348

em barras de eixo curvo, 445-454

em um plano de simetria, 317-334
fora do plano de simetria, 415-425

Flexão pura:
deformações na, 321, 330
tensões na (Ver Tensões de Flexão)

Flexional, rigidez, 821

Fluência, 78

Fluxo cisalhante:
em barras de paredes finas, 512
em eixos circulares vazados de paredes finas, 286

Forças, 38
concentradas (Ver Cargas concentradas)

Forças Axiais, 6, 64
centradas,
círculo de Mohr para, 620
colunas sob ação de, 1078-1088, 1120-1128
deformação elástica sob ação de, 82
deformações específicas devidas a, 65, 152
deformações plásticas sob ação de, 159-165
tensões devidas a, 37, 152-155

excêntricas,
caso geral de, 425, 426
colunas sob ação de, 1144-1148
em um plano de simetria, 398-403

Forças cortantes, 480
diagramas de, 712-715

Fórmula

da interação, 1147
da secante, 1113
de Euler, 1085

Fórmulas
da torção em regime elástico, 206
de flexão em regime elástico, 328

Frágil,
material, 70, 209

Fratura mecânica, 643

Frequência, 248

Funções singulares, 852-857

Furo circular,
distribuição de tensões junto a, 156

G

Gigapascal, 4

H

Hexágono de Tresca, 637

Hidrostática, pressão, 132

Hooke, Robert, 76

Horse power (hp), 249

I

Igual resistência,
vigas de, 782-785

Impacto, carregamento produzido por, 977, 1011-1015

Índice de esbeltez, 1086

Inércia, momento de (Ver Momento de Inércia)

Inversão de carregamentos, 79

- J**
- Joule, (unidade), 976
- L**
- Lei de Hooke, 76
- para carga multiaxial, 129
 - para o estado geral de tensões, 133
 - para tensões e deformações de cisalhamento, 133
- Ligações, 16
- Limite:
- de duração, 81
 - de elasticidade, 77
 - de proporcionalidade, 76
- Linha elástica, equação da, 820-826, 829
- Linha Neutra
- para carga excêntrica em um plano de simetria, 398
 - para carga geral de carga axial excêntrica, 425
 - para flexão em um plano de simetria no regime elástico, 326
 - no regime plástico, 370
 - para flexão fora do plano de simetria, 421-422
- M**
- Macaulay, W. H., 855
- Madeira,
- especificações para projeto, 41
- Material:
- tabela de propriedades típicas: Apêndice B
- Materiais dúteis, 70
- critérios de ruptura para, 635-639
- Materiais elastoplásticos, 159
- carga axial em barras compostas de, 160-165
 - flexão em barras compostas de, 373-380
 - torção em eixos compostos de, 261
- Materiais frágeis, 72
- critérios de ruptura para, 639-643
- Materiais isotrópicos, 125, 135
- Máxima deformação de uma viga:
- pelo diagrama de momento fletor, 932-933
 - por integração, 821
- Maxwell, James Clerk, 1040
- Megapascal, 4
- Membrana, analogia da, 282
- Método:
- da interação, 1146-1147
 - da integração, para deformações das vigas, 815-889
 - da tensão admissível, 1145-1146
- Módulo:
- de elasticidade, 76
 - de vários materiais: Apêndice B
 - de volumes, 131
 - transversal, 136
 - de resiliência, 980
 - de resistência da seção elástica, 328
 - plastificada, 378
 - de ruptura
 - na flexão, 372
 - na torção, 260
- de tenacidade, 979

- de Young, 76
- resistente, 328
- Mohr,
- círculo de, (Ver Círculo de Mohr)
 - critério de, 640, 641
- Mohr, Otto, 614, 640
- Momento de Inércia:
- da seção transversal de um eixo, 205
 - da seção transversal de uma viga, 328
 - de uma área, 1180-1188
 - de uma área composta, 1186-1188
 - polar
 - de uma área, 1184
 - da seção transversal de um eixo, 205
- retangular, 1172
- Momento Estático
- da seção transversal, 327
 - de uma área, 1170, 1180
- Momento fletor, 319
- deformação das vigas pelas áreas dos diagramas de, 901-944
 - máximo elástico, 374
 - máximo plástico, 376
 - teoremas relativos às áreas dos diagramas de, 901-910
 - último, 372
- Momento Torção, 195
- interno, 206
 - máximo elástico, 261
 - máximo plástico, 263
 - último, 260
- Multiaxial, carregamento, 128
- Lei de Hooke generalizada para, 129
- N**
- Núcleo central da seção transversal, 443
- Núcleo elástico
- nas vigas, 375
 - nos eixos circulares, 262
- P**
- Pascal, (unidade), 4
- Percentual, alongamento, 74
- redução de área, 74
- Perda de estabilidade, 40
- Perfis laminados padronizados, 329
- canal, 558, 562
 - centro de torção, 561
 - tensões de cisalhamento em, 557
- cantoneiras, 566, 569
- características: Apêndice C
- características geométricas: Apêndice C
- de abas largas, 329
- características: Apêndice C
- tensões em, 495
- tipo I, 329
- características: Apêndice C
- Peso específico de vários materiais: Apêndice B
- Pinos, tensões em, 12
- Placas soldadas para vigas de igual resistência, 782
- Planos principais de tensões, 598, 630
- Poisson, coeficiente de, 124
- Poisson, Siméon Denis, 125
- Pontes rodoviárias, especificações para projeto, 41
- Pressão hidrostática, 132

- Princípio da Superposição, 129
- Princípio de Saint-Venant, 154
- Projeto, 5
- das vigas, 707-792
 - de colunas, sob cargas centradas, 1120-1130
 - sob cargas excêntricas, 1144-1148
 - de eixos de transmissão, 247, 248, 786
 - de vigas prismáticas, 762
 - para carregamento provocado por impacto, 1015, 1016
- Propriedades:
- de perfis de aço laminados: Apêndice C
 - de vários materiais: Apêndice B
- Q**
- Quilopascal, 4
- R**
- Raio:
- de curvatura da superfície neutra para vigas prismáticas, 330, 377
 - de giração:
 - da seção transversal de uma coluna, 1086
 - de uma área, 1180-1182
 - para vigas de eixo curvo, 449
- Reações superabundantes:
- para uma viga, 874, 946
 - sob carga axial, 100
- Rebites, tensões nos, 12
- Recuperação da resistência, 73
- Redução percentual de área, 74
- Relações:
- entre carga e força cortante, 727-728
 - entre E, ν , e G, 139-142
 - entre força cortante e momento fletor, 728-731
- Repetição de carregamentos, 80
- Resiliência, módulo de, 980
- Resistência (Ver Tensões de escoamento e Tensões de ruptura), 77
- Rigidez flexional, 821
- Rosetas, para medidas de deformação específica, 680
- Rótulas plásticas, 516
- Ruptura, módulo de,
 - na flexão, 372
 - na torção, 260
- S**
- Saint-Venant,
 - critério de, 640
 - princípio de, 154
- Saint-Venant, Adhemar Barré de, 154
- Secante, fórmula de, 1113
- Seção homogeneizada:
 - para vigas compostas de vários materiais, 351
 - para vigas de concreto armado, 353
- Seção transversal de vigas:
 - curvatura de, 332
 - deformações na, 332
- Seção transversal variável:
 - eixos de, 224
 - vigas de, 782, 783
- Segurança, coeficiente de, 39
- para colunas de aço, 1124

- Superfície neutra:
 - no regime plástico, 370
 - devidas a carregamento centrado, 36, 154, 155
 - devidas a carregamento excêntrico, 398-426
- Superposição:
 - método da, 100
 - para cálculo de deformações das vigas, 874, 877
 - para determinação de tensões, 532, 533
 - princípio da, 129
- T**
- Tangente de referência, 905, 928
- Tenacidade, módulo de, 979
- Tensões:
 - admissíveis, 37
 - biaxiais, 636
 - componentes de, 31
 - convenção de sinais de, 2, 32
 - críticas, 1087, 1092
 - de cisalhamento, 16, 481
 - devido a carga axial, 31, 37
 - devido a combinação de carregamento, 532-533
 - de escoamento, 71
 - convencional de escoamento, 73
 - de vários materiais: Apêndice B
 - de esmagamento, 13, 18
- Tensões:
 - de cisalhamento:
 - de flexão, 328
 - de barras curvas, 445
 - de barras prismáticas, 321
 - no regime elástico, 328
 - devido à torção,
 - de barras com seção retangular, 283
 - de eixos circulares, 97, 204-209, 261-266
 - de eixos de seção vazadas com paredes finas, 284
 - distribuição uniforme de, 9
 - em parafusos, pinos e rebites, 12
 - estado mais geral de, 628-630
 - longitudinais e transversais, em vasos de pressão, 652-653
 - máximas,
 - nas vigas, 709
 - no plano das tensões, 604, 632
 - multiaxiais, 128
 - na torção, 208
 - planos principais de, 600, 630
 - principais, 600, 630

- nas vigas, 758-762
- residuais,
- na flexão, 382-383
- na torção, 266-268
- sob carga axial, 166
- sob ponto de aplicação de cargas, 788, 792
- transformação de, 594, 632
- verdadeiras, 75
- últimas, 38
- Teorema: dos eixos paralelos: Apêndice A
- de Castigliano, 1041, 1042
- análise de estruturas estaticamente indeterminadas, pelo, 1049
- cálculo de deformações pelo, 1042, 1049
- de Maxwell, 1040
- de Reciprocidade (Ver Teorema de Maxwell)
- Torção
- em barras de paredes finas com carga transversal, 558
- em barras não-circulares, 279, 283
- em barras retangulares, 282
- em eixos circulares, 195
- em eixos vazados de paredes finas, 284, 286
- fórmulas da, 206
- Torção, Ângulo relativo de, 223
- Trabalho:
- de um conjugado, 1018
- de uma força, 975, 976, 1017
- de várias forças, 1037
- Trabalho de deformação, 975-995
- análise de estruturas estaticamente indeterminadas por meio de, 1049, 1050
- cálculo de deformações por meio de, 1021, 1024, 1042, 1049
- para o estado mais geral de tensões, 990, 992
- para tensões de cisalhamento, 986, 987
- na torção, 987, 988
- sob carga transversal, 978
- para tensões normais, 981, 985
- na flexão, 984, 985
- sob carga axial, 982
- Trabalho específico de deformação:
- para o caso mais geral das tensões, 990, 991
- para tensões de cisalhamento, 986
- para tensões normais, 981
- Tração, ensaio de, 68
- Trajelórias de tensões, 762
- Transformação:
- de deformações planas, 663, 672
- de deformações tridimensionais, 674, 675
- de tensões planas, 596
- de tensões tridimensionais, 630
- Tresca, critério de, 637
- Tresca, Henri Edouard, 637
- U
- Unidades, Sistema Internacional de: Apêndice E
- V
- Valor inferior do escoamento, 73
- Valor superior do escoamento, 73
- Vasos de pressão, 651

- tensões em vasos de paredes finas, 651, 655
- Vigas, 479
- da seção variável, 783, 785
- de aço, 329
- dimensionamento de, 763, 764
- propriedades de: Apêndice C
- de concreto armado, 353
- de eixo curvo (Ver barras de eixo curvo)
- deformação de (Ver deformações nas vigas)
- de igual resistência, 783, 785
- de seção prismática, projeto de, 762
- dimensionamento de, 707
- constituídas de vários materiais, 348
- em balanço, 822
- análise de, 905, 906
- esticamente determinadas, condições de contorno, 822
- esticamente indeterminadas,
- análise pelo teorema de Castigliano, 1049, 1050
- pelo método das áreas dos diagramas de momento, 945, 946
- por integração, 833, 835
- por superposição, 874, 877
- simplesmente apoiadas, 822
- Volume, módulo de elasticidade de, 132
- Von Mises, critério de, 637
- Von Mises, Richard, 637
- W
- Watt (unidade), 248
- Y
- Young, módulo de, 76
- Young, Thomas, 76
- Z
- Zona elástica (Ver núcleo elástico)
- Zona plastificada
- em eixos de seção circular, 262
- em vigas com carga transversal, 517, 518
- em vigas sob flexão pura, 377



!